

複合材料や多結晶体の初期降伏曲面の特性

Characteristics of First Yield Surface of Composite Materials and Polycrystals

岩熊哲夫*・田辺将樹**・岩崎智昭***・小山茂****

Tetsuo IWAKUMA, Masaki TANABE, Tomoaki IWASAKI and Shigeru KOYAMA

*正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 帝都高速度交通営団 (〒110-0015 東京都台東区東上野 3-19-6)

***学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

****正会員 博(工) 信州大学工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1)

Mori-Tanaka theory is used to predict average behaviors of yielding of composite materials and polycrystals. Comparison with experimental results quantitatively shows the characteristics of such an average yield stress. Results indicate the hydrostatic pressure dependence onto yielding and the anisotropy of yield loci. Furthermore a type of non-associativeness of the flow and a corner development on the yield loci of polycrystals are shown as an approximate example.

Key Words : average behavior, first yield surface, composites, polycrystals, anisotropic yielding, hydrostatic pressure

1. はじめに

新材料開発には複合材料がよく用いられている。コンクリートや鋼のような土木構造材料の場合は、主に実験による裏付けで歴史的に材料開発が行われてきているが、電子部品材料のような新材料開発の予測や、土木分野でも岩盤や地盤のように複雑な微視構造が材料特性に支配的な場合の挙動予測や把握においては、できるだけ簡便な微視特性の平均化手法があると便利である。もちろん均質化法を用いた有限要素法は微視構造を直接具体的に扱える利点があるが、やはり対象とした微視構造に対するケーススタディーでしかなく、できれば何らかの解析的方法の方が望ましい。

解析の方法のひとつに混合体理論があるが、この理論では巨視特性の微視構造への集中係数の主要項は体積分率であり、特にその微視構造の幾何形状を考慮できない欠点がある。これに対し森・田中理論を用いた方法¹⁾では、Eshelby のテンソルを通して介在物の形状を考慮した上で、比較的簡便な計算で平均化が可能である。ただし、介在物形状は回転楕円体でないと何らかの数値解析が必要になる上に、行列計算を用いない程度の計算では 1 種類の球状介在物のみが存在する複合材料しか対象にはできない。しかしながら、有限要素法のような大規模な行列計算をせずに比較的精度が良く簡便な新材料設計予測ができる点は見逃せない。そこで本論文でもこの森・田中理論を基に複合材料の平均挙動を捉え、球状以外の回転楕円体の相を持つ複合材料の強度に着目し、その巨視的な初期降伏曲面の予測を試みる。

複合材料の弾塑性挙動を対象とした研究には、近年では Ju と Sun²⁾による研究がある。そこでは介在物外側

での Eshelby テンソルを近似的に求めることによって、森・田中理論と同等の平均化が行なわれているが、やはり形状は限定され、母材での平均化に近似が用いられている。また、実験値との比較で適用範囲を明らかにした上で、降伏曲面の異方性や静水圧依存を定量的に指摘しているものの、降伏応力はやや過大評価になっている。一方文献³⁾では、本論文と同じ手法で球状介在物のみを対象とし、微小変形の範囲での弾塑性挙動を予測しているが、巨視的降伏曲面の特性や実験値との比較がなされていない。そこで、本論文では実験値との比較で本手法の適用範囲を明らかにした上で、介在物内部の Eshelby テンソルのみを用いた場合の降伏曲面特性の予測の程度を示す。

この森・田中理論は、使い方によって平均値の上下界を与えてくれることもわかっているが、近年の報告⁴⁾ではそれをさらに改善した上で、多結晶体にも適用可能な方法が提案されている。しかし、弾塑性状態についての上下界についてはまだ明確なものが無いこともあり、さらにここで例として用いる材料の弾性定数差がそれ程大きくない場合を対象としていることもあって、本論文ではこの新しい手法は用いていない。

2. 森・田中理論の定式化

2.1 各材料の応力ひずみ関係

ここで用いる森・田中理論の定式化は例えば文献³⁾等にも示されているので、ここでは図-1 に 2 次元的なモデルで示したように、母材と n 種類の回転楕円体介在物から成る複合材料に具体的に適用した場合の基礎式を列挙する。まず母材と介在物中の個々の応力ひずみ関係は

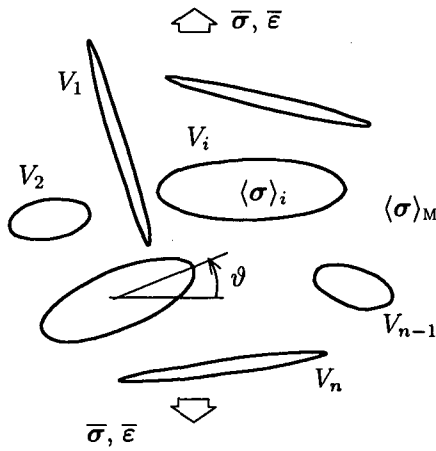


図-1 n 種類の回転楕円体を含む複合材料

それぞれ

$$\sigma_M = C_M \epsilon_M, \quad \sigma_i = C_i \epsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

と表せるものとする。ここに σ, ϵ, C はそれぞれ応力テンソル・ひずみテンソル・弾性テンソルを表し、下付きの M, i は母材部分あるいは第 i 番目の介在物内部の諸量であることを表す。また材料は等方弾性体とする。

2.2 平均化

複合材料の全体積を V 、母材の体積を V_M 、図-1 のように各介在物の体積を V_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、複合材料の全体積に占める各介在物の体積比率 f_i は

$$f_i \equiv V_i/V \quad (2)$$

で定義できる。

複合材料の平均化において考慮すべき重要な点は、母材と介在物の相互作用、および介在物同士の相互作用である。森・田中理論の最も重要な仮定は、多数の介在物が存在することによる相互作用を考慮した母材中の応力ひずみ関係は

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M \langle \epsilon \rangle_D \quad (3)$$

になるというものである。ここに $\langle \rangle$ はその量が下添え字で示した体積平均であることを表している。ひずみの下添え字が D になっているのは、介在物が多数存在することによる相互作用等を考慮したものとして区別しているからである。一方、介在物中の平均的な応力ひずみ関係は

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i \langle \epsilon \rangle_i \quad (4)$$

と書くことができるものとする。

これを用いて、複合材料全体の平均応力 $\bar{\sigma}$ と平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ を

$$\bar{\sigma} \equiv \sum_{i=1}^n f_i \langle \sigma \rangle_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n f_i\right) \langle \sigma \rangle_M \quad (5a)$$

$$\bar{\epsilon} \equiv \sum_{i=1}^n f_i \langle \epsilon \rangle_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n f_i\right) \langle \epsilon \rangle_D \quad (5b)$$

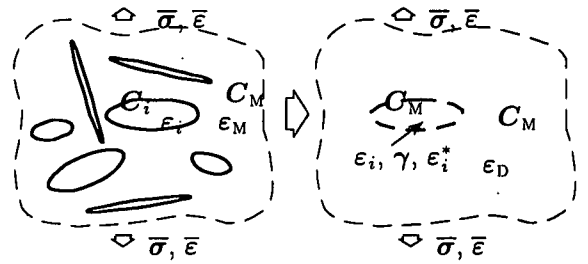


図-2 等価介在物法

で定義する。さらにこの平均応力と平均ひずみとを関係付ける係数テンソルが平均弾性テンソル $\bar{C}$ であり

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\epsilon} \quad (6)$$

を満足するものとして定義される。

森・田中理論ではさらに、母材中が $\langle \epsilon \rangle_D$ である状態の無限体中に、その母材との相互作用を算定したい対象の一個の介在物が存在したときに生じる相互作用だけで、母材と介在物との相互作用を考慮できるとしている。このように、介在物の影響を算定する段階では一個しか介在物が存在しないとして取り扱うため、 $\langle \epsilon \rangle_D$ は実際の母材のひずみの平均値ではなく、多くの介在物が既に存在する影響を含んだ平均と解釈しなければならない。そのため、添え字が M ではなく D になっている。

すなわち、あるひとつの介在物の平均ひずみ $\langle \epsilon \rangle_i$ は、母材平均ひずみ場 $\langle \epsilon \rangle_D$ に対する乱れ成分を持ち

$$\langle \epsilon \rangle_i = \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i \quad (7)$$

と表現できる。ここに、 γ_i は $\langle \epsilon \rangle_D$ の状態の無限体母材中に 1 個の介在物が存在したときのひずみの変動分である。しかもこの乱れ成分は、等方弾性体の母材中に回転楕円体の等方弾性介在物が 1 個入った場合には定数になることを、Eshelby は示している。したがって、介在物中の応力ひずみ関係式 (4) は

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i \} \quad (8)$$

と置き換えられる。

式 (8) を用いて無限体を解析するのはやや困難を伴うため、村¹⁾は Eshelby の結論を基礎として、この介在物を母材と同じ材料で同じ形のものに置き換えた上で、その置換を補う分だけの eigen ひずみ ϵ_i^* をその介在物中に導入すれば、元の問題と同じ答えが得られることを示した。これを「等価介在物法 (図-2)」と呼んでいる。すなわち、この森・田中理論の場合の式 (8) に対する等価な問題の応力ひずみ関係は

$$\langle \sigma \rangle_i = C_M \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i - \epsilon_i^* \} \quad (9)$$

とも表せる。母材が等方弾性体で介在物が回転楕円体である限り、この eigen ひずみ ϵ_i^* も定数テンソルであり、Eshelby の解を用いることによって乱れ成分 γ_i が

$$\gamma_i = S_i \epsilon_i^* \quad (10)$$

と求まる。ここで S_i は Eshelby のテンソルと呼ばれる定数テンソルで、支配方程式を解いて求まる係数で、介在物形状と母材のポアソン比のみに依存する定数パラメータになる。回転楕円体の場合の具体的な表現については文献¹⁾に詳述されている。式 (8) と式 (9) を等値することによって ϵ_i^* を他の諸量で表現できる。

以上の式を連立させると最終的に複合材料全体の平均弾性テンソルは

$$\bar{C} = M N^{-1} \quad (11)$$

と表される。ここに

$$M \equiv C_M + \sum_{i=1}^n f_i C_M (S_i - I) \quad (12a)$$

$$N \equiv I + \sum_{i=1}^n f_i S_i \{C_M - (C_M - C_i) S_i\}^{-1} (C_M - C_i) \quad (12b)$$

と置いた。 I は単位テンソルを示す。

2.3 各相中の応力と平均応力の関係

また上式から、平均応力 $\bar{\sigma}$ と母材中の応力 $\langle \sigma \rangle_M$ の関係が

$$\langle \sigma \rangle_M = T_M \bar{\sigma} \quad (13a)$$

$$T_M = \left[I + \sum_{i=1}^n f_i C_M (S_i - I) \{C_M - (C_M - C_i) S_i\}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (13b)$$

と示される。つまり T_M は母材中への応力集中係数と考えればよい。

同様に平均応力と介在物中の応力 $\langle \sigma \rangle_i$ の関係も

$$\langle \sigma \rangle_i = T_i \bar{\sigma} \quad (14a)$$

$$T_i = \left[I + C_M (S_i - I) \{C_M - (C_M - C_i) S_i\}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \right]^{-1} \left[I + \sum_{i=1}^n f_i C_M (S_i - I) \{C_M - (C_M - C_i) S_i\}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (14b)$$

と求まる。 T_i も応力集中係数である。

2.4 平均弾性特性の例

鋼を例として用い、内部に層状のパーライト炭化組織が存在する場合と球状組織が卓越する場合の報告⁵⁾を利用して、平均弾性係数の特性を簡単に例示する。ただしフェライト部分の剛性を百分の一にし、炭化物が弾性体介在物として存在する複合材料を対象とする。すなわち $E_M = 2.29$ GPa, $\nu_M = 0.3$, $E_i = 177$ GPa, $\nu_i = 0.26$ とし、炭化物の体積比率は 13.26% とする。母材の剛性を小さくしているのは、降伏後の塑性硬化挙動を弾性体で擬似的に検討するためである。

表-1 鋼組織の違いによる弾性係数 (GPa) の違い

組織	$\bar{C}_{1111}$	$\bar{C}_{1122}$	$\bar{C}_{1212}$
球状	3.75	1.58	1.09
楕円状	5.67	2.25	1.71

報告⁵⁾に沿って平面問題として捉え、炭化物の形状も x_3 方向に無限に長い軸を持つ円柱である場合と、同報告の図から大まかに読み取って主軸径長比が 35 : 1 の楕円柱の場合をそれぞれ、球状組織の場合とパーライト組織の場合のモデルと考えている。楕円柱介在物の場合には、鋼全体としての等方性を得るために、簡単のために楕円長軸 (図-1 の ϑ の向き) が 18 度きざみで 10 方向に向いた介在物 ($i = 1 \sim 10$) が、それぞれ 1.326% ずつ均等に存在するものとした。なお、テンソルの積や逆関係の計算においては、テンソル成分を Voigt 定数の規則に合わせて 6×6 の行列表示をした上で、文献⁶⁾に沿って行列計算によって実行している。

柱状介在物でモデル化したため、平均弾性は x_3 軸を回転軸とする横等方性を有する。式 (11) に上記の数値を代入して行列計算した結果が表-1 である。楕円状組織の場合の方がすべての係数が球状組織の場合よりも約 40 ~ 60% 程大きくなっているが、これは形状の異方性による応力集中の程度の違いが原因と考えられる。実際の鋼であれば、パーライト組織 (楕円状組織) の方が降伏後の硬化の程度が大きくなっていることの一つの理由とも考えられる。また、ジオテキスタイルや炭素 (長) 繊維補強における剛性強化を模擬した結果と考えてもよい。

3. 複合材料の初期降伏曲面の予測

3.1 母材あるいは介在物の降伏条件と巨視的降伏条件

式 (13a), (14a) に母材および介在物中の応力と平均応力の関係が得られている。したがって、どちらかが降伏した時の巨視的な初期降伏条件は、この式を個々の材料の降伏条件に代入するだけで得られる。本研究では簡単のために最も基本的な Mises の降伏条件を用いることとし、 $\langle \sigma \rangle_i$ あるいは $\langle \sigma \rangle_M$ のいずれかの偏差応力成分を σ'_{ij} と記すと

$$F = J_2 - \tau_Y^2 = 0, \quad J_2 \equiv 1/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (15)$$

がその条件になる。ここに J_2 は偏差応力の第 2 不変量であり、 τ_Y は初期せん断降伏応力である。

母材が最初に降伏する場合には、式 (13a) を式 (15) の応力項に代入して、巨視的降伏条件は

$$\begin{aligned} & \left[A_M (\bar{\sigma}_{11})^2 + B_M (\bar{\sigma}_{22})^2 + C_M (\bar{\sigma}_{33})^2 - D_M \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \right. \\ & \quad \left. - E_M \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} - F_M \bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{11} \right] + 3 \left[G_M (\bar{\sigma}_{23})^2 \right. \end{aligned} \quad (16)$$

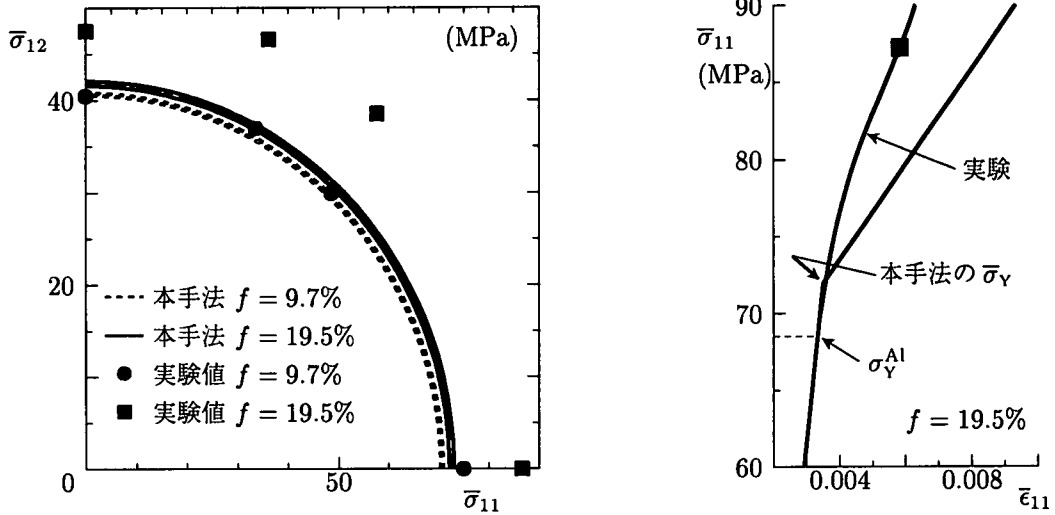


図-3 アルミニウム・シリコンの複合材料における降伏曲面および応力ひずみ関係の実験値との比較

$$+ H_M(\bar{\sigma}_{31})^2 + I_M(\bar{\sigma}_{12})^2] = (\sqrt{3}\tau_Y^M)^2 = (\sigma_Y^M)^2$$

となる。ここに σ_Y^M は母材の引っ張り初期降伏応力であり、各係数は

$$\begin{aligned} A_M &= (T_{1111}^M)^2 + (T_{2211}^M)^2 + (T_{3311}^M)^2 \\ &\quad - T_{1111}^M T_{2211}^M - T_{2211}^M T_{3311}^M - T_{3311}^M T_{1111}^M \\ B_M &= (T_{1122}^M)^2 + (T_{2222}^M)^2 + (T_{3322}^M)^2 \\ &\quad - T_{1122}^M T_{2222}^M - T_{2222}^M T_{3322}^M - T_{3322}^M T_{1122}^M \\ C_M &= (T_{1133}^M)^2 + (T_{2233}^M)^2 + (T_{3333}^M)^2 \\ &\quad - T_{1133}^M T_{2233}^M - T_{2233}^M T_{3333}^M - T_{3333}^M T_{1133}^M \\ D_M &= T_{1111}^M T_{2222}^M + T_{1122}^M T_{2211}^M + T_{2211}^M T_{3322}^M \\ &\quad + T_{2222}^M T_{3311}^M + T_{3311}^M T_{1122}^M + T_{3322}^M T_{1111}^M \\ &\quad - 2T_{1111}^M T_{1122}^M - 2T_{2211}^M T_{2222}^M - 2T_{3311}^M T_{3322}^M \\ E_M &= T_{1122}^M T_{2233}^M + T_{1133}^M T_{2222}^M + T_{2222}^M T_{3333}^M \\ &\quad + T_{2233}^M T_{3322}^M + T_{3322}^M T_{1133}^M + T_{3333}^M T_{1122}^M \\ &\quad - 2T_{1122}^M T_{1133}^M - 2T_{2222}^M T_{2233}^M - 2T_{3322}^M T_{3333}^M \\ F_M &= T_{1111}^M T_{2233}^M + T_{1133}^M T_{2211}^M + T_{2211}^M T_{3333}^M \\ &\quad + T_{2233}^M T_{3311}^M + T_{3311}^M T_{1133}^M + T_{3333}^M T_{1111}^M \\ &\quad - 2T_{1133}^M T_{1111}^M - 2T_{2233}^M T_{2211}^M - 2T_{3333}^M T_{3311}^M \\ G_M &= (T_{2323}^M)^2, \quad H_M = (T_{3131}^M)^2, \quad I_M = (T_{1212}^M)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

と置いた。 T_{jklm}^M は式 (13a) の T_M の成分である。介在物が最初に降伏する場合も同様の式で表現でき、上式の上下の添え字 M を i で置き換えたものになる。

すなわち式 (16) にあるように、応力成分のすべての2次項が異なる係数付きで関係付けられた最も一般的な形で巨視的な降伏条件は表現されることになる。したがって、Hill⁷⁾ が示した異方性を含む降伏条件の

$$\begin{aligned} A(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + B(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ + 2D\sigma_{23}^2 + 2E\sigma_{31}^2 + 2F\sigma_{12}^2 = 1 \end{aligned}$$

の形には必ずしもならず、静水圧¹⁾の影響が含まれてくる。もちろん微視構造が等方的であるような場合、例えば介在物が球形であるような場合には後述のように静水圧の影響は含まれず、Hillの形式あるいは偏差応力のみの関数として降伏関数は表現できることになる。

3.2 球形介在物の場合

(1) 降伏関数の表現

介在物が球形である場合はすべてのテンソルが等方テンソルになるので、上述のように降伏関数は偏差応力のみで表現でき、例えば母材が最初に降伏する場合の巨視的な降伏条件は

$$\begin{aligned} [(\bar{\sigma}'_{11})^2 + (\bar{\sigma}'_{22})^2 + (\bar{\sigma}'_{33})^2 - \bar{\sigma}'_{11}\bar{\sigma}'_{22} - \bar{\sigma}'_{22}\bar{\sigma}'_{33} \\ - \bar{\sigma}'_{33}\bar{\sigma}'_{11}] + 3[(\bar{\sigma}'_{12})^2 + (\bar{\sigma}'_{23})^2 + (\bar{\sigma}'_{31})^2] \\ = (Z_M \sqrt{3}\tau_Y^M)^2 = (Z_M \sigma_Y^M)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

と表される。ここに Z_M は巨視的降伏応力の母材自身の降伏応力に対する増幅係数になっていて

$$Z_M = 1 + \frac{f(\beta - 1)(\mu_M - \mu_i)}{\mu_M - (\mu_M - \mu_i)\beta} \quad (19)$$

で定義される。これは文献³⁾でも求まっていた表現である。 μ_M 、 μ_i はそれぞれ母材と介在物のせん断弾性係数であり、 β は Eshelby テンソル成分のひとつのパラメータで

$$\beta \equiv \frac{2(4 - 5\nu_M)}{15(1 - \nu_M)} \quad (20)$$

と定義されている。 ν_M は母材の Poisson 比である。介在物が先に降伏する場合も同様の表現になる。

(2) 実験値との比較

アルミニウム金属母材中にシリコンを介在させた複合材料の降伏曲面の実験例⁸⁾⁹⁾との比較を行う。材料特性は $E_{Al} = 70$ GPa, $E_{Si} = 107$ GPa, $\nu_{Al} =$

¹⁾ この論文では「平均応力」を式 (5a) の巨視的な応力として用いているので、いわゆる平均応力を静水圧成分と呼んでいる。

0.3, $\nu_{Si} = 0.2$ であり、アルミニウムの初期降伏応力は $\sigma_Y^{Al} = 68.5$ MPaである。上下添え字の‘Al’, ‘Si’はそれぞれアルミニウムとシリコンに対応した値であることを示している。シリコンは弾性体としてモデル化されており、その体積比率 f は9.7%, 19.5%となっている。図-3の左側の図に黒丸と黒四角で示した点が実験値であるが、軟鋼と異なり降伏棚が無い場合、この実験値はいわゆる0.2% オフセット耐力（この点から弾性勾配で除荷したときの無応力状態でのひずみが0.2%になるような応力レベル）であることを注意する。

これに対し、同図の実線と破線が本手法で求めた初期降伏曲面である。それぞれ2本ずつあるのは、森・田中手法において母材と介在物とを入れ替えて求めた Hashin-Shtrikman の弾性の上下界³⁾に対応した曲線を示してあるからである。弾性定数の差が小さいため、上下界の差は非常に小さい。シリコンの体積比率が9.7%のとき本手法は実験値とほぼ同じレベルの降伏応力を予測しているが、いずれの比率の場合も、実験値を過小評価している。文献⁸⁾の手法では逆に、この0.2% オフセット耐力をさらに過大評価してしまっている。

この例のように母材が降伏するような場合、たとえ介在物が回転楕円体でその比率が小さい場合であっても、母材中の応力は決して一様にはならず、特に介在物周辺では応力集中が生じている。したがって、本手法のような母材中の応力の平均値が降伏条件を満たすことの物理的な意味は全く明確ではない。そこで、体積比率が19.5%のときの単純引っ張り実験の応力ひずみ曲線²⁾上で、その具体的なレベルを示したのが図-3の右側の図の曲線と折れ線である。ただし折れ線は、アルミニウムに降伏後の塑性硬化が全く無かったと仮定した場合で文献³⁾で得られた初期降伏後の特性を示したものである。

本手法の巨視的降伏応力は母材そのものの降伏応力に対して式(19)の Z_M 倍のレベルにある。これに対して実験値はなめらかな曲線になっているが、例えばマルチスケール構造解析¹⁰⁾等で母材中のどこか一点でも降伏する状態は、この母材そのものの降伏応力よりも応力集中のために若干下になっている。したがって、この実験曲線も実際には母材の降伏応力レベル σ_Y^{Al} の少し下辺りから非線形になっていると考えなければならない。しかし、(■)で示した0.2% オフセット耐力のレベルは、図でも明らかなように本手法の降伏応力よりもかなり上方になっている。この結果は、本手法と0.2%というオフセット値は全く関係が無い場合当然であるが、安全側であることから工学的には、本手法の巨視的降伏応力は定量的にもよく実験の降伏状態を予測していると考えられる。

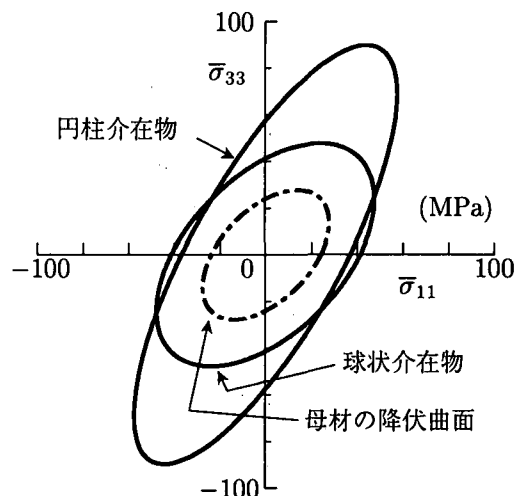


図-4 円柱介在物の場合の降伏曲面に現れる異方性

3.3 円柱介在物の場合

(1) 降伏曲面の異方性

例のために文献¹⁰⁾の例と同じ材料を用いる。すなわち、 $E_M = 68.9$ GPa, $E_i = 379.2$ GPa, $\nu_M = 0.3$, $\nu_i = 0.21$, $f = 0.29$, $\sigma_Y^M = 24$ MPaとした。1種類しか介在物が無いので f の添え字は省略した。円柱の無限に長い方向を x_3 軸方向にした場合の降伏曲面で、 σ_{11} と σ_{33} だけが零ではない（主方向である）場合として描いた曲線が図-4である。同じ体積比率で球形介在物でできている場合と比較してある。

σ_{11} と σ_{22} 面上での降伏曲線は等方的にはなるが、円柱の場合には介在物形状が等方的でないことから、この図のように σ_{11} と σ_{33} 面上での降伏曲面の場合には、図の軸上での45度方向から降伏曲面の主軸がずれており、異方性を示している。これは文献¹⁰⁾において球ではない介在物を用いた場合の結果と定性的には同じ結論を示している。

(2) 静水圧の影響

さらに顕著な影響は、巨視的な応力の静水圧成分の寄与である。前節と同じ材料を用い、円柱介在物の体積比率が5%, 29%の場合の σ_{11} と σ_{22} 面上での平面ひずみ降伏曲線を描いたのが図-5である。平面ひずみ状態は、式(6)の平均的応力ひずみ関係を得た後に $\bar{\epsilon}_{33}$ を零にするように平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 間の関係を求めた後に、三次元の降伏関数を平面問題化していることに注意する。

図中で「静水圧成分を無視した」曲線は、巨視的な降伏関数を平均応力成分の静水圧成分と偏差成分とに分解して表現し、その静水圧成分がかかっている項だけを「無視した」場合の曲線にあたる。すなわち、円柱介在物を含む複合材料で母材が降伏する場合には、静水圧成分によって降伏曲線は小さくなることを示している。この差が静水圧の寄与分である。

もう少し明確に定量化するために、逆に平均応力で表現した巨視的降伏関数式(16)の中の静水圧成分のみに

²⁾ 文献⁹⁾の実験曲線を拡大コピーしたものであり、その弾性部分の勾配も森・田中理論のものとは異なっているため、折れ線で示した本手法による硬化部分は文献³⁾で得られた硬化後の勾配の変化率を実験の弾性勾配に乗じたものになっている。

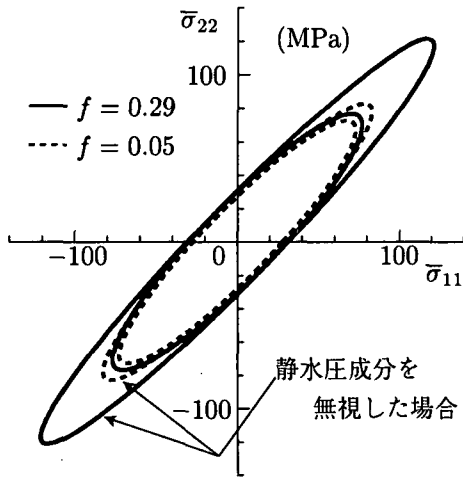


図-5 円柱介在物の場合の静水圧の影響

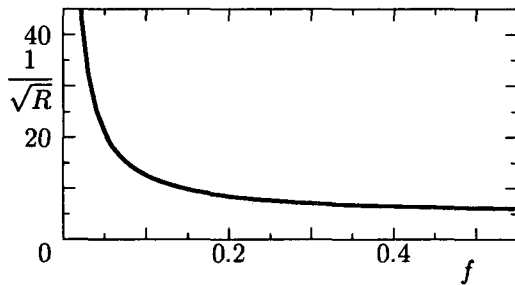


図-6 静水圧のみによる降伏応力半径比と介在物体積比率

関与する項を取り出して示すと

$$|\bar{p}_0| \equiv 1/3 |\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}| = \sigma_Y^M / \sqrt{R} \quad (21)$$

となる。ここに

$$R \equiv A_M + B_M + C_M - D_M - E_M - F_M \quad (22)$$

であり、この A_M 等は式 (17) で定義した係数である。 $1/\sqrt{R}$ は静水圧のみによる降伏応力半径の引っ張り降伏応力に対する比になる。もちろん介在物が存在しない $f = 0$ のときには静水圧は降伏に寄与しないから $1/\sqrt{R} = \infty$ (降伏しない) である。この $1/\sqrt{R}$ を介在物の体積比率に対する値として図-6 に示した。介在物比率が 10% 程度以上あると、静水圧の作用だけであっても引っ張り降伏応力の 10 倍程度以下で降伏する。なお、 f が 1 に近づくとこの係数は一定の値に漸近するが、問題の設定として介在物は降伏しないと仮定しているため、この値そのものは意味を持たない。

4. 介在物が先に降伏する場合の降伏曲面

前節では金属ベースの複合材料を念頭に置き、母材が先に降伏する場合を主として扱ってきた。この節では逆に介在物が先に降伏する場合でモデル化された多結晶体のようなものを扱う。多結晶体に森・田中理論を適用する一手法については文献⁴⁾に提案しているが、ここでは簡単のために 1% の母材に複数の種類の介在物が含ま

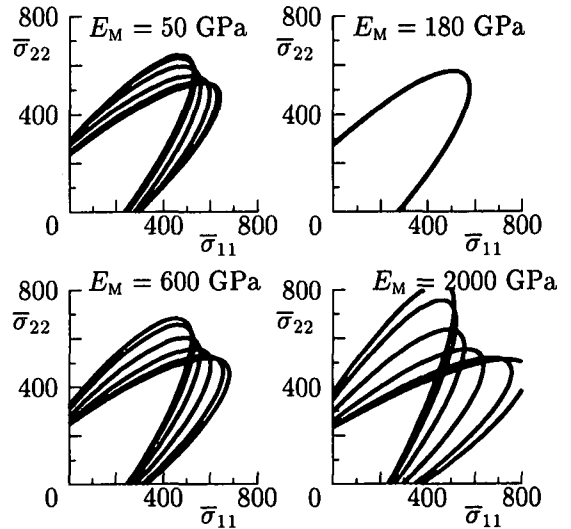


図-7 近似多結晶体の近似度 (軸は MPa)

れているモデルで、多結晶体を近似する。また、単結晶の降伏は結晶格子面でのすべりで与えるべきだが、ここではそれも簡単化し、Mises の降伏条件に従うものとする。この Mises の降伏条件は等方的であり、また各単結晶の弾性特性は等しくせざるを得ないので、複合系に非均質性を持たせるための工夫として、ひとつひとつの単結晶を異なる主軸方向を持つ楕円柱でモデル化する。実際には三次元的な回転楕円体を用いて降伏すべり軸も楕円主軸と異なるように採るのが望ましいが、単結晶体の降伏条件を近似してしまっているので、ここでは平面ひずみ問題として取り扱う。

4.1 多結晶体の近似度

ここでは、単結晶は銅の特性値を参考にしてその材料特性が

$$E_i = 200 \text{ GPa}, \quad \nu_i = 0.28, \quad \sigma_Y^i = 245 \text{ MPa} \quad (23)$$

である楕円柱とし、その楕円柱の無限に長い柱方向を x_3 軸方向に取り、楕円長短軸の半径比を 2 : 1 にした。この楕円長軸の向き (図-1 の ϑ) が、 x_1 - x_2 平面内で x_1 軸方向の 0 度方向から 18 度刻みで 162 度までの 10 方向を向いた、10 種類の楕円体介在物がそれぞれ体積比率で 9.9% ずつ ($f_i = 0.099$, $i = 1 \sim 10$) 不規則に分布しているものとした。残る 1% が、本来なら存在しないはずの母材であり、等方弾性体と設定した。

まず、この母材の材料定数による結果の変化を求め、その選び方を検討する。上式 (23) の単結晶の材料特性を考慮して、 $\nu_M = 0.31$ は固定したまま

$$E_M = 50, 180, 600, 2000 \text{ GPa}$$

と変化させ、各単結晶が降伏条件を満足したときの平均応力で表示した降伏曲面を求めた。

図-7 にその結果を示したが、 $E_M = 180 \text{ GPa}$ の場合を除くと、図中には 6 本の曲線が描かれている。こ

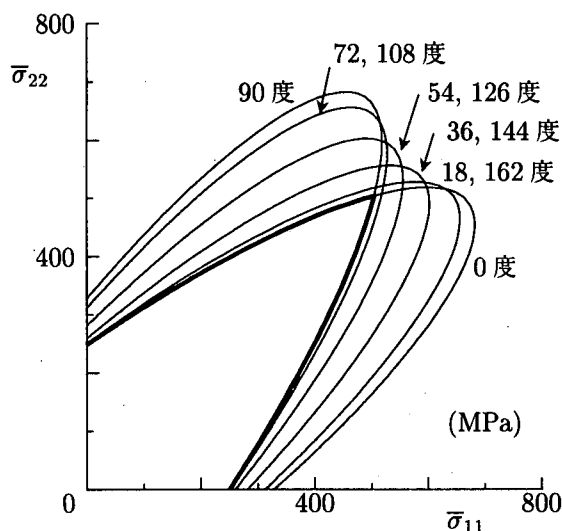


図-8 近似多結晶体の降伏曲線

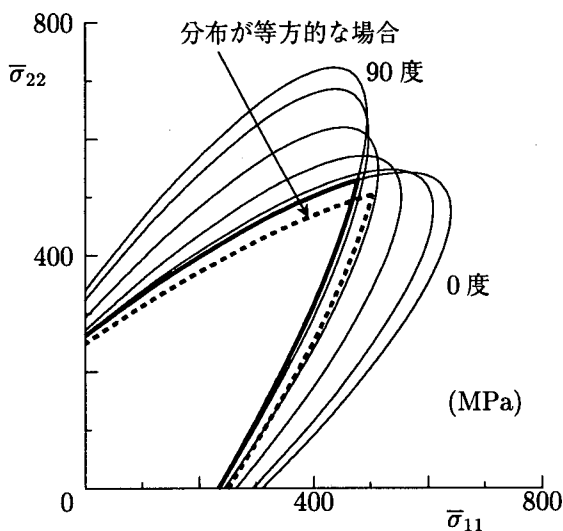


図-9 楕円主軸方向分布が等方ではない場合

れは18度きざみで分布させた介在物ごとの降伏条件から得られる巨視的な降伏曲線が6種類あったことを意味する。つまり0度と90度方向の曲線と、残りの8種類の曲線が2つずつは重なって合計6種類になっている。 $E_M = 180$ GPaの場合だけは介在物との弾性係数に差が無いことから、この曲線がほとんど重なってしまっている。 $E_M = 2000$ GPaと極端に差のある材料を用いない場合には、定量的にも定性的にもほぼ同様の結果が得られている。よって、以下の検討では

$$E_M = 600 \text{ GPa}, \quad \nu_M = 0.31$$

と固定した。

4.2 すべての方向に均等に分布している場合

図-8には、18度刻みで楕円の長軸が均等に分布している場合の平面ひずみ状態での降伏曲線を示した。図中の6本の細い曲線は前節同様、図中に数値で示した方向に長軸を持つ単結晶が降伏する場合の平均応力で表した降伏曲線である。したがって、この複数の曲線の最も内側にある滑らかではない太い曲線が、多結晶全体の大規模な降伏曲線になる。

この巨視的な降伏曲線は、この場合は長軸が0度方向を向いた単結晶と90度方向を向いたものとの降伏条件のみで構成されることから、初期降伏はその2方向の単結晶のどちらか、あるいは両方で同時に最初に発生することになる。したがってこの巨視的な降伏曲面には「角点」が発生している。もちろん流れ則としてこの点で何か不安定な問題が発生するわけではないが、見かけ上は角が発生しているのは興味深い。ただし局所的に、ここで設定したようなMisesの降伏条件を用いず、各単結晶はその結晶の向きに依存したすべりが発生するとした場合¹¹⁾には、このような鋭角な角点は発生しないことをここに注記しておきたい。

4.3 楕円主軸方向分布が等方ではない場合

一方現実問題として、繊維補強材等の長繊維補強材を用いる場合、その向きを等方的にするのは困難である。また鋼の圧延等でも単結晶の形状分布等は、熱処理をしない限り均質ではなくなる。このような材料では、降伏曲面に異方性が生じることは容易に推測できる。

それを定性的に検討するために、上節の例と同じ材料を用いるが、楕円長軸の向きが18度と162度である単結晶のみがその体積比率を30%とし、残りがそれぞれ4.875%ずつになっている場合を取り挙げる。このときの降伏曲面を図-9の実線で示した。各実線の意味は図-8と同じである。破線で示したのが図-8の太い曲線で示した等方的な場合の降伏曲線である。この場合も0度と90度方向の単結晶の降伏が最初に生じることは変わらないものの、異方的な単結晶の分布による相互作用で、降伏曲線が若干傾き、異方性を明確に示している。もちろん平均弾性テンソルも異方性を有している。

4.4 塑性ひずみ増分方向

本研究では実質的には弾性体のみを対象としているため、流れ則については一切検討せず、初期降伏曲面の特性についてのみ考察してきた。しかし式(14a)で示したような、平均応力と局所的な応力の関係がある一方で、文献³⁾にあるような塑性ひずみの巨視的な量と微視的な量の関係は全く別の関係として存在することから、いわゆる流れ則には関連則が成立しない可能性がある。

そこで、第4.2節で検討した等方的な場合の初期降伏曲面において、この平均応力と局所的な応力の関係を具体的に考察する。図-10に示したのは、平均応力に対して得られた角点付きの降伏曲線と、楕円の長軸が90度方向を向いた単結晶中での局所応力で表した降伏曲面を同じ軸上に描いたものである。すなわち、点Aで巨視的に降伏した場合には、実際には楕円長軸が90度方向を

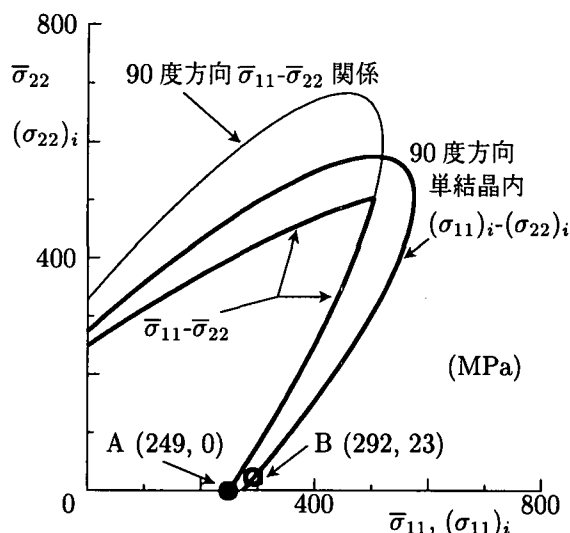


図-10 降伏曲面上の平均応力と局所応力の関係

向いた単結晶が点Bの応力状態になって降伏している。この2点の応力同士の関係が式(14a)を満足し

$$\langle \sigma \rangle_i|_{B \text{ 点}} = T_{90 \text{ 度方向単結晶}} \bar{\sigma}|_{A \text{ 点}}$$

という関係になっている。巨視的には単純引っ張り状態であるが、降伏した局所的な状態はそうっていない。

通常の流れ則であれば、塑性ひずみはこの局所的な応力状態で決定され、その平均塑性ひずみは文献³⁾にあるような関係で算定される。この塑性ひずみ同士の関係式は式(14a)とは異なっているため、例えばB点での局所的な法線則を満足した塑性ひずみが、必ずしもA点での巨視的な降伏曲線に対して法線則を満足するとは限らない。これは一種の非関連則のような特性になる。粒状体の場合にも、同様の非関連則が発生することが報告¹²⁾されているように、微視構造を有した材料の場合には、巨視的な降伏は、いわゆるポテンシャル論にのっとったものになるとは限らない可能性があると考えられる。

5. おわりに

非常に簡単な計算で平均挙動の予測が可能な森・田中理論という既存の理論を用いて、複合材料と近似の多結晶体の初期降伏曲面を求め、次のような特性を明らかにすることができた。

- アルミニウムを母材とする複合材料の実験結果と比較することによって、本手法による初期降伏応力が弾性限界よりも高い値を予測するが、いわゆる0.2%オフセット耐力程は高くなっていないことを示し、本手法が定義する平均降伏応力のレベルを明確にできた。
- 微視構造が等方的ではない一般的な複合材料の場合には、局所的な降伏が金属塑性論の静水圧非依存で

あっても、その巨視的な降伏特性には静水圧が影響を及ぼすことを定量的に示した。

- 同様に、微視構造が等方的ではない場合の巨視的な降伏曲面の異方性も定量的に示すことができた。
- 複合材料で近似した多結晶体の場合で、単結晶が球ではない場合を対象とすると、巨視的な降伏曲面にはみかけ上の角点が発生し、さらに流れ則も非関連になることを示すことができた。

参考文献

- 1) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
- 2) Ju, J. W. and Sun, L. Z.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part I: micromechanics-based formulation, *Int. J. of Solids Str.*, Vol. 38, pp. 183-201, 2001.
- 3) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 森勉, 村外志夫: 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 435-442, 1991.
- 4) 小山茂, 岩熊哲夫, 岩崎智昭, 小倉崇生, 三井康司: 複合材料と多結晶体の平均的な性質, 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp. 265-272, 2000.
- 5) 及川兼司, 寺田賢二郎, 松井和己: 鋼の微視的な構造に起因する巨視的弾塑性特性, 平成12年度(社)土木学会東北支部研究発表会講演概要集, pp. 48-49, 2001.
- 6) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.
- 7) Hill, R.: *The mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, 1998.
- 8) Sun, L. Z., and Ju, J. W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. of Solids Str.*, Vol. 38, pp. 203-225, 2001.
- 9) Zhu, H. T., Zbib, H. M. and Khraisheh, M. K.: Flow strength and size effect of an Al-Si-Mg composite model system under multiaxial loadings, *Scripta Met. Mater.*, Vol. 32, pp. 1895-1902, 1995.
- 10) 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集, 登載決定, 2001.
- 11) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A 394, pp. 87-119, 1984.
- 12) 赤井澤裕幸, 岸野佑次, 金子賢治: 3次元ブローブシミュレーション試験による粒状体の増分弾塑性挙動の研究, 平成12年度(社)土木学会東北支部研究発表会講演概要集, pp. 274-275, 2001.

(2001年4月20日 受付)