

粒状体の流動則における 応力増分依存性に関する微視力学的研究

A Micromechanical Study on the Dependency of Incremental Stress
on the Flow Rule of Granular Media

金子賢治*, 岸野佑次**
Kenji KANEKO and Yuji KISHINO

*正会員 工博 東北大学大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

Observing numerical results obtained by Granular Element Method, we discuss the incremental stress-strain behavior of granular materials. We assume a periodic boundary for the numerical experiments to avoid disturbances caused by boundary controlling. Stress-probe tests starting with the intermediate data of a bi-axial compression test give a set of incremental stress-strain relationships. The result indicates that the flow direction for plastic loading is not constant as is assumed in the classical plasticity theory and depends on the direction of the stress increment. Comparing the numerical results with a proposed flow rule, we conclude that the origin of the direction dependency is the volumetric component of plastic strain.

Key Words: dependency of incremental stress, flow rule, granular media, periodic boundary, GEM

1. はじめに

流動則の応力増分方向依存性は、局所化や分岐の解析をはじめとして地盤材料のような粒状材料の種々の力学問題に対して非常に重要な性質であることが認識されつつある。「応力増分方向依存性」とは、応力増分の方向によって塑性流動方向が変化する変形特性を指し、増分非線形性等と呼ばれる場合もある。粒状体のこのような性質は古典的な金属塑性論流動則では表現し得ない変形特性である。

流動則の応力増分方向依存性を表現できる構成モデルとして、Hypoplasticity^{1), 2)}や J_2 変形理論³⁾、接線塑性⁴⁾等が提案されている。これらのモデルは、粒子集合体を連続体と見なして現象論的にその変形特性をモデル化したもので、これらのモデルを統一的に解釈するためには、応力増分方向依存性が生じる理由、金属等の他の材料との違い、依存性の程度等を知ることが重要となる。

このような流動則に関する問題に対しての各種情報を収集するために、Anandarajahら⁵⁾はオタワ砂を用いて応力プローブ実験を行い、Failure Lineに近い応力状態においては一般的な金属塑性論が十分適用できると結論づけている。また、Royら⁶⁾は応力増分方向に対する全ひずみ増分応答を砂の応力プローブ実験により調べ、Hypoplasticityの検証を行った。しかしながら、実実験による応力プローブ試験は非常に困難であり、応力増分方向の数も少なく、各応力増分方向に対するそれぞれ違う供試体を用いるこ

とによる挙動のばらつき等もあるため精密なデータが得られているとは言い切れない。また、実材料を用いた室内要素試験は微視的観点からの考察は不可能に近く応力増分方向依存性の発生メカニズムを捉えることはできない。一方、武ら⁷⁾⁻⁹⁾は、境界粒子を用いて円形領域内の粒子集合体を制御して行った2次元粒状要素法(GEM)による応力プローブ試験シミュレーションにより、粒状体の流動則はほぼ非関連型に近いが厳密には応力増分方向に依存すること等の流動則に関する一連の結論を導いている。

本研究では、理想的な境界制御により材料本来の力学特性を抽出できる周期境界制御GEM¹⁰⁾を用いて応力プローブ試験シミュレーションを行い、武らの結論を再確認すると共に、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性に着目して粒状体の流動則に関して考察する。特に、巨視的に流動則の応力増分方向依存性として現れる原因となる微視的現象、応力増分方向依存性を表現しうる拡張流動則を中心に議論する。

ところで、著者らが提案した数学的均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析の定式化¹¹⁾によれば、周期的微視構造が巨視的全体構造に対する材料の構成関係を与えると解釈される。ここで用いる周期境界制御GEMは、マルチスケール解析において構成関係を与える微視問題の解法そのものであり、本研究は微視問題に着目した多数の数値実験により粒状体の巨視的な構成モデルに関する種々の情報を収集・考察するための一連の研究の一部である。

2. 周期境界制御粒状要素法の概要

粒状体の離散体モデルに基づく数値シミュレーション方法としてCundallらによって提案された個別要素法 (DEM) ¹²⁾ が有名で、これを応用した多くの数値解析的研究が行われている¹³⁾⁻¹⁵⁾。DEMは粒状体を構成する粒子の動的な運動方程式に基づく数値シミュレーション手法である。粒子間接触力は粒子の弾性的性質を反映して与えられるが、通常、粒子を剛体と仮定し粒子間接触点に仮想バネ要素を配することで接触粒子間には互いに重なることを許し、接触力は重なり量に比例して生じると仮定される。

一方、GEM¹⁰⁾は剛体粒子や粒子間仮想バネ要素などを用いる粒子間の構成関係に関してはDEMとほぼ同様である。両者の主な相違点は、DEMが個々の粒子の運動方程式に基づいて差分法により粒子の運動を追跡するのに対して、GEMは全体剛性マトリックスに基づいてつり合い条件を満足しながら増分計算を行う点である。GEMがより精度の高い境界制御を可能とし、より精密に粒状体の準静的な力学特性を抽出可能であることが示されている⁷⁾⁻⁹⁾。本研究では、周期境界制御によるGEM^{10), 11)}を用いて解析を行うこととし、以下、その概要をマトリックス表記で示す。

2.1 周期境界条件と応力、ひずみの定義

解析対象とする基本単位構造の周期性を仮定した周期境界の概念を図-1に示す。ここでは、図-1に示すように、粒子 P に相当する隣接領域の粒子を粒子 P のダミー粒子 D と称することとする。粒子 P の位置ベクトルを $\mathbf{x}^P$ 、ダミー粒子の位置ベクトルを $\mathbf{x}^D$ として、粒子 P およびダミー粒子 D の変位増分ベクトルは平均ひずみ増分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ を用いて次式のように分解することができる。

$$\begin{aligned}\Delta U^P &= \Delta U^{P0} + \Delta U^{P1} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}^P + \Delta U^{P1} \\ \Delta U^D &= \Delta U^{D0} + \Delta U^{D1} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}^D + \Delta U^{D1}\end{aligned}\quad (1)$$

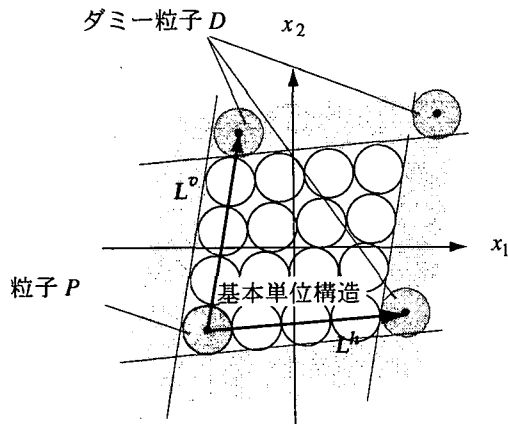


図-1 周期境界の概念

ここで、 ΔU^{P1} 、 ΔU^{D1} は粒子 P およびダミー粒子 D の微視変位増分ベクトルと呼ばれる。微視変位増分ベクトルは粒子の変位増分ベクトルから基本単位構造全体の平均的な変位増分 $\Delta U^0 = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}$ を除いた部分であり、各粒子の非均質な変位を表す。周期境界条件は、この微視変位増分ベクトルを用いて次式で与えられる¹¹⁾。

$$\Delta U^{P1} = \Delta U^{D1} \quad (2)$$

基本単位構造の形状を特徴づける周期形状ベクトル $\mathbf{L}^h = \{L_1^h, L_2^h\}^T$ 、 $\mathbf{L}^v = \{L_1^v, L_2^v\}^T$ を図-1のように導入する。周期ベクトル $\mathbf{L}^h$ 、 $\mathbf{L}^v$ の各成分を用いて平均ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は次式で定義される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{L_1^h}{L_1^{h0}} - 1 & \frac{1}{2} \left(\frac{L_2^h}{L_1^{h0}} + \frac{L_1^v}{L_2^{v0}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{L_2^h}{L_1^{h0}} + \frac{L_1^v}{L_2^{v0}} \right) & \frac{L_1^v}{L_1^{v0}} - 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに、上付文字0は初期状態の値を表す。

GEMにおいて粒状集合体の平均応力は、仮想仕事の原理に従って与えられる¹⁶⁾。同様の考え方で、周期境界制御GEMにおける基本単位構造の平均ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ に対応する平均応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を次式で定義する。

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{1}{V} \sum_{CD} f^{CD} \mathbf{x}^{CDT} \quad (4)$$

ここに、 f^{CD} はダミー粒子から基本単位構造内部の粒子に作用する接触力ベクトル、 $\mathbf{x}^{CD}$ は基本単位構造内部の粒子とダミー粒子との接触点の位置ベクトル、 V は基本単位構造の体積である (図-2)。また、 $\sum_{CD}$ は基本単位構造内部の粒子とダミー粒子との全接触点についての総和を意味する。GEMにおいては、全粒子のモーメントのつり合い条件を満たすため、式(4)で与えられる平均応力是对称となる。

2.2 粒子間の構成式

図-3に示す概念図を基に GEM で用いる粒子間接触点の構成式について概説する。接触力ベクトル $\mathbf{f}^C = (f_n^C, f_t^C)^T$ に対応する運動学的変数は相対変位

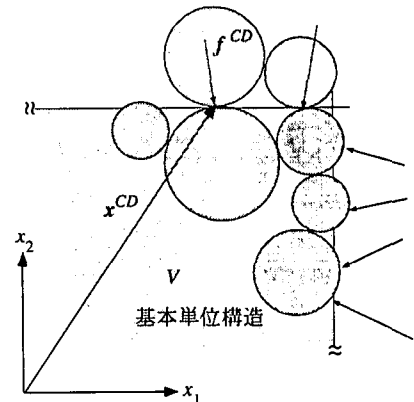


図-2 ダミー粒子が作用する接触力

ベクトル $u^C = (u_n^C, u_t^C)^T$ であり、これらは (n^C, t^C) を基底ベクトルとする接触点における局所座標系で定義される。ここに、 n^C は接触点における外向き単位法線ベクトル、 t^C は図-3(a)のように反時計回りを正とした単位接線ベクトルであり、 $t_1^C = -n_2^C$ 、 $t_2^C = n_1^C$ が成り立つ。一方、全体座標系で定義される粒子 a 重心の変位・回転ベクトルを回転量 ω^a とし

$$U^a = (U_1^a, U_2^a, r^a \omega^a)^T \quad (5)$$

と定義する。

相対変位増分ベクトル Δu^C と粒子 a , b の変位増分ベクトル ΔU^a , ΔU^b とは座標変換マトリックス T^C , T'^C を用いて次式により関係づけられる。

$$\Delta u^C = T^C \Delta U^a - T'^C \Delta U^b \quad (6)$$

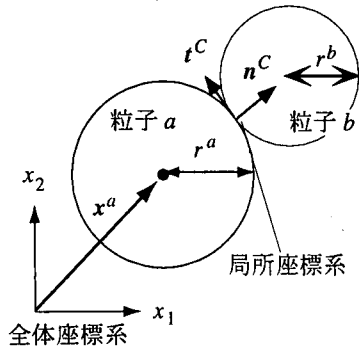
$$T^C = \begin{bmatrix} n_1^C & n_2^C & 0 \\ -n_2^C & n_1^C & 1 \end{bmatrix}, \quad T'^C = \begin{bmatrix} n_1^C & n_2^C & 0 \\ -n_2^C & n_1^C & -1 \end{bmatrix}$$

粒状体を構成している粒子の弾性的な性質を、粒子間接触点において法線および接線方向に仮想バネ要素を設けることにより考慮することとし、粒子自身は剛体であるとする。

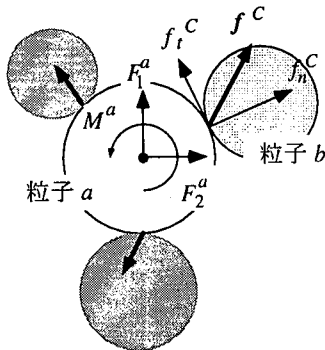
$$\Delta f^C = K \Delta u^C \quad (7)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} : \text{仮想バネ剛性マトリックス}$$

ここに、 k_n , k_t は接触点における法線および接線方



(a) 全体座標系と局所座標系



(b) 接触力、合力、モーメント

図-3 粒状要素法の概念

向のバネ定数である。

接触力の接線方向成分がMohr-Coulmbの摩擦則で表される条件

$$|f_t^C| \geq -f_n^C \tan \phi + c \quad (8)$$

を満たす場合には次式のように強制的にこの限界値に戻す修正を行う。

$$f_t^{C'} = \frac{f_t^C}{|f_t^C|} (-f_n^C \tan \phi + c) \quad (9)$$

ここに、 ϕ は粒子間摩擦角、 c は粒子間粘着力である。

粒子同士の接触条件は法線方向相対変位を用いて

$$u_n^C < 0 \quad (10)$$

と表される。接触条件を満たさない場合には接触力は法線方向、接線方向ともに強制的に0とおく。

以上のように、粒子自身は弾性体と想定しているが、粒子間接触点における接触・摩擦により粒子の運動が制約され、巨視的には非線形な材料応答として現れる。

2.3 つり合い式の誘導¹¹⁾

粒子 a の静的つり合い条件式は、

$$F^a = \sum_C T^{CT} f^C = 0 \quad (11)$$

と書くことができる。ここで、 F^a は粒子に作用する合力 F_1^a , F_2^a とモーメント M^a を並べたベクトル $F^a = (F_1^a, F_2^a, M^a / r^a)^T$ である (図-3)。

粒状体全体の静的つり合い条件式は、式(11)を全粒子について重ね合わせた次式により与えられる。

$$F = T f = 0 \quad (12)$$

ここに、 F は全粒子の重心に作用する力とモーメントを並べたベクトル、 T は各接触点の座標変換マトリックス T^C から構成される全体座標変換マトリックスである。全体座標変換マトリックス T は粒子の運動に伴い時々刻々変化し、つり合い式(12)は非線形方程式となる。

式(11)の個々の粒子のつり合い条件の増分形を線形構成式(7)、相対変位増分-変位増分関係式(6)を用いて書き直し次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_C T^{CT} \Delta f^C &= \sum_C T^{CT} K \Delta u^C \\ &= S^e \Delta U^a - \sum_C S^{e'} \Delta U^b = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$S^e = \sum_C T^{CT} K T^C, \quad S^{e'} = T^{CT} K T'^C$$

は要素剛性マトリックスである。

さらに、式(13)を全粒子について重ね合わせると解くべき増分形つり合い式は次式で表される。

$$S \Delta U = 0 \quad (14)$$

S は要素剛性マトリックスを全粒子について重ね合わせた全体剛性マトリックスであり、 ΔU は全粒子の変位・回転ベクトルを並べたベクトルである。

GEMにおいては、式(14)をある境界条件の下で解くことにより解析を行うが、ここでは周期境界条件(2)を考慮し、解くべき増分形つり合い式が次式のように導出される¹¹⁾。

$$\Delta H = S \Delta U \quad (15)$$

ここで、 ΔH は平均ひずみ増分 $\Delta \epsilon$ により隣接領域の粒子が基本単位構造内部粒子に作用する外力項と見なされる。

3. 応力プローブ試験シミュレーション

3.1 解析の概要

解析に用いた基本単位構造を図-4に示す。この基本単位構造はほぼ正方形領域内の200個の円形粒子で構成され、粒径0.3-0.6mmの粒子がランダムに配置されている。接触点の法線および接線方向のバネ定数はそれぞれ $k_n=5.0 \times 10^4 \text{ N/m}$ 、 $k_t=3.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ 、粒子間摩擦角 $\phi=25^\circ$ 、粒子間粘着力 $c=0$ とした。

各材料パラメータについては武らの解析^{7,9)}に倣って定めた。本研究の議論に関しては、ここで用いた粒子数や材料パラメータの値等の基本単位構造の設定によりその傾向がほとんど変化しないことが示されている^{11), 17)}。これらに関する考察の詳細は文献17)を参照されたい。

ここで行った解析の主応力空間上のせん断载荷経

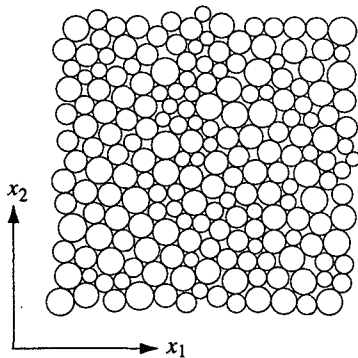


図-4 解析に用いた基本単位構造

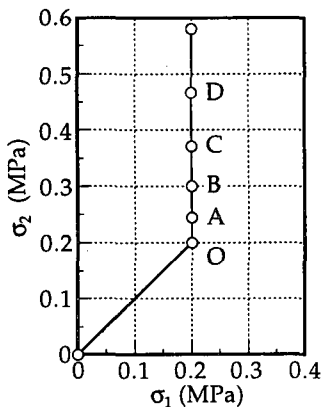


図-5 主応力空間上の载荷経路とプローブ試験点

路を図-5に示す。等方応力 $\sigma^0 = 0.2 \text{ MPa}$ の初期パッキングを生成した後、応力制御によるせん断载荷を行った。さらに、そこで得られたデータを基に図-5中に示した5点(O, A~D)において応力プローブ試験を行った。なお、ここでの解析においては、主応力軸は常に x_1 , x_2 軸に一致する。

図-6にせん断载荷シミュレーション結果を示す。図中の各パラメータは ϵ_1 , ϵ_2 を主ひずみ、 σ_1 , σ_2 を主応力として次式で表される。

$$\gamma_{\max} = |\epsilon_1 - \epsilon_2| \times 100 (\%)$$

$$\sigma_r = q/p$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad q = |\sigma_1 - \sigma_2|/2$$

$$\epsilon_v = -(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \times 100 (\%)$$

側圧一定2軸圧縮経路で行ったシミュレーション結果はダイレイタンスが応力ピーク付近でも正(圧縮)であり、緩い砂の実験のような解析結果が得られている。

ここで用いたパッキングの他に数種類のパッキングで解析を行ったが、周期境界制御GEMにおいて側圧一定2軸圧縮経路のせん断シミュレーションで応力のピーク付近のダイレイタンスが膨張側になるような密な砂とみなせる解析結果は得られていない。従来の粒状要素法においては正のダイレイタンスが生じる解析結果^{16), 18)}も存在することから、境界制御によるものと考えられる。また、2次元解析であることや初期パッキング生成過程の違いによる影響とも考えられ、明確な結論には至っていない。初期状態の密度や粒度分布などとも関連させて今後明らかにするべき解析手法上の課題である。

図-5中に示したプローブ試験点は応力比0.1, 0.2, 0.3, 0.4のように応力比 σ_r を基準として選定している。図-6からわかるように試験点Oは初期等方応力状態、A, Bはほぼ弾性的な挙動を示す試験点、C, Dは塑性的な挙動を示しているが応力ピークよりは手前の安定した硬化段階の試験点である。

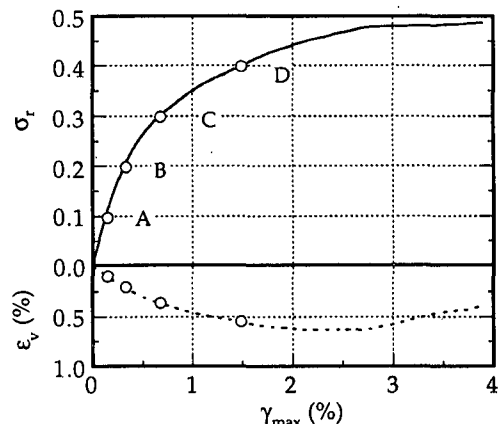


図-6 载荷曲線

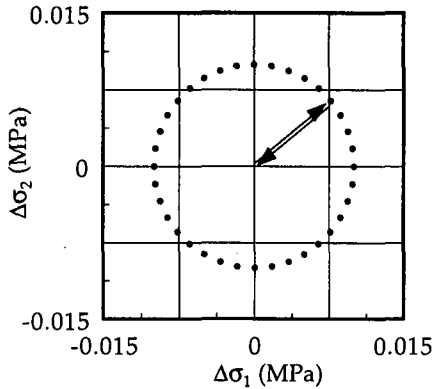


図-7 応力プローブ方向の主応力増分空間表示

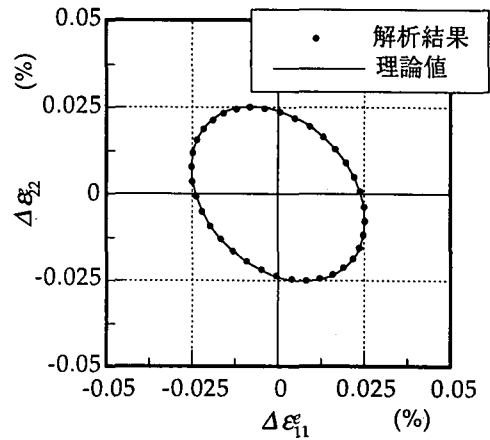
5つのプローブ試験点において図-7の主応力増分空間上に示す 10° 毎合計36方向について応力増分の大きさ $\sqrt{\Delta\sigma_{ij}\Delta\sigma_{ij}} = 0.01(\text{MPa})$ として载荷・除荷を行い、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分を算出する。まず、载荷経路として $\Delta\sigma$ を基本単位構造に作用させ、応答として得られる平均ひずみ増分を $\Delta\epsilon'$ とする。次に、除荷経路として $-\Delta\sigma$ を作用させ、このとき得られるひずみ増分を $\Delta\epsilon''$ とすれば、 $-\Delta\epsilon''$ が弾性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^e$ と見なされる。さらに、塑性ひずみ増分を $\Delta\epsilon^p = \Delta\epsilon' - \Delta\epsilon^e$ として算出する。

3.2 弾性増分応答

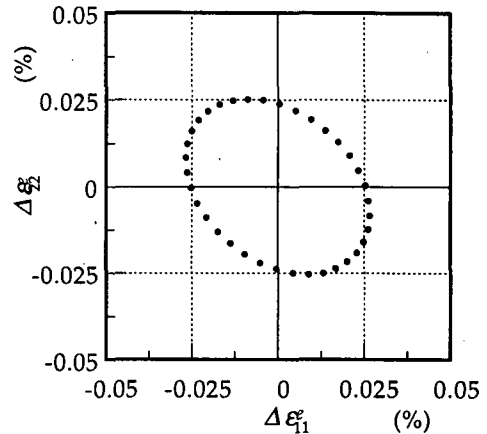
図-8に試験点O, B, Dの弾性ひずみ増分を示す。同図(a)には初期状態のプローブ試験結果を黒丸で、あるプローブ方向の応力増分と弾性ひずみ増分より求めたヤング率40MPa, ポアソン比0.157の等方弾性体の弾性ひずみ増分を実線で示した。同図より、初期状態の弾性ひずみ増分は等方弾性体の構成式で精度良く近似できることがわかる。

载荷が進むと弾性ひずみ増分が示す楕円が徐々に傾き誘導異方性が観察される。試験点Bのような塑性変形がそれほど大きくない試験点においては楕円は初期状態と比べて大きくは変化しないが、応力比0.4の試験点Dにおいては楕円の長軸方向は1軸方向により近づき、楕円の形状も大きく崩れて初期状態に比べて大きくなる。これは、ユニットセル内部の微視構造が異方的に変化するためであると考えられる。

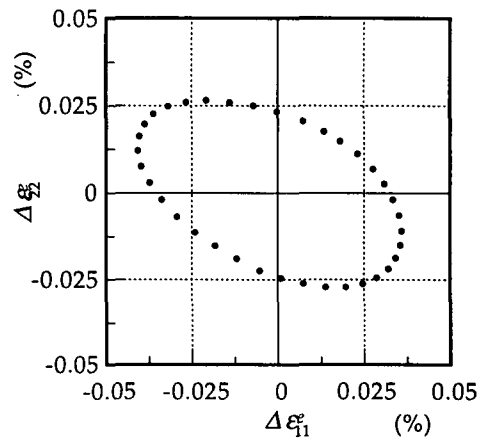
このような弾性応答を連続体構成則で表そうとすれば、損傷理論のように微視的内部構造の劣化に伴い弾性マトリックスが変化するようなモデルが考えられる。図-8で示される結果は、微視的内部構造の劣化を損傷パラメータ等を用いて表す場合には誘導異方性を扱えるテンソル量として表す必要があることを示唆していて、ファブリックテンソル¹⁹⁾などと合理的に関連づけられることが理想的である。



(a) 試験点O (初期状態)



(b) 試験点B (応力比0.2)



(c) 試験点D (応力比0.4)

図-8 弾性ひずみ増分応答

3.3 塑性増分応答

次に、試験点Cに着目して応力プローブ試験の結果得られた塑性ひずみ増分の考察を行う。図-9は試験点Cにおける各応力プローブ方向の塑性ひずみ増分応答の絶対値 $|\Delta\epsilon^p| = \sqrt{\Delta\epsilon_{ij}^p \Delta\epsilon_{ij}^p}$ を極座標表示した主応力空間上にプロットしたものである。同図の角度は主応力空間におけるプローブ方向の σ_1 軸 (x_1

軸)からの角度を表す。古典的な流動則に従うとすれば、降伏面の内側に向かう载荷においては塑性ひずみ増分は0であるので原点上にプロットされる。また、外側に向かう载荷においては、塑性ひずみ増分が降伏面の法線方向テンソル n と応力増分テンソルの内積に比例して大きくなるので、同図においては完全に円形にプロットされ、その载荷状態での降伏面の接線は塑性ひずみ増分の絶対値を表す円の接線となる。図-9より、ここで行った解析の結果得られた塑性ひずみ増分の絶対値を連ねた線はほぼ円状となることがわかり、ほぼ古典的な流動則に従うことがわかる。さらに、その主応力空間上の接線が降伏面の接線であると推定される。同図にはこの降伏面の接線とその外向き法線を表す単位テンソル(応力空間上ではベクトル) n を示した。試験点Cにおいては n の方向は主応力空間上の σ_1 軸から反時計回りに約 153° である。

図-10は試験点Cの各応力プローブ方向の塑性ひずみ増分の塑性主ひずみ増分空間上のプロットを示す。同図に示されている角度は $\Delta\epsilon_1^p$ 軸からの角度を表す。ひずみ空間における各プローブ方向の塑性ひずみ増分は応力増分に依らずほぼ一定の方向 m を向いており、近似的に古典的塑性論における流動則の仮定が成立すると見なすことも不可能ではない。ここでの m は塑性主ひずみ空間上で約 135° である。なお、応力テンソルと塑性ひずみ増分テンソルの主軸の方向は若干異なるがその差は最大で約 2° 程度であるので流動則の検討に関して及ぼす影響はクリティカルなものではない。したがって、平均的な塑性ひずみ増分方向を表す単位テンソル m の主値を近似的に $m_1 = m_{11}$ 、 $m_2 = m_{22}$ として検討を行うが、この近似による誤差は1%以下である。

得られた降伏曲線の外向き法線方向 n と平均的な塑性ひずみ増分方向 m とを比較すると明らかに $m \neq n$ であり、流動則について少なくとも関連流動則が成立するとみなすことはできず、大局的には非関連流動則に従うと見なすべきである。ここで行った各応力プローブ試験点における n と m の方向を図-11に示す。どのプローブ試験点においても、 $m \neq n$ であり関連流動則に従うとはみなすことはできない。

しかしながら、非関連流動則を用いる場合図-9に示した斜線部分では $m_{ij}\Delta\sigma_{ij} < 0$ となり、Druckerの安定性の仮説²⁰⁾が満たされない。そこで、以下、試験点Cにおいて行った応力プローブ試験結果をさらに詳細に調べ安定条件に関して考察する。

3.4 安定条件

図-12はプローブ方向による塑性ひずみ増分方向の変化を示したものであるが、明らかに塑性ひずみ増分方向は一定値にはなっていない。ここで、平均

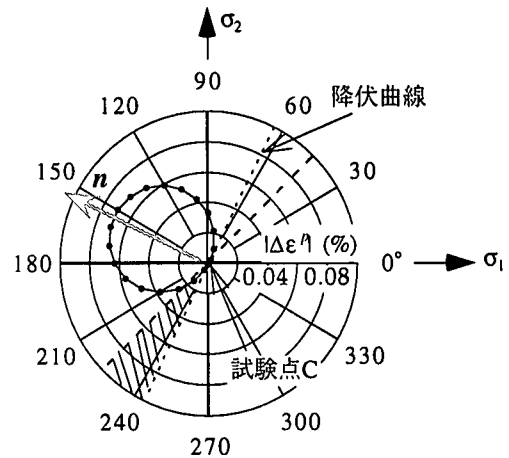


図-9 $|\Delta\epsilon^p|$ の主応力空間表示(試験点C)

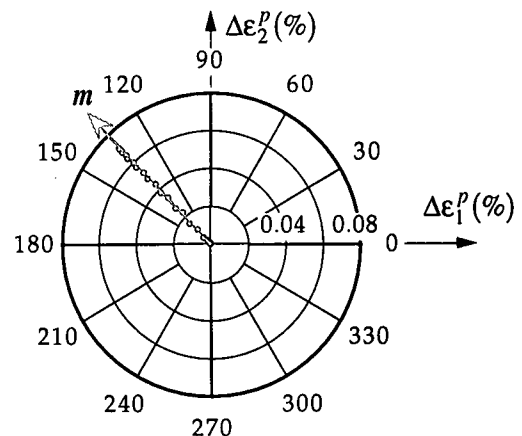


図-10 $\Delta\epsilon^p$ の塑性主ひずみ空間表示(試験点C)

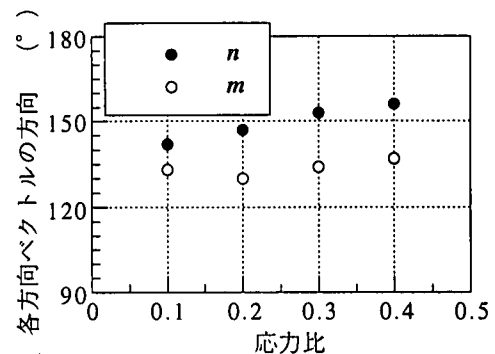


図-11 各プローブ試験点の m と n の方向

的な塑性ひずみ増分方向テンソル m と区別するために、各応力増分に対する実際の塑性ひずみ増分方向を表す単位テンソル m^* とする。同図は、古典的塑性論における「塑性ひずみ増分方向は応力増分方向に依らず一定である」といった仮定が粒状体に対しては完全には成り立たないことを示していて、 m^* について平均的方向 m からのズレ、いわゆる流動則の応力増分方向依存性が観察される。特に、塑性ひずみレベルの小さい方向に対して塑性ひずみ増分方向 m^* の平均値 m からのズレが大きく生じてい

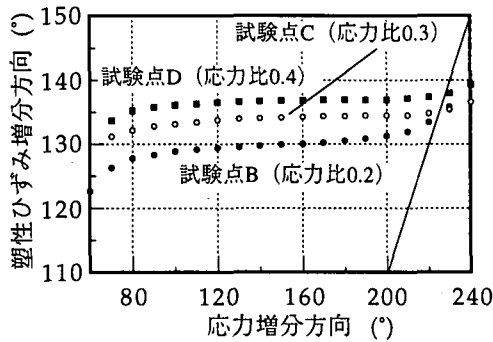


図-12 塑性ひずみ増分方向

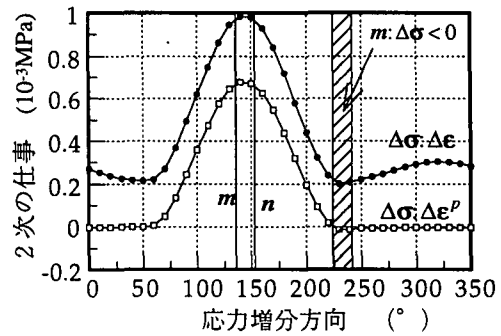


図-13 2次の仕事増分 (試験点C)

ることがわかる。また、平均的塑性ひずみ増分方向 m からのズレは载荷初期ほど大きく、载荷が進み応力比が大きくなるほど小さくなる傾向にあることが確認される。図中に2次の塑性仕事増分が正から負へ変わる限界線を示した。もし、塑性ひずみ増分方向 m^* が一定値 m で与えられるとすれば、この限界線より右側では2次の塑性仕事増分 $\Delta\sigma_{ij}\Delta\epsilon_{ij}^p$ が負になりDruckerの安定条件を満たさない。しかし、解析結果は塑性ひずみ増分方向 m^* は一定ではなく、平均値 m からのズレは2次の塑性仕事増分が正に近づく方向に生じ、その結果として2次の仕事増分は正になりHillの安定条件 $\Delta\sigma_{ij}\Delta\epsilon_{ij} > 0^{21), 22)}$ が満たされると考えられる。なお、ここで行った解析においてはどの応力プローブ方向に対しても安定した解が得られている。

試験点Cにおいて、実際にプローブ方向に対する塑性仕事増分と仕事増分を算定し図-13に示す。2次の塑性仕事増分は若干負になる部分もあるが、仕事増分は常に正であり、Hillの安定条件は常に満たされている。このように、塑性ひずみ増分方向 m^* の平均方向 m からのズレがHillの安定条件を満たすように生じることは、非常に注目すべきことである。以上の結果は、粒状体における塑性ひずみ増分と応力増分との構成関係が非関連かつ応力増分方向依存型の流動則を用いるべきことを示唆している。

4. 流動則の応力増分方向依存性

ここでは、塑性ひずみの応力増分方向依存性が生じる原因などについて微視的観点から詳細に考察し、それを表現しうる流動則について検討する。

4.1 塑性ひずみ増分の偏差成分と体積成分

まず、応力増分方向による塑性ひずみ増分の偏差成分と体積成分の変化について検討する。応力比 0.2, 0.3, 0.4の各試験点において得られた塑性ひずみ増分を偏差成分と体積成分に分解し、応力増分方向との関係を図-14に示す。偏差成分の大きさは降伏

面の単位法線方向 n を中心に常に左右対称となる。これは、どのような応力状態においても $n_{ij}\Delta\sigma_{ij}$ にほぼ比例することを示していて、偏差塑性ひずみ増分方向は応力増分方向に依存せずほぼ一定になる。これに対して体積塑性ひずみ増分は $n_{ij}\Delta\sigma_{ij}$ に比例しないことは明らかであり、特にプローブ試験点Cにおいてはその傾向が最も顕著である。

次に、体積塑性ひずみ増分と偏差塑性ひずみ増分の大きさの比の応力増分方向による変化を図-15に示す。同図は塑性ひずみ増分の偏差成分と体積成分の比が応力増分方向に依存して変化することを示している。载荷初期には、体積成分の割合が比較的大きく体積成分の応力増分方向依存性の影響を受けて成分比はその平均値から大きくずれる。塑性変形が進むとすべりによる偏差成分が卓越するためより一定値に近づく。このことは、塑性ひずみ増分方向を示した図-12と比較することで良く理解される。これらの図の比較より応力増分がより圧縮側（角度小）に与えられる場合には偏差成分に対する体積成分の大きさが大きくなり、塑性流動方向も圧縮側にずれることがわかる。応力増分が引張り側（角度大）に与えられる場合には体積成分の割合は小さくなり流動方向も引張り側にずれる。以上より、体積塑性ひずみ増分が $n_{ij}\Delta\sigma_{ij}$ に単純に比例せず、応力増分方向により変化するため、偏差・体積成分の比が変化し塑性流動方向の応力増分方向依存性として現れると考えることができる。

古典的な金属塑性論によれば、塑性ひずみ増分と応力増分との関係は

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = m_{ij} n_{kl} \Delta\sigma_{kl} / h \quad (16)$$

と書かれて、塑性ひずみ増分は応力増分の降伏面法線方向成分 $n_{ij}\Delta\sigma_{ij}$ のみにより生じる。粒状体の流動則が古典的塑性論の非関連流動則に従うとした場合、体積成分も偏差成分と同様に応力増分の降伏面法線方向成分 $n_{ij}\Delta\sigma_{ij}$ に比例することになる。また、各塑性ひずみ増分成分間の比は、応力増分方向によらず一定となる。しかしながら、図-14, 15の結果は粒状体の流動則が体積成分の応力増分方向依存性に

より古典的流動則では完全には表現し得ないことを示している。

本来、古典的塑性論は金属材料を対象として発展してきた連続体モデルであり、金属材料においては原子・分子レベルのすべりモードが塑性変形のマイクロメカニズムであるとされている。さらに、そのような塑性変形には塑性体積変化は伴わないと仮定され、一般には関連流動則が用いられる。一方、砂などの粒状体は粒子間のすべりによるせん断変形に伴いダイレイタンスが生じることが知られている。ここでの解析結果に依れば、粒状体においても塑性ひずみ増分の偏差成分として現れるような粒子間のすべりに直接的に起因する塑性変形に関しては、塑性流動方向が応力増分方向に依存せずほぼ一定となり流動則が成立する。しかしながら、せん断に伴う体積変化は、応力増分方向に大きく依存するため、塑性体積変化を重視しなくても良い金属材料を対象としてきた古典的塑性論では粒状体の塑性挙動を精緻には表現し得ないと考えられる。

4.2 接線塑性ひずみの導入

ここで、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を表現するために、式(16)で表される応力増分の降伏面法線方向成分により生じる塑性ひずみ項に加え、降伏面接線方向成分による項 $\Delta \epsilon^p$ を導入する。

$$\Delta \epsilon_{ij}^p = \Delta \epsilon_{ij}^{pN} + \Delta \epsilon_{ij}^{pT} = m_{ij} n_{kl} \Delta \sigma_{kl} / h + \Delta \epsilon_{ij}^{pT} \quad (17)$$

ここで、 $\Delta \epsilon^{pT}$ を生じさせる応力増分の接線方向成分 $\Delta \sigma^T$ を次式のように定め、接線応力増分と呼ぶ。

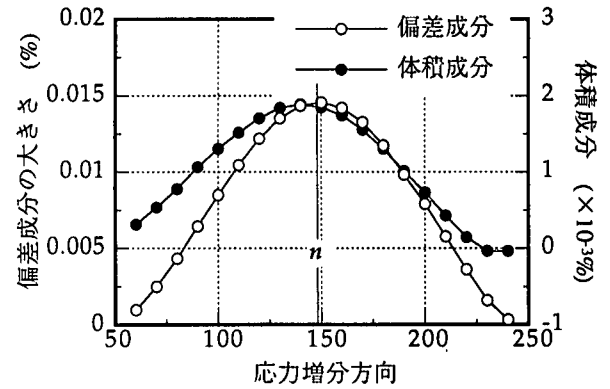
$$\Delta \sigma_{ij}^T = \Delta \sigma_{ij} - \Delta \sigma_{ij}^N = \Delta \sigma_{kl} t_{kl} t_{ij} \quad (18)$$

このような応力増分の分解の概念を図-17に示す。ここで、 t は応力増分の降伏面接線方向成分の方向を表す単位テンソルで2次元の場合には図-16に示したように2つしかないが、3次元問題においては降伏面接平面内の任意の単位テンソルとなる。また、 $\Delta \sigma^N$ は応力増分の降伏面法線方向成分であり、これを法線応力増分と呼び次式のように表す。

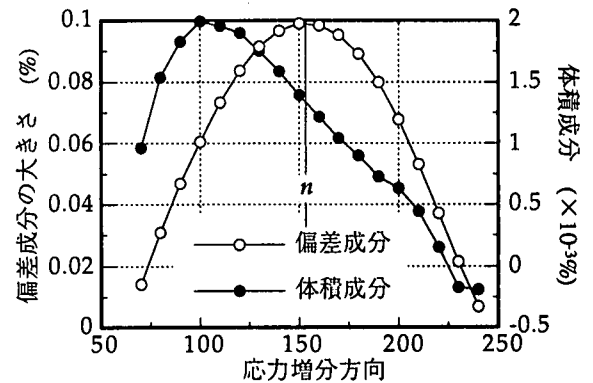
$$\Delta \sigma_{ij}^N = \Delta \sigma_{kl} n_{kl} n_{ij} \quad (19)$$

このような、接線塑性ひずみ増分概念はRudnickiとRice³⁾により提案された概念である。RudnickiとRiceはダイレイタンスを伴う地盤材料の変形局所化解析のために、 J_2 流動則を拡張し接線応力増分による接線ひずみ増分項を付加することを提案した。しかし、弾塑性構成則にいきなり付加したため適用範囲が比例負荷近傍に限定される。橋口⁴⁾は接線ひずみ増分を下負荷面モデルに取り入れて、ひずみ増分の連続性条件を満たす等、RudnickiとRiceの欠点を補う合理的な構成則を定めている。

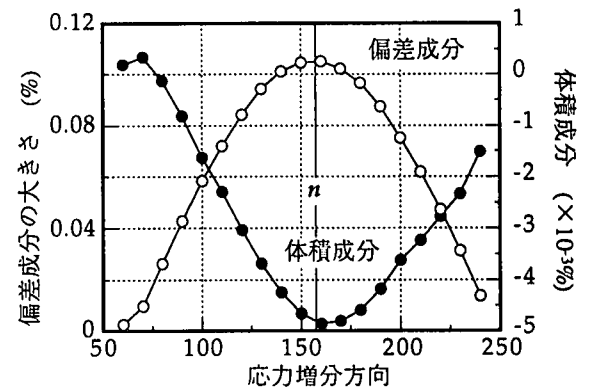
接線応力増分による塑性ひずみ増分は2つの塑性ひずみ成分の比の一定値からのずれを生じさせるものであると考えることができる。塑性ひずみ増分の



(a) 試験点B (応力比0.2)



(b) 試験点C (応力比0.3)



(c) 試験点D (応力比0.4)

図-14 塑性ひずみ増分の偏差成分と体積成分

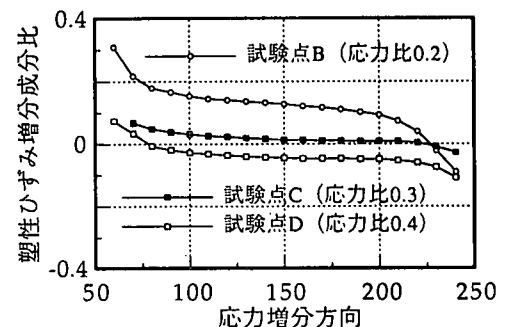


図-15 塑性ひずみ増分の偏差成分と体積成分の比

偏差成分は法線応力増分に比例的であるので、 $\Delta \epsilon^{PT}$ は主に体積成分、つまりダイレイタンス現象に影響を与える。粒状体の微視構造は非均質性が強く応力増分の法線成分のみにより非可逆性の微視構造変化が生じると考えるよりも、接線成分を含めた全応力増分により生じるとすることは物理的にも自然な考え方であるように思われる。

上述の応力プローブ試験結果より、接線塑性ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ij}^T$ は接線応力増分方向に生じるので次式のように表しておく。

$$\Delta \epsilon_{ij}^T = \beta \Delta \sigma_{ij}^T = \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - n_{ij} n_{kl}) \Delta \sigma_{kl} \quad (\beta \geq 0) \quad (20)$$

古典的な金属塑性論においては、流動則は関連・非関連を問わず流動則は塑性ポテンシャル面に垂直で応力増分方向に依存しないという仮定を設けている。しかし、前述したように粒状要素解析においては流動方向の応力増分方向依存性が観察される。変形局所化による塑性不安定現象などの解析や地盤材料などの塑性変形が圧力に依存する材料の塑性体積変化をより精緻に表現する場合には、流動則の応力増分方向依存性の取り扱いが不可欠である。以下、式(17)のような接線塑性ひずみ増分項を付加した流動則を拡張流動則と呼ぶ。

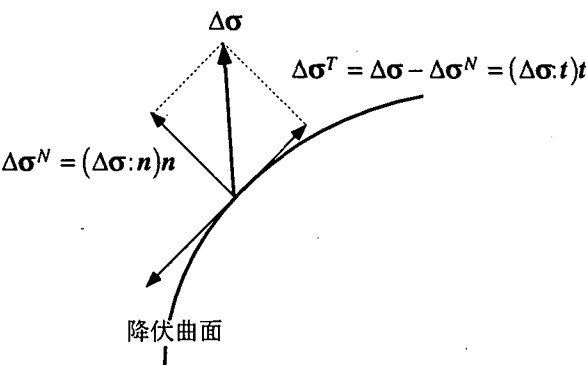


図-16 接線応力増分概念

4.3 散逸エネルギーと変形の分解の概念

粒状体の微視的なエネルギー散逸機構は、粒子間の摩擦によるものが主体的であるが、すべりを伴う非可逆的な構造変化により初期の応力状態まで除荷した際に回復しない粒子間の弾性エネルギーの存在が指摘されている²⁷⁾。このことは6個の球粒子を用いた単純な3次元粒状体モデルの計算²³⁾においても指摘されていて、このようなエネルギーが粒状体の硬化に大きく関わっていることが示されている。これは、すべりに伴って粒状体内部の粒子構造変化が非可逆性であるために局所的な接触力が粒子間に残留することにより生じるためと考えることができる。このような非可逆性の構造変化に起因して残留

した接触力によるエネルギーは従来粒状体力学で考慮されていないエネルギー量であり、以下これを残留エネルギーと称することとする。粒状体のせん断変形に伴う散逸エネルギーは粒子間のすべりによる摩擦エネルギーのみではなく、非可逆性の構造変化に起因する残留エネルギーも含まれる。ここではまず、すべり摩擦と微視構造変化といった二つの異なる散逸機構により生じるエネルギー量に着目し、微視的現象と巨視的に現れる流動則の応力増分方向依存性との関係について考察する。

図-17に各プローブ方向に対する残留エネルギー増分と摩擦エネルギー増分との比を示す。同図は単位の摩擦エネルギー増分に対する残留エネルギー増分が応力増分方向に依存して変化することを表している。同図と図-15を比較すると巨視的に現れる塑性ひずみ増分比の応力増分方向依存性が粒子間接触点の2つの非可逆性のエネルギー増分の比と密接に関連していることがわかる。応力増分方向がより圧縮側である場合には、単位の摩擦エネルギーに対して非可逆性微視構造変化が大きい。そして、巨視的にはより大きな体積変化として現れる。応力増分方向がより引張り側に与えられると摩擦エネルギーが卓越し、巨視的に塑性体積ひずみ成分が小さく現れる。また、応力比0.2の場合には0.3の場合と比較して散逸エネルギー増分比の平均からのずれが大きく、この場合には流動方向の平均値からのずれもより大きく現れている。したがって、応力増分方向に依存して摩擦によるエネルギー散逸とそれに伴う微視構造変化によるエネルギー散逸の大きさの割合が変化することで、塑性ひずみ流動則の応力増分方向依存性がもたらされることが考えられる。

以上の塑性ひずみと散逸エネルギーに関する考察を基に粒状体の塑性変形を分解し、エネルギー、応力増分成分の関係をまとめて図-18に示す。まず、粒状体においてエネルギー散逸をもたらす微視的現象は粒子間のすべりとそれに伴う非可逆性の微視構造変化であり、エネルギー的にはすべり摩擦は摩擦エネルギー、非可逆性微視構造変化は残留エネルギーとして現れる。また、粒子間のすべりは法線応

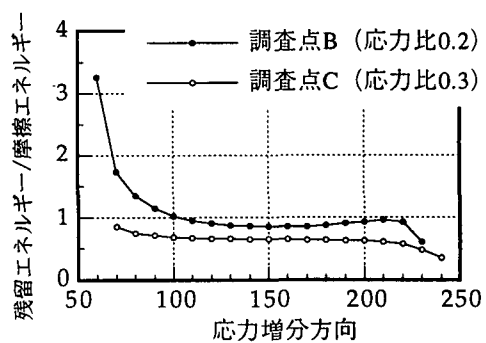


図-17 残留エネルギーと摩擦エネルギーの比

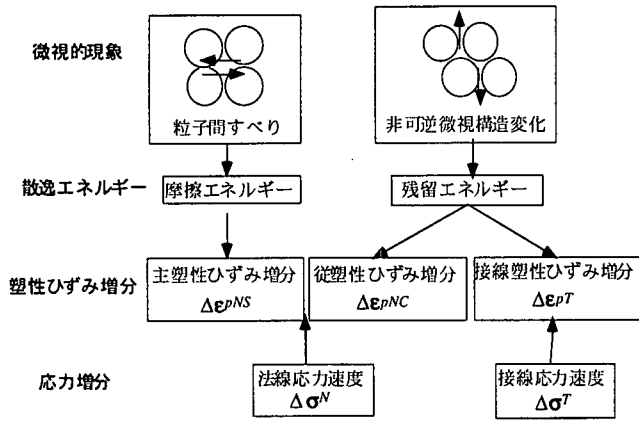


図-18 変形の分解の概念

力増分のみにより発生し、微視構造変化は全応力増分により発生すると考える。すべり摩擦により直接的に生じるひずみ成分を主塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^{pNS}$ とすれば、 $\Delta\epsilon^{pNS}$ は法線応力増分のみと関係づけられる。残留エネルギーにより生じる塑性ひずみ成分は法線応力増分による従塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^{pNC}$ と接線応力増分による接線塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^{pT}$ とに分解して考える。 $\Delta\epsilon^{pNC}$ はすべりに拘束を与え、主塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^{pNS}$ に拘束を与えると考えることができる。金属材料がほぼ関連流動則に従うのに対して粒状体において非関連になるのは、この拘束によるものと考えられる。接線応力増分により生じる部分 $\Delta\epsilon^{pT}$ は主塑性ひずみ増分に従属して生じるがそれに拘束を与えない。粒状体の構成則を合理的に定めるためには、このような変形の分解を念頭におく必要があるが、ここでは、拡張流動則を用いて接線塑性ひずみ増分を付加した影響について検証する。

4.4 拡張流動則の検証

拡張流動則は式(17)と(20)をまとめて次式のように書かれる。

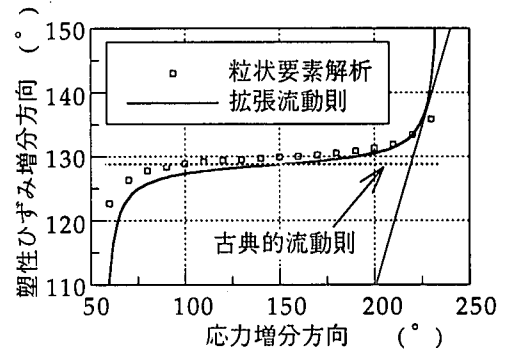
$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{h} m_{ij} n_{kl} \Delta\sigma_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - n_{ij} n_{kl}) \Delta\sigma_{kl} \quad (21)$$

β はここでは簡単のためスカラー係数とするが、粒状要素解析の結果を考慮し接線塑性ひずみ速度 $\Delta\epsilon^{pT}$ がDruckerの安定条件を満足する方向に生じると考えて、Druckerの安定条件を満たし接線塑性ひずみ増分項の寄与率が最小 (β が最小) になるような β を用いて拡張流動則を検証する。この β は、

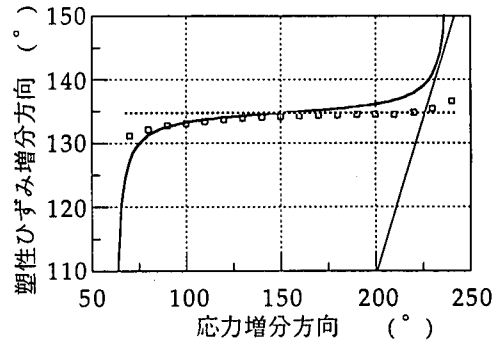
$$\beta = \frac{1 - (m_{kl} n_{kl})^2}{4 m_{kl} n_{kl} h} \quad (22)$$

で与えられる¹⁷⁾。プローブ試験点B、Cにおいて応力プローブ試験を行い、塑性ひずみ増分応答を粒状要素解析と比較する。試験点B、Cの応力比はそれぞれ0.2、0.3である。

図-19は各応力プローブ方向に対する主塑性ひず



(a) プローブ試験点B



(b) プローブ試験点C

図-19 変形の分解の概念

み増分空間における塑性ひずみ増分方向を示したものである。Druckerの安定条件を満たす限界線を斜線で示し、これより右側では安定条件を満たさない。また、同時に古典的流動則の塑性ひずみ増分方向を破線で示す。塑性ひずみ増分方向は主塑性ひずみ増分空間の1軸方向から反時計回りの角度で示した。図-19より拡張流動則を用いることで応力増分方向により流動方向が変化する接線塑性ひずみの影響が顕著に現れていて、接線塑性ひずみの効果により応力増分方向に依存した流動方向の変化を良くシミュレートできている。さらに、常にDruckerの安定条件を満たしていることがわかるが、これを満たす条件のみによって設定した係数 β により、実際の粒状要素解析の結果に比べて極端な流動方向のずれが生じる。粒状要素解析の結果によれば、比較的载荷初期において塑性ひずみ増分方向の平均方向からのずれが顕著に現れていて、応力のピークに近づくほどそのずれが小さくなることが観察される。このため载荷が進むほど不安定なプローブ方向が増加すると考えることができるが、ここで用いた拡張流動則においては常にDruckerの条件を満たすように接線塑性ひずみが生じると仮定しているので、履歴に依存して接線塑性ひずみ項の影響が変化することはない。粒状要素解析結果とより適合する流動則を定めるためには、係数 β の設定に関する履歴に依存した修正が必要であるように思われる。

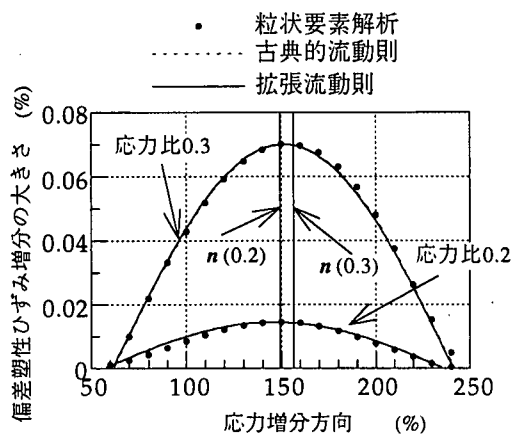


図-20 塑性ひずみ増分の偏差成分の検証

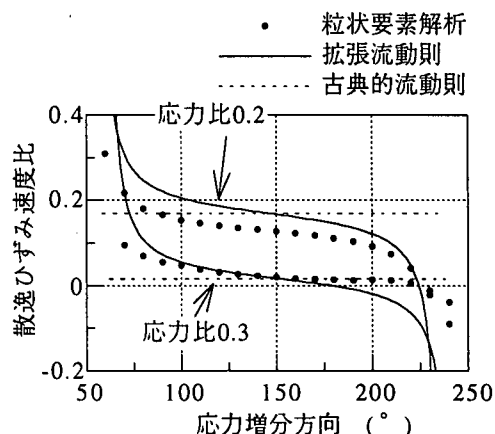
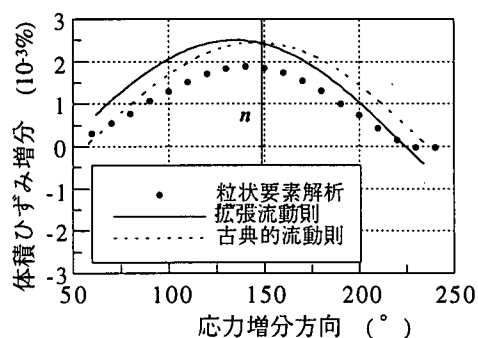
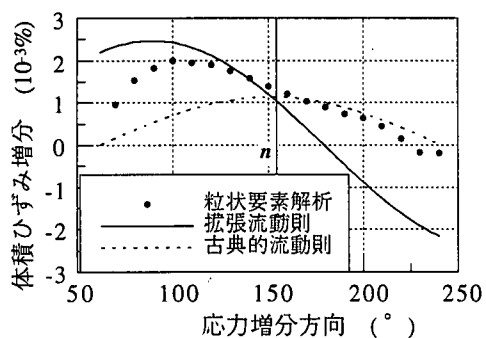


図-22 塑性ひずみ増分の成分の比の検証



(a) プローブ試験点B



(b) プローブ試験点C

図-21 塑性ひずみ増分の体積成分の検証

次に、接線塑性ひずみ増分項を付加したことによる塑性ひずみ増分の各成分の応答の差異について考察する。粒状要素解析の結果と拡張流動則による計算結果を偏差塑性ひずみ増分、体積塑性ひずみ増分に関して比較する。比較のため古典的流動則の計算結果も同時に示す。

図-20は偏差塑性ひずみ増分について比較した図であるが、塑性ひずみ増分の偏差成分には接線塑性ひずみ増分の影響はほとんど表れず、粒状要素解析の結果とほぼ等しい応答を与え、それは法線応力増分に比例する。古典的流動則もほぼ等しい計算結果である。体積塑性ひずみ増分の比較を図-21に示すが、古典的流動則の体積成分が偏差成分と同様に法

線応力増分に比例するのに対して、拡張流動則の場合には粒状要素解析結果と合致した結果となる。応力比が増加するのに従い接線応力増分の影響が大きくなり、体積塑性ひずみ増分の極大点が降伏面法線方向からずれていくような結果も接線応力増分により生じる接線塑性ひずみ項を付加することで表現される。ただし、ここで設定した係数 β においては流動方向のずれと同様にその傾向を極端に表現することになる。

図-22に塑性ひずみ増分の体積成分と偏差成分の比を応力増分方向により比較した。接線塑性ひずみ項を考慮することで応力増分により塑性ひずみ増分比が変化する応答を再現可能となる。法線応力増分のみを考慮した古典的流動則においてはこのような塑性ひずみ増分比の応力増分方向依存性は表現できず、特に体積塑性ひずみに与える影響が強いためダイレイタンスに関する精密な結果を必要とする場合には接線塑性ひずみ項を付加することが有効な方法であると考えられる。

以上より、塑性ひずみを通常の法線応力増分により生じる摩擦則に基づく塑性ひずみに加えて、残留エネルギーの一部を想定した接線塑性ひずみを考慮することにより、粒状体の応力増分方向依存型の流動則を良く表現することができる。さらに、応力増分方向依存型流動則を用いることにより粒状要素解析により得られる流動方向をより精密に表現可能であることが示された。したがって、ここで示した拡張流動則は、その傾向を過大に表現してしまうとはいえ、非古典的流動則の一つの基準の形式となり得るといえる。ただし、係数 β の合理的な決定方法や物理的意味づけが課題として残される。

5. おわりに

本研究においては、周期境界制御GEMを用いて応力プローブ試験シミュレーションを行い、従来の

境界粒子を配したGEMによる一連の解析結果を再確認すると共に、粒状体の流動則の応力増分方向依存性について詳細に考察した。

特に、塑性ひずみ増分の体積成分が応力増分方向に強く依存するため、流動則の応力増分方向依存性が現れることがわかった。さらに、それは微視的内部構造変化に起因して生じることなどを考察し、塑性変形を合理的に分解し、各成分を微視的なエネルギー散逸機構と結びつけることができた。

また、流動則の応力増分方向依存性を表現するために接線応力増分により生じる接線散逸ひずみ増分項を付加した拡張流動則を導入し、粒状要素解析と古典的流動則との比較を通して、応力増分方向依存性を表現する上で非常に有効であることを示した。

本研究で行った解析は、弾性円形粒子を用いた理想的な粒状体モデルによるものであるが、粒状体の接触・摩擦といった離散性・非均質性から生じる性質を十分反映している。砂などの実際の材料の変形は粒子破碎などを含むより複雑なものであるが、ここで得られた粒状体の巨視的な構成モデルに関する種々の知見は、粒子性といった粒状体最大の特徴を反映したものであると考えられる。

参考文献

- 1) Wu, W. and Niemunis, A.: Beyond Failure in Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, pp. 153-174, 1997.
- 2) Herle, I. and Gudehus, G.: Determination of Parameters of a Hypoplastic Constitutive Model from Properties of Grain Assemblies, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 4, pp. 461-486, 1999.
- 3) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 4) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol. 9, pp. 525-549, 1993.
- 5) Anandarajah, A., Sobhan, K. and Kuganethira, N.: Incremental Stress-Strain Behavior of Granular Soil, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 121, pp. 57-67, 1995.
- 6) Royis, P. and Doanh, T.: Theoretical Analysis of Strain Response Envelopes Using Incrementally Non-linear Constitutive Equations, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 22, pp. 97-132, 1998.
- 7) 武 建勲, 岸野佑次, 京谷孝史: 2次元モデルプローブ試験による弾塑性挙動の考察, 構造工学論文集, JSCE, Vol. 44A, pp. 399-408, 1998.
- 8) 武 建勲, 岸野佑次, 浅沼秀雄: マイクロメカニズムによる粒状体の流動則の考察, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 1, pp. 497-506, 1998.
- 9) 岸野佑次, 武 建勲: Hillの安定条件の粒状体への適用性について, 土木学会論文集, No. 631/III-48, pp. 83-95, 1999.
- 10) 金子賢治, 岸野佑次, 林 直宏, 京谷孝史: 粒状要素解析による地盤材料損傷モデルの定式化, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 2, pp. 427-438, 1999.
- 11) 金子賢治, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岸野佑次: 非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法の開発とその応用, 土木学会論文集, 2001, 6. (掲載予定)
- 12) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies, *Géotechnique*, Vol. 29, pp. 47-65, 1979.
- 13) Kuhn, M. R.: Structured Deformation in Granular Materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 407-429, 1999.
- 14) Jensen, R. P., Bosscher, P. J., Plesha, M. E. and Edil, T. B.: DEM Simulation of Granular Media-Structure Interface: Effects of Surface Roughness and Particle Shape, *Int. J. Numerical and Analytical Method of Geomechanics*, Vol. 23, pp. 531-547, 1999.
- 15) Lanier, J., Jean, M.: Experiments and Numerical Simulations with 2D Disks Assembly, *Powder Technology*, Vol. 109, pp. 206-221, 2000.
- 16) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No. 406/III-11, pp. 97-116, 1989.
- 17) 金子賢治: ミクロとマクロを結合した粒状体解析モデルの構成に関する研究, 東北大学博士学位論文, 2001.
- 18) 武 建勲: 粒状体の微視力学的研究, 東北大学博士論文, 1998.
- 19) 土質工学会: 粒状体の力学, 土質工学会, 1993.
- 20) Drucker, D. C. and Ming, L.: Triaxial Test Instability of A Nonassociated Flow-Rule Model, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 119, pp. 1188-1204, 1993.
- 21) Hill, R.: On Uniqueness and Stability in The Theory of Finite Elastic Strain, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 5, pp. 229-241, 1957.
- 22) Hill, R.: A General Theory of Uniqueness and Stability, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
- 23) 金子賢治, 岸野佑次, 京谷孝史: 微視力学に基づく粒状体の構成則の定式化, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 1, pp. 469-480, 1998.

(2001年4月20日 受付)