応用力学論文集 Vol. 4, pp. 453-458 (2001年8月)　　土木学会

地表地震断層シミュレーションのための 弾塑性確率有限要素法とその計算例

APPLICATION OF THE STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD TO THE SURFACE EARTHQUAKE FAULT MODEL

中川英則*・堀宗朗**・マチェイ・アンドレ***
Hidenori NAKAGAWA and Muneo HORI and Maciej ANDERS

*学生員　工修　東京大学大学院　社会基盤工学専攻 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)
**正会員 Ph.D.　東京大学大学院助教授　東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)
***Ph.D.　東京大学大学院　社会基盤工学専攻修了 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

In order to simulate the formation process of surface earthquake faults, we develop a new stochastic finite element method for an elasto-plastic body with randomly varying material properties and apply it to the 3D Drucker-Prager model. The method is based on the Karhunen-Loeve expansion and Polynomial chaos expansion to efficiently estimate complete probabilistic characteristics of responses, such as average, variance, and a probability density function. Also, it is shown that the proposed stochastic finite element method is able to simulate complicated bifurcation phenomena associate with the fault formation process.

Key Words : *Surface Fault, Stochastic Finite Element Method, KL Expansion, Polynomial Chaos*

1. はじめに

1995年の兵庫県南部地震では，淡路島北部の地表には既存の野島断層に沿って明瞭な地震断層が現れ，活断層が話題として多く挙がった[1),2)]．また，近年におけるトルコのコジャエリ地震や台湾の集集地震では，地表面断層が堆積層内で消散せずに地表に達し大きな断層変位を引起すことによって，土木構造物が多大な被害を被ったことにより，活断層による地表断層変位が問題として取り挙げられるようになってきた[3)]．さらに，近年の構造物の巨大化と長大化，現在までに日本における活断層は1500本以上も見つかっており，まだなお新しい活断層が発見されていることから，必然的に地表地震断層を意識した構造物の設計も増えてくることが考えられる．

このようなことから，断層破壊が堆積層内をどのように広がり，地表面上のどこにどのぐらいの変位を及ぼすか，また断層破壊が起こったときそれはどのくらいの確率で地用面に現れるのかなどを予測することは，地震工学上重要な課題となる．また，この予測のために，数値計算によるシミュレートは必要不可欠なものであり，そこでは1) 堆積層がもつ構造・物性の不確からしさの考慮，2) 地盤のもつ非弾性的な性質に起因した分岐現象の取り扱い，3) 実際の地表地震断層を表現しうる適切なモデルの作成などが必要となる．特に，1) の堆積層がもつ構造・物性の不確からしさに関しては，今から30年ほど前から都市部での本格的な基盤構造探査が行われているものの，観測点に限りがあったことや，人口震源による探査も爆破によるものであったため必要な測線を設けることに制約があったなどのことから，詳細な地下形状は得られていない．このように，大都市としては世界で最も地下構造が把握されている首都圏でも，まだまだ資料が足りないのが現状となっている．また，一般に表層の厚さや地盤の硬さ，地震規模 (Ms) と地表地震断層との間に何らかの関係があることが示されてはいるものの，地盤の持つ非線形性がなおも地表地震断層の出現の不確定要因となっており，地震断層が一様なずれを起こしたとしても地表面には雁行状の断層が現れてしまう．

このような観点から，本研究では材料特性に確率的なばらつきを考慮することで，現状の地盤構造や材料特性に対するデータの不足を埋めるとともに，非線形現象に伴う分岐過程を効率よく計算することを考え，断層震源に推定されるずれ量を与えたときの地盤内を進展する地表地震断層のシミュレーション開発を目指している．

2. 本研究の概要

本研究では，材料特性に確率的なばらつきを考慮することで生じた地表面での変位や歪の確率的な分布までも捉えることを目的に，確率場の固有関数展開を使った確率有限要素法[4)]を用いている．これによれば，応答のばらつきを考慮しながら，効率的に分岐過程を計算することが可能となる．これは，弾塑性体では，弾

性除荷と塑性載荷が場所ごとに異なって生じることが分岐を起こす原因であることから，材料特性のばらつきを考慮することで弾性除荷と塑性載荷が確率的に連続的に変動しながら起こることになるため，繰返し計算に含まれる数値誤差によって最も不安定な解に到達することが期待されるためである．

断層を非弾性的な塑性変形が集中した部分とみなし，この弾塑性確率有限要素法を，堆積層の材料特性が確率的にばらつく3次元弾塑性体に適用し，適当な境界条件の下で解くことで地表面に生ずる雁行状開口亀裂を再現している．

3. 弾塑性確率有限要素法の定式化

本論文では，確率的に物性のばらつきを持つ，等方的で不均質な弾塑性体を考える．ここで言う確率的な物性のばらつきとは，物体 V を N 個の領域に有限分割したとき，各領域における物性値，例えばヤング係数 E が M 個の値のパターンを取り得る場合，起こり得る事象の数は M^{N} となるが，その各事象 ω に $P(\omega)$ の確率を割当てることを意味する．なお，以下ではヤング係数 E が確率的なばらつきを持つものとした．

3.1 確率的な物性を持つ弾塑性体の基礎方程式

準静的な微小変形問題を考えたとき，弾塑性体に対する場の方程式は次のように書ける[5]．

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\Delta\sigma(\omega)=0\\
&\Delta\varepsilon(\omega)=\frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\Delta\mathbf{u}(\omega)+(\nabla\otimes\Delta\mathbf{u}(\omega))^{T}\right)\\
&\Delta\sigma(\omega)=\mathbf{C}(\omega):(\Delta\varepsilon(\omega)-\Delta\lambda(\omega)\partial_{\sigma}f(\sigma(\omega),\lambda(\omega)))\\
&\lambda(\omega)\geq 0, f(\sigma(\omega),\lambda(\omega))\leq 0, \dot{\lambda}(\omega)f(\sigma(\omega),\lambda(\omega))=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここに，$\mathbf{C}$ は確率弾性テンソル，f は降伏関数，λ は確率塑性乗数であり，連合流れ則を適用している．

ここで，確率弾塑性テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ を用いることにより，上式は次のように書くことができる．

$$
\nabla\cdot[\mathbf{C}^{ep}:(\nabla\otimes\Delta\mathbf{u})]=0 \tag{2}
$$

ここに，$\mathbf{C}^{ep}$ は，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{C}^{ep}=\mathbf{C}-\frac{(\mathbf{C}:\partial_{\sigma}f(\sigma,\lambda))\otimes(\mathbf{C}:\partial_{\sigma}f(\sigma,\lambda))}{\partial_{\sigma}f(\sigma,\lambda):\mathbf{C}:\partial_{\sigma}f(\sigma,\lambda)-\partial_{\lambda}f(\sigma,\lambda)},\\
&\quad\left(f(\sigma,\lambda)=0\wedge f(\dot{\sigma},\lambda)=0\text{ の時}\right)\\
&\mathbf{C}^{ep}=\mathbf{C},\\
&\quad\left(f(\sigma,\lambda)=0\wedge f(\dot{\sigma},\lambda)<0\vee f(\sigma,\lambda)<0\text{ の時}\right)\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

である．

したがって，問題は式(2)及び(3)を確率関数 $E(\mathbf{x},\omega)$ のもとで解くことに帰着される．

3.2 基礎方程式がもつ非線形的確率特性の緩和

さて，ヤング係数 E の確率的な変動に伴い，弾塑性応答も確率的に変動してくる．式(3)に見られるように，$\mathbf{C}^{ep}$ は降伏関数 f に関係しているが，ここで，この降伏関数 f 自体が確率的に変動する応力 $\sigma(\omega)$ および塑性係数 $\lambda(\omega)$ の関数であることから，$\mathbf{C}^{ep}$ は事象 ω についての複雑な確率関数となっている．そのため，次のような平均値まわりでの摂動展開を降伏関数 f に施すことで，$\mathbf{C}^{ep}$ を近似する．

$$
\begin{aligned}
f(\sigma,\lambda)=f|_{<>}&+(\partial_{\sigma}f|_{<>}):(\sigma-<\sigma>)\\
&+(\partial_{\lambda}f|_{<>})\cdot(\lambda-<\lambda>)+\cdots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで，式(4)に現れる平均 $<\sigma>,<\lambda>$ を求めるに当たり，正確な値を事前に求めることは困難を伴う．そのため，上下限体理論[6]に基づいて，以下のようにヤング係数 E の平均を挟む上下限解を求める．

$$
E^{-}=<E(\omega)>\quad <E^{+}=(<E^{-1}(\omega)>)^{-1} \tag{5}
$$

これらの値にそれぞれ対応した上下限体 $\overset{+}{\underset{-}{V}}$ において取られる応力 $\overset{+}{\underset{-}{\sigma}}$ および塑性係数 $\overset{+}{\underset{-}{\lambda}}$ は，確率的なばらつきがそれほど大きくない場合，それぞれ σ,λ の平均の上下限値を与えることが知られている．

さて，この上下限体 $\overset{+}{\underset{-}{V}}$ を用いて，式(4)を近似的に評価する．このことは，以下の応力・歪関係を導く．

$$
\begin{aligned}
&\Delta\sigma(\omega)=\mathbf{C}(\omega):\left(\Delta\varepsilon(\omega)-\Delta\lambda(\omega)\partial_{\sigma}f(\overset{+}{\underset{-}{\sigma}},\overset{+}{\underset{-}{\lambda}})\right)\\
&\lambda(\omega)\geq 0, f(\overset{+}{\underset{-}{\sigma}},\overset{+}{\underset{-}{\lambda}})\leq 0, \dot{\lambda}(\omega)f(\overset{+}{\underset{-}{\sigma}},\overset{+}{\underset{-}{\lambda}})=0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここでさらに，上下限体 $\overset{+}{\underset{-}{V}}$ に対して得られる物理量は，近似的にその平均値を評価していることから，$\overset{+}{\underset{-}{\dot{\varepsilon}}}=<\dot{\varepsilon}>$ および $\overset{+}{\underset{-}{\lambda}}=<\lambda>$ と仮定できる．したがって，$\overset{+}{\underset{-}{\dot{\sigma}}}$ と $<\dot{\varepsilon}>$ との関係を，

$$
\overset{+}{\underset{-}{\dot{\sigma}}}=\overset{+}{\underset{-}{\mathbf{C}}}:\left(<\dot{\varepsilon}>-<\dot{\lambda}(\omega)>-\partial_{\sigma}f(\overset{+}{\underset{-}{\sigma}},\overset{+}{\underset{-}{\lambda}})\right) \tag{7}
$$

と仮定する．

ここで，式(6),(7)を使うことで，式(3)は以下のように書き換えられる．

$$
\mathbf{C}^{ep}=\overset{+}{\underset{-}{E}}(\omega)\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{\underset{-}{}}} \tag{8}
$$

ここに，$\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{\underset{-}{}}}$ は次のようである．

$$
\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{\underset{-}{}}}=\left(\mathbf{C}^{*}-\frac{(\mathbf{C}^{*}:\partial_{\sigma}f)\otimes(\mathbf{C}^{*}:\partial_{\sigma}f)}{\partial_{\sigma}f:\mathbf{C}^{*}:\partial_{\sigma}f-\partial_{\lambda}f/E}\right),
$$

$$\left(f = 0 \wedge \dot{f} = 0 \text{ の時}\right)$$

$$\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{-}} = \mathbf{C}^{*},$$
$$\left(\{f = 0 \wedge \dot{f} < 0\} \vee \{f < 0\} \text{ の時}\right) \quad (9)$$

ここに，$\mathbf{C}^{*}$ は $\mathbf{C}/E(\omega)$ である．また，$\partial_\sigma f, \partial_\lambda f, f, \dot{f}$ などの値は $(\overset{+}{\sigma}^{-}, \overset{+}{\lambda}^{-})$ において，$\partial_\lambda f/E$ は $\partial_\lambda f/\overset{+}{E}^{-}$ においてそれぞれ評価されるものである．

以上より，問題は式 (2) および式 (8) を確率関数 $E(\mathbf{x},\omega)$ の下で解く問題に帰着された．ここで，式 (8) の右辺において $E(\omega)$ を除いた項 $\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{-}}$ は，確率的な性質を有していない．したがって，式 (3) における $\mathbf{C}^{ep}$ の σ および λ への非線形的な確率依存は，上述の操作によって緩和され，実質的に $\overset{+}{E}^{-}(\omega)$ のみが確率的に依存していることが分かる．

3.3 確率関数の固有関数展開

式 (8) に現れる $\overset{+}{E}^{-}(\omega)$ を KL(Karhunen-Loeve) 展開[7),8)] を用いて，荷重増分に伴う変位増加量 $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ を PC(Polynomial Chaos) 展開[8)] を用いて離散化する．付録 1,2 に示すように，KL 展開および PC 展開とは，いわば確率関数を固有関数を用いて離散化する方法である．

具体的には，$\mathbf{C}^{ep}(\mathbf{x},\omega)$ および $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ はそれぞれ次のように表現される．

$$\mathbf{C}^{ep}(\mathbf{x},\omega) = \overset{+}{E}^{-}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m}\phi_m(\mathbf{x})\xi_m(\omega)\right]\mathbf{C}^{*ep\overset{+}{-}} \quad (10)$$

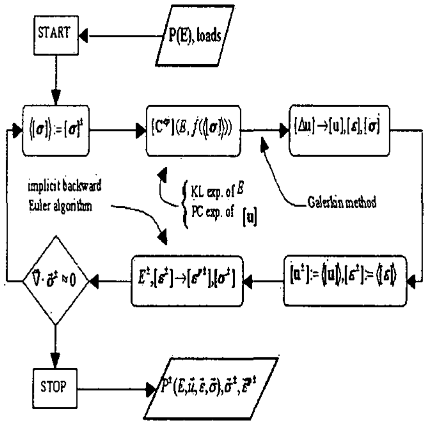
$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\omega)\Delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \quad (11)$$

ここに，1) ϕ_m は $E(\mathbf{x},\omega)$ の共分散マトリックスの固有関数，2) $\xi_m(\omega)$ は ϕ_m に対応した確率空間上での固有関数，3) λ_m は両者に対応した固有値，4) $\Psi_n(\omega)$ は $\xi_m(\omega)$ から構成される，確率空間上で完全系を成す固有関数である．

ここでは，$E(\omega)$ の確率的性質は既知であり，その分布は正規分布を成しているとした．そのため，KL 展開に用いる確率空間上での固有関数 $\xi_m(\omega)$ はそれぞれ正規分布の性質を呈している．

一方，荷重増分に伴う変位増加量 $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ は，もはや正規分布的な性質を呈しているとは限らない．そのため，その固有関数は KL 展開に用いたような，性質のよく知られた正規分布の確率関数 $\xi_m(\omega)$ の線形和として表すことができなくなってしまう．そこで，この欠陥を埋めるため，PC 展開を用いている．PC 展開では，KL 展開で用いた確率空間上での固有関数 $\xi_m(\omega)$ を用いて，新たに，確率関数 $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ を表現するような固有関数 $\Psi_n(\omega)$ を再構成している．

図 1. 弾塑性確率有限要素法のアルゴリズム



3.4 弾塑性有限要素法への組み込み

式 (1) から弾塑性有限要素法の定式化に基づき，以下のようなマトリクス方程式を導くことができる[5)]．

$$\left[{}^{j-1}\mathbf{K}_i\right](\omega)\left[{}^{j}\Delta\mathbf{U}_i\right] = \left[\mathbf{F}_i^{ext}\right](\omega) - \left[< {}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int} >\right]$$
$$\left[{}^{j-1}\mathbf{K}_i\right](\omega) = \Sigma_{el}\int_{V_{el}} \mathbf{B}^T\, {}^{j-1}_{\ \ i}\mathbf{C}^{ep}(\omega)\mathbf{B}dV \quad (12)$$

ここに，i は荷重増分の番号，j はイタレーションの番号をそれぞれ表している．また，数値計算上の容易さのため，式 (12) の 1 式目における右辺の $\left[{}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int}\right](\omega)$ を，その平均である $\left[< {}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int} >\right]$ と置換えている．

ここで，適当な項数 M で打切った式 (10) を式 (12) の第 2 式目に代入し，まとめると以下のように書ける．

$$\left[{}^{j-1}\mathbf{K}_i\right](\omega) = \Sigma_{m=0}^{M}\xi_m\, {}^{j-1}\mathbf{K}_m \quad (13)$$

ここに，

$${}^{j-1}\mathbf{K}_0 = \int_{V_{el}} \overset{+}{E}^{-}\mathbf{B}^{T\,j-1}\mathbf{C}^{ep*\overset{+}{-}}\mathbf{B}dV \quad (m = 0)$$
$${}^{j-1}\mathbf{K}_m = \Sigma_{el}\int_{V_{el}} \overset{+}{E}^{-}\mathbf{B}^{T}\sqrt{\lambda_m}\phi_m\xi_m\, {}^{j-1}\mathbf{C}^{ep*\overset{+}{-}}\mathbf{B}dV$$
$$\cdots\cdot(m = 1 \sim M) \quad (14)$$

である．

さらに，適当な項数 N で打切った式 (11),(12),(13) および確率空間上の固有関数 $\Psi_n(\omega)$ の直交性を用いることによって，最終的に次のマトリクス方程式が導かれる．

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{M} < \xi_m\Psi_n\Psi_k > {}^{j-1}\mathbf{K}_m\right)\left[{}^{j}\Delta\mathbf{u}_n\right] = < \left[{}^{j-1}\Delta\mathbf{F}\right]\Psi_k >$$
$$(k = 1, 2, \cdots, N) \quad (15$$

$$\left[{}^{j-1}\Delta\mathbf{F}\right] = \left[\mathbf{F}^{ext}\right](\omega) - \left[< {}^{j-1}\mathbf{F}^{int} >\right] \quad (16$$

ここに，$\Delta\mathbf{F}$ は不釣合い力と呼ばれるものである．

式 (15),(16) を数値計算的に求めるにあたり，予測・修正子法を Euler backward algorithm と組合わせることで，Newton-Raphson 的に不釣合い力 $\Delta\mathbf{F}$ が無くなるまで反復を繰返し解を求めている[5),9),10)](図 1. 参照)．

4. 数値シミュレーション概要

上述した確率弾塑性有限要素法を，単純化された横ずれ断層型のモデル (図 1.) に適用してみた．モデルのサイズは，$(D_x,D_y,D_z)=(140,40,40)$[m] である．メッシュサイズは，$(d_x,d_y,d_z)=(6.667,5.714,5.714)$[m] のアンバイアスなものを用いている．このメッシュサイズは，断層破壊に伴うエネルギーの消散率から求めたものである (付録 3 参照)．図 2. に示すように，底面と側面は変位が指定されており，上面は自由境界となっている．載荷として，断層底面の両側で反対向きの変位を，左右 1:9 の割合になるように加えていった．表 1. にこの載荷ステップを示す．地盤の物性は表 2. に示す通りであり，弾塑性構成則としては，Drucker-Prager モデル [11),12)] を採用している．

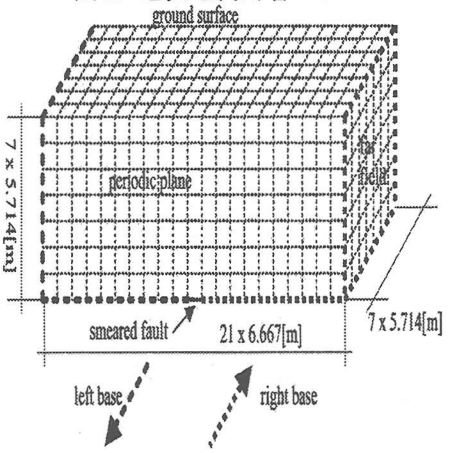
表 1. 載荷ステップ

Loading No.	Left side slip (m)	Right side slip (m)
1	0.5E-3	4.5E-3
2	0.5E-3	4.5E-3
3	0.25E-3	2.25-3
4	0.25E-3	2.25-3
5	0.25E-3	2.25-3

表 2. モデルの物性・境界条件

平均弾性係数	200[GPa]
ポアソン比	0.1667
一軸引張り強度 (f_t)	2.0[tf/m^2]
一軸圧縮強度 (f_c)	20.0[tf/m^2]
エネルギー消散率	0.06E-3[MN/m]
変動係数	0.1
相関距離	1.0[m]
確率分布	正規分布
right base	表 2. の載荷ステップで動かす
left base	表 2. の載荷ステップで動かす
periodic plane	変位境界条件に 5.0 %の乱れを含む

図 2. 地表地震断層モデル



5. 数値シミュレーション結果

数値シミュレーションによって得られた，平均せん断歪の深さ方向分布を各載荷ステップごとに分けて，図 3.～図 7. に示す．これら平均せん断歪分布図は，断層を底面から 5.714(m) ごとにスライスしていった時の各断面上に現れる平均せん断歪分布を，断層の下方から上方に向けてそれぞれ表したものである．

せん断歪が局所的に特定のパターンを形成しながら，断層底面から表面に向かって進展し，表面において雁行状に分布が現れている様子が計算されている．

図 3. 平均せん断歪分布 (載荷ステップ 1)

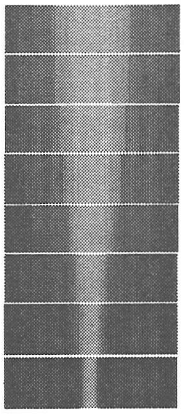


図 4. 平均せん断歪分布 (載荷ステップ 2)

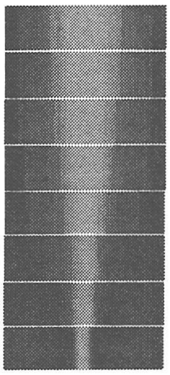


図 5. 平均せん断歪分布 (載荷ステップ 3)

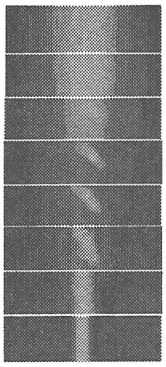


図 6. 平均せん断歪分布 (載荷ステップ 4)

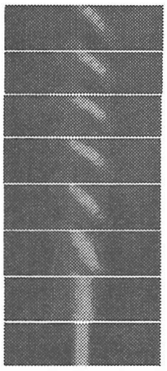
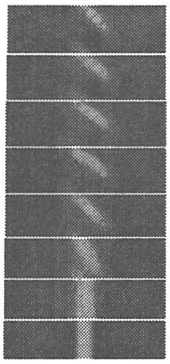


図7. 平均せん断歪分布 (載荷ステップ5)



6. 結論

本論文では，断層を非弾性的な塑性変形が集中する部分とみなし，弾塑性確率有限要素法を材料特性が確率的にばらつく3次元弾塑性体に用いることで，地表面に生ずる雁行状の歪分布を再現した．これによれば，地表では，広範囲に渡って緩やかに地盤が変形しているのに対して，深くなるにつれて地盤の変形が断層に近い中央部分に集中している．また，載荷が進むにつれて下層から上層に向かって平均せん断歪分布の集中が中央部分に明確に現れている．

今後は，弾塑性確率有限要素法の実際の地表地震断層への適用を念頭に，既存の実験結果との比較を行ってゆく．

付録1: KL(Karhunen-Loeve) 展開 [7),8)]

式 (8) に現れる $E^{\overset{+}{-}}(\mathbf{x},\omega)$ は，場所と確率空間に依存する確率過程である．このような確率過程は，場所の関数と確率の関数の積の和として表すことができる．この方法は，KL(Karhunen-Loeve) 展開と呼ばれており，本論文における弾塑性確率有限要素法定式化の根幹を成す2つの方法のうちの1つである．

今，ヤング係数 E の確率分布特性が正規分布であるとし，以下のように分解する．

$$E(\mathbf{x},\omega) = <E> (1+\alpha(\mathbf{x},\omega)) \tag{17}$$

ここに，$\alpha(\mathbf{x},\omega)$ は平均 $<E>$ からのずれを表しており，その平均はゼロであり，その確率分布特性は正規分布である．この時，$E(\mathbf{x},\omega)$ の共分散マトリックスの固有関数 $\phi_m(\mathbf{x})$ を用いることで，$\alpha(\mathbf{x},\omega)$ は以下のように離散化できる．

$$\alpha(\mathbf{x},\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m}\phi_m(\mathbf{x})\xi_m(\omega) \tag{18}$$

式 (18) は，$\xi_m(\omega)$ が直交性を持つのみならず，係数 $\phi_m(\mathbf{x})$ も直交性を持っている点が一般の直交展開と異なる点である．これは，共分散マトリックスの固有関数を利用したためであって，式 (18) の展開が唯一の表現とは限らない．このことは，$\xi_m(\omega)$ が確率空間において完全系を構成してはいないことを意味している．

付録2: PC(Polynomial Chaos) 展開 [8)]

付録1のKL展開に用いた確率固有関数 $\xi_m(\omega)$ から確率空間で完全系を成すような基底を作ることができる．この方法は，PC(Polynomial Chaos) 展開と呼ばれており，本論文における弾塑性確率有限要素法定式化の根幹を成す2つの方法のうちのもう一方となっている．

例えば，変位増分 $\triangle\mathbf{u}$ は，

$$\triangle\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) = \triangle\boldsymbol{\mu}_0\Gamma_0 + \sum_{n_1=1}^{\infty}\triangle\boldsymbol{\mu}_{n_1}\Gamma_1(\xi_{n_1}(\omega)) \tag{19}$$

$$+ \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\triangle\boldsymbol{\mu}_{n_1n_2}\Gamma_2(\xi_{n_1}(\omega),\xi_{n_2}(\omega)) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(\omega)\triangle\mathbf{u}_n \tag{20}$$

と表現できる．ここに，

$$\Gamma_p(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^p \exp(0.5\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^p}{\partial\xi_{m_1}\cdots\partial\xi_{m_p}}\exp(-0.5\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_{m_1},...,\xi_{m_p}),\quad p=0,1,.... \tag{21}$$

であり，PCと呼ばれる．また，$\triangle\mu_{n_1}$ は展開係数である．通常，ξ_m は正規分布となるが，この Γ_n は非正規分布に対応した関数も表すことができる．

付録3: Drucker-Prager 条件式 [11),12)]

Drucker-Prager 式は，引張りや圧縮の条件下で全く異なった性質を示す材料の降伏特性を表すのに適した式であり，Huber-von Mises の降伏条件および Mohr-Coulomb の破壊条件式を発展させたものと見ることができる．この降伏条件式は，主応力空間内で静水応力軸を中心軸とする円錐形を成しており，具体的には次のようになる．

$$f(\boldsymbol{\sigma},\kappa) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} - \left(k_1(\kappa) - k_2\boldsymbol{\pi}^T\boldsymbol{\sigma}\right)^2$$

$$f(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=1 \quad \begin{cases} \cdots\cdots\ tr(\boldsymbol{\sigma}) \le \dfrac{k_1(\kappa)}{k_2} \text{の時}, & (22) \\ \cdots\cdots\ tr(\boldsymbol{\sigma}) > \dfrac{k_1(\kappa)}{k_2} \text{の時} & (23) \end{cases}$$

ここに, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{P}$ および π は次のよう.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\ \sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \sigma_{xy}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{zx}\ ]^T,$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3}diag\left[\hat{\mathbf{P}}, 6\mathbf{I}_{3\times3}\right], \hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\pi} = [\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ ]$$

また, 式(22),(23) に現れる $k_1(\kappa)$, k_2 は以下のような関係をもつ.

$$k_1(\kappa) = k_{10}\exp - \frac{\kappa h k_{10}}{G_f} \quad (0 < \kappa) \qquad (24)$$

$$h = \sqrt{2}(V)^{1/3} \qquad (25)$$

$$k_{10} = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin\phi)} \qquad (26)$$

$$k_2 = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin\phi)} \qquad (27)$$

ここに, G_f はエネルギーの消散率, V はモデルの体積. c および ϕ は Mohr-Colomb の破壊条件に関係した定数である. また, 式(26),(27) に現れる $\pm$ は, それぞれ材料の引張りおよび圧縮状態に対応している.

参考文献

1) 粟田・水野・杉山他, 1995 年兵庫県南部地震に伴って出現した地震断層, 地質ニュース, **486**., 16 ~ 20, (1995).
2) 原田・岡村・露口, 1995 年兵庫県南部地震に伴う野島地震断層調査, 応用地質, vol.**36**, 51 ~ 61, (1995).
3) http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/turkey/
http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/taiwan/
http://wwwsoc.nacsis.ac.jp/ssj/naifuru/
4) M.Anders and M.Hori, Stochastic finite element method for elast-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46, 1897-1916, (1999).
5) 久田俊明・野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (1995).
6) M.Hori and S.Munashinge, Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, *Mechanics of Materials*, 31, 471-486, (1999).
7) 小倉久直, 物理・工学のための確率過程論, コロナ社.
8) R.G. Ghanem and P.D.Spanos, *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Springer, Berlin (1991).
9) *Journal of the JSTP*, vol.34, no.392, 977-983, (1993-9)
10) J.C. Simo and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer (1998).
11) 田中・鵜飼他, 地盤の三次元弾塑性有限要素解析, 丸善 (1996).
12) P.H.Freenstra and R.de Borst, A composite plasticity model for concrete, *Int.J.Numer.Meth.Eng.*, Vol.33,707-730 (1996).

(2001 年 4 月 20 日 受付)