

体積変化を考慮したせん断帯生成理論

Prediction of Shear Band Formation with Volume Change

森川嘉之*, 飯塚 敦**, 太田秀樹***

Morikawa, Y., Iizuka, A. and Ohta, H.

*正会員, 工博, 港湾空港技術研究所, 地盤・構造部, 動土質研究室 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1)

**正会員, 工博, 神戸大学助教授, 工学部建設学科 (土木系) (〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1)

***フェロー, 工博, 東京工業大学教授, 大学院理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 1-12-1)

The failure of ground or specimens in the laboratory is caused by formation of the slip surface, which is recently regarded as thin layer called as shear band. The accurate prediction of the shear band formation is required because the bearing capacity of the ground is estimated from the shear stress on the shear band. The mathematical condition of formation of the shear band with no volume change has been derived. It is being found out, however, that volume change is localized in the shear band as well as shear deformation. In this paper, the condition for shear band formation with volume change under plane strain compression is derived. Then, this condition is applied to non-coaxial Cam-clay model and influence of non-coaxiality on the shear band formation is examined.

Key words: shear band, volume change, elasto-plastic constitutive equation, non-coaxiality

1. はじめに

土はすべり面を伴って破壊することが多い。土全体がヘドロのように強度を失うのではなく、ある部分が荷重を支えきれなくなり、土塊にずれが生じるのである。土の破壊の理論は、すべり面上に作用する応力から地盤や供試体の強度を求める理論である。したがって、すべり面上のせん断応力やすべり面の方向を正しく予測することが非常に重要となる。今日では、すべり“面”は実は、せん断帯と呼ばれるせん断変形の卓越した“層”であると言われている。すべり面でもせん断帯でも、非常に薄い領域を境に土塊の速度または変位が不連続となることに違いはない。本論文では、これ以降、すべり面ではなくせん断帯という語を用いる。

せん断帯はひずみ速度が不連続となる面（層）である。そこで本研究では、速度が不連続となる面の生成条件を用いてせん断帯の発生予測を行った。発生予測では、速度の不連続の発生条件に構成式を代入して応力表記とし、発生時の応力状態やせん断帯の傾きを求めた。構成式には Cam-clay モデル¹⁾、非共軸 Cam-clay モデル²⁾を用いて、非共軸性がせん断帯の発生に及ぼす影響を調べた。

また、近年の実験や解析から、せん断帯の発生、発達には土のダイレイタンス性が関係することが分かっている^{3),4),5)}。せん断帯は水を吸いながら発達する

らしいのである。これは、せん断帯がせん断変形だけでなく、体積変形の局所化でもあることを意味する。これまで、せん断帯の発生についての理論的な研究が行われており^{2),6),7)}せん断帯の発生条件はすでに求められている。しかし、これは完全非排水条件に基づく理論であった。そこで本論文では、平面ひずみ条件、完全排水条件下でせん断帯が発生した場合にせん断帯にどのような体積変化が生じるか調べた。ただし、本論文では微小変形場で発生するせん断帯を対象としている。なお、本論文では引張りを正とする（平均有効応力 p' のみ圧縮を正とする）。

2. 体積変化を考慮したせん断帯の生成理論

2.1 二つのせん断帯生成条件

(1) 速度の不連続の生成条件

本節では、速度の不連続の生成条件としてせん断帯の生成条件を求める。

平面ひずみ条件で、ある応力状態（ただし弾塑性状態）までせん断された要素に発生するせん断帯（図-1の灰色の部分）を考える。要素の現在の応力状態、変形は均一とする。座標軸は主応力方向にとる（ α_2 軸は平面ひずみ方向）。また、平面ひずみ条件を保ったまま、過剰間隙水圧が発達しないくらいゆっくり変形させるものとする。

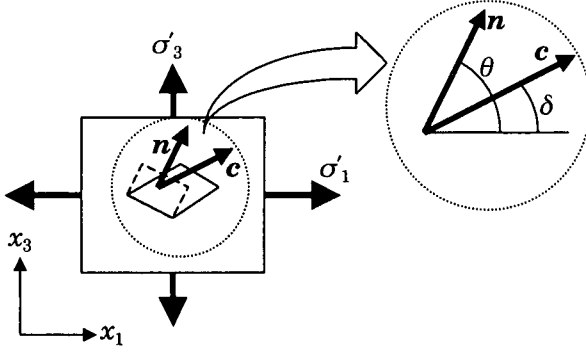


図-1 セン断帯(灰色の部分)

体積変化を伴うせん断帯の速度勾配 $\mathbf{L}$ は

$$\Delta \mathbf{L} = \|\mathbf{c}\| \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}, \quad (1)$$

と表される。 Δ はせん断帯内部と外部の差を意味する。つまり、せん断帯は周りの部分よりも $\Delta \mathbf{L}$ だけ変形が卓越する。また、 $\mathbf{n}$ はせん断帯の単位法線ベクトル、 $\mathbf{c}$ はせん断帯内部と外部の速度のギャップを表すベクトル、 $\mathbf{a}$ は $\mathbf{c}$ と同じ方向の単位ベクトルである。 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{n}$ のベクトルのなす角 $(\theta - \delta)$ はせん断帯の体積変化を表している。膨張する時 90° 未満、収縮する時は 90° より大きくなる。体積変化を生じない場合は 90° となる。完全非排水条件下のせん断帯やすべり面などを考える場合には、 $\mathbf{n}$ に直行する $\mathbf{a}$ を考えるが、ここでは体積変化を伴うせん断帯を考えているため、 $\mathbf{a}$ の方向は特に定めない。

せん断帯が発生するとき、せん断帯と外部の境界面上で釣り合いが保たれるためには、表面力速度 $\dot{\mathbf{t}}$ が連続でなければならない。また、完全排水条件を考えているから、全応力と有効応力は一致する。よって、次式(増分釣り合い式)が成り立つ。

$$\Delta \dot{\mathbf{t}} = \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

$\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力テンソルである。

次に構成式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3)$$

を考える。今、均一な応力状態を考えているから、係数テンソル $\mathbf{M}$ が応力のみ関数である場合、せん断帯の内外で $\mathbf{M}$ は同じ値となる。したがって、式(1)より、応力速度の不連続量は次のようになる。

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_{ij} = M_{ijkl} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl} = \|\mathbf{c}\| M_{ijkl} a_k n_l. \quad (4)$$

ただし、 $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij}$ を用いた。

せん断帯が発生すれば $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ となることを考慮すれば、増分釣り合い式(式(2))は式(4)を代入して、次のように書き換えられる。

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = M_{ijkl} n_j n_l \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (6)$$

である。 $\mathbf{e}_j$ と $\mathbf{e}_k$ は図-1の座標軸の(主応力方向の)基底ベクトルである。 $\mathbf{a}$ は単位ベクトルであるから、上式が成り立つためには

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (7)$$

でなければならない。上式は完全非排水条件下のせん断帯の発生条件と同じ式⁸⁾である。ただし、せん断帯生成の必要条件である。

(2) 瞬間せん断剛性 g を用いたせん断帯の生成条件

せん断帯の生成条件として式(7)とは別の条件も用いられている²⁾。この条件は

$$g = \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad (8)$$

と表される。 g は瞬間せん断剛性と呼ばれている。せん断帯が発生すれば $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ となるから、式(8)は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \mathbf{a} = 0. \quad (9)$$

上式は増分釣り合い式が強楕円条件⁹⁾を満足しなくなる、つまり、放物型か双曲型になることを意味している。

2.2 二つのせん断帯生成条件の関係

ここでは、二つのせん断帯の生成条件(式(7)、(8))がどのような関係にあるか調べる。最大主応力方向(図-1の x_1 軸方向)と $\mathbf{a}$ のなす角を δ とすると、式(9)は次のようになる。

$$A_{11} \tan^2 \delta + 2A_{13} \tan \delta + A_{33} = 0. \quad (10)$$

A_{11} と A_{13} 、 A_{33} は主応力方向に取った座標軸(図-1)に関する $\mathbf{A}$ の成分である。せん断帯が発生するためには、上式の δ が実数とならなければならない。式(10)の解は、

$$\tan \delta = \frac{-A_{13} \pm \sqrt{-\det A}}{A_{33}}, \quad (11)$$

となるから、式(10)のが実数となるための必要十分条件は、 $\det A \leq 0$ である。つまり、

$$g = 0 \Leftrightarrow \det A \leq 0, \quad (12)$$

である。上式を見ると、瞬間単純せん断剛性を用いたせん断帯の生成条件(式(8))の方が、式(7)の条件よりも緩い条件である。これは、式(8)(式(9))が $a \perp Aa$ ($Aa \neq 0$) の場合も含んでいるからである。図-2にせん断帯の生成条件式(7)、(8)の関係を示す。

3. せん断帯の発生予測

3.1 せん断帯の発生予測に用いた構成式

本論文では、均一な応力、変形状態からのせん断帯の発生を考えており、Cam-clay¹⁾モデルと非共軸 Cam-clay モデル²⁾を用いた。非共軸 Cam-clay モデルは Cam-clay モデルの塑性偏差ひずみ速度に非共軸項

$$\dot{\epsilon}_d^{p*} = \frac{3A}{2p'\beta} \left\{ \dot{s}_d - \frac{3(s_d \cdot \dot{s}_d)}{2q^2} s_d \right\}, \quad (13)$$

を付加したものである。 $\dot{\epsilon}_d^{p*}$ は塑性偏差ひずみ速度で*は新たに付加した項であることを示している。ただし、 s_d は偏差応力テンソル、 p' は平均有効応力、 $q^2 = 3s_{dij}s_{dij}/2$ である。 β は限界応力比 M と p' , q を用いて $\beta = M - q/p'$ と定義され、応力状態を表す。 A は非共軸性の大きさを表す正のパラメータである。式(13)の非共軸項は Rudnicki と Rice (1975)¹⁰⁾に倣ったもので、 s_d との内積が0になる。このため偏差塑性仕事率には無関係である。従って Cam-clay モデルの基本的仮定である消散エネルギーの仮説に抵触しない。また、非共軸項は偏差成分であるから塑性体積ひずみに無関係である。よって、体積ひずみが状態量であるという実験事実 (Henkel, 1960¹¹⁾)にも背かない。これより、Cam-clay モデルと同一の降伏関数を用いることができる。

非共軸 Cam-clay モデルの応力速度-ひずみ速度関係は、Cam-clay モデルの応力速度-ひずみ速度関係に式(13)の非共軸項を加えて整理すれば求められる。その際、以下のパラメータを定義する。

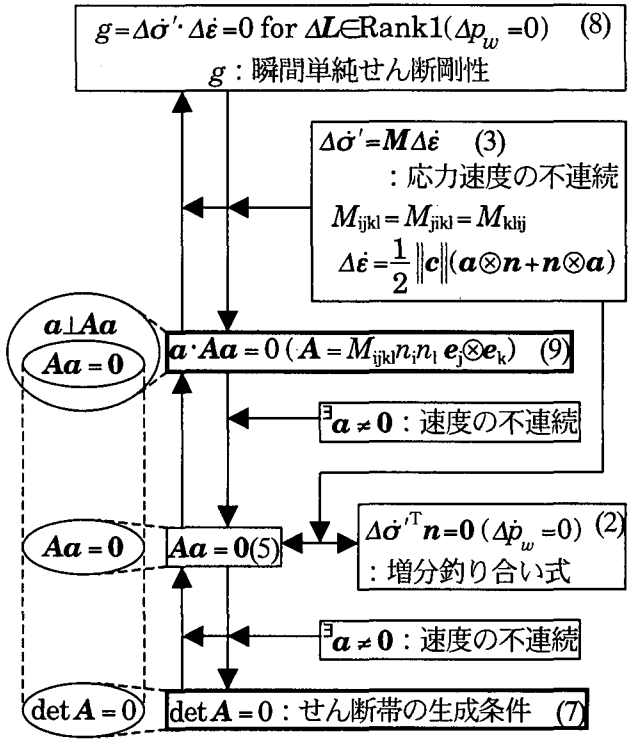


図-2 二つのせん断帯生成条件の関係

$$\tilde{G} = \frac{p'\beta}{3AG + p'\beta} G, \quad (14)$$

$$\tilde{K} = \frac{(D-A)p'}{(D-A)p' - DAK\beta} K, \quad (15)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{D}{D-A} \beta, \quad (16)$$

式(14)~(16)のパラメータを用いると、非共軸 Cam-clay モデルの応力速度-ひずみ速度関係は次のようになる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[\left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \tilde{G} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\left\{ \frac{3\tilde{G}}{q} s_{dij} - \tilde{\beta} \tilde{K} \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{3\tilde{G}}{q} s_{dkl} - \tilde{\beta} \tilde{K} \delta_{kl} \right\}}{3\tilde{G} + \tilde{\beta}^2 \tilde{K} + \frac{p'}{D} \tilde{\beta}} \right] \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (17)$$

上式から、非共軸 Cam-clay モデルの応力速度-ひずみ速度関係は、Cam-clay モデルと同じ形になることがわかる ($M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij}$ が成り立つ)。 D は柴田のダイレイタンス係数¹²⁾、 G , K はそれぞれせん断剛性、体積弾性係数である。 $A = 0$ のとき非共軸 Cam-clay モデルは Cam-clay モデルと一致する。また、 $\tilde{G}$ と $\tilde{K}$ はもはや弾性定数ではなく、弾塑性挙動時のパラメータである。ただし、降伏前および除荷時には G , K と

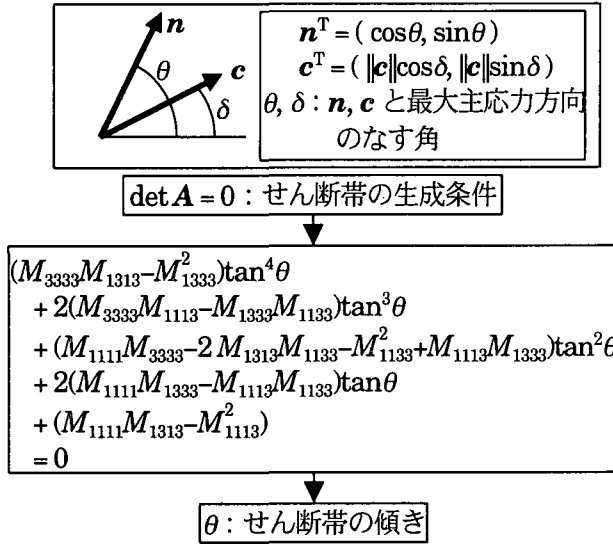


図-3 せん断帯の傾き

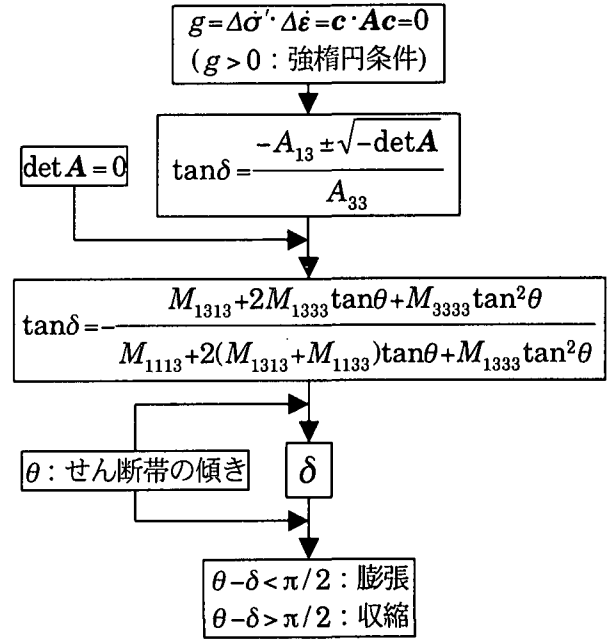


図-4 せん断帯発生に伴う体積変化

る。

Cam-clay モデルと非共軸 Cam-clay モデルとの具体的な違いは、主応力回転時の挙動にある。主応力を回転させると、Cam-clay モデルのせん断弾性係数は応力状態にかかわらず G である。極端に言えば限界状態まで 45° せん断した後、単純せん断してもせん断弾性係数に変化は現れない。これに対して、非共軸 Cam-clay モデルでは、主応力回転時の変形係数は $\tilde{G}$ となり、式(14)からも分かる通り、 $\tilde{G}$ は応力状態 $\beta (=M - q/p)$ に依存し、限界状態では変形係数 $\tilde{G}$ は 0 となる。

3.2 せん断帯の発生予測

ここでは、前節で説明した非共軸 Cam-clay モデルを用いてせん断帯の発生予測を行う。発生予測の手順は以下の通りである。まず、速度の不連続の生成条件式(7)を解く。 $\det A$ は θ と応力状態の関数であるから、 θ について式(7)を解けば、せん断帯の傾きが得られる(図-3)。この結果をもう一つのせん断帯の生成条件式(8) (式(9)) に代入して、 δ を得る(図-4)。そして、 $\theta - \delta$ を求めれば、 90° を閾値として、せん断帯時にそのせん断帯が外部よりも収縮するか膨張するかがわかる。ただし、 $\|c\|$ が求められないから、せん断帯内部の体積ひずみ速度の卓越量 ($\text{tr} \Delta L = c \cdot n$) は、ここでは求められない。

構成モデルの係数テンソル M は応力の関数であるから、応力状態によって解が変化する。解が応力状態によってどのように変化するかを示したのが図-5、6 である。横軸はすべて応力状態 β である。縦軸は図-5(a)~(d)が最大主応力方向からのせん断帯の傾き(θ)、図-6(a)~(d)が n と c のなす角($\theta - \delta$)で、せん断帯生成に伴う体積変化を表す。また、図-5、6(a)は $A = 0$ (Cam-clay モデル) の場合、(b)は $A = 0.01$ 、(c)は $A = 0.05$ 、(d)は $A = 0.1$ の場合である。また、非共軸

Cam-clay モデルでは β の値によって、 $\tilde{G} < 0$ 、 $\tilde{K} < 0$ となってしまう場合がある(付録参照)。図-5、6(b)、(c)、(d)において、解が一部点線になっているのは、 $\tilde{G} < 0$ となる範囲の解である。解は β が正の部分には存在しておらず、限界状態よりも下の応力状態ではせん断帯は発生しないことを表している。図-6 を見るとほとんどの解が 0° から 90° の間に存在している。これより、せん断帯は膨張する傾向にあることが分かる。また、 90° から 180° の間にも解が存在する。これらの解は、せん断帯発生時に収縮することを意味している。実際には間隙水を吐き出した部分は締って強くなるであろうから、この解の示すせん断帯は弱面として発達しないと考えられる。

また、速度の不連続の生成条件式(7)は、

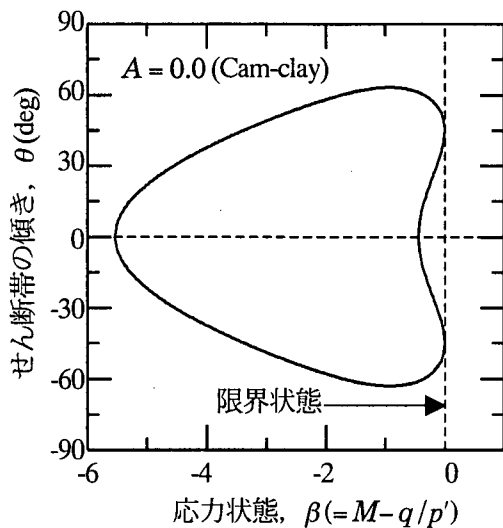
$$X = \frac{2\sqrt{3}\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{3\tilde{G} + \tilde{\beta}^2\tilde{K} + \frac{p'}{D}\tilde{\beta}} \left(= \frac{M_{1111} - M_{3333}}{2} \right), \quad (18)$$

$$Y = \left(\tilde{K} + \frac{4}{3}\tilde{G} \right) - \frac{3\tilde{G}^2 + \tilde{K}^2\tilde{\beta}^2}{3\tilde{G} + \tilde{\beta}^2\tilde{K} + \frac{p'}{D}\tilde{\beta}} \left(= \frac{M_{1111} + M_{3333}}{2} \right), \quad (19)$$

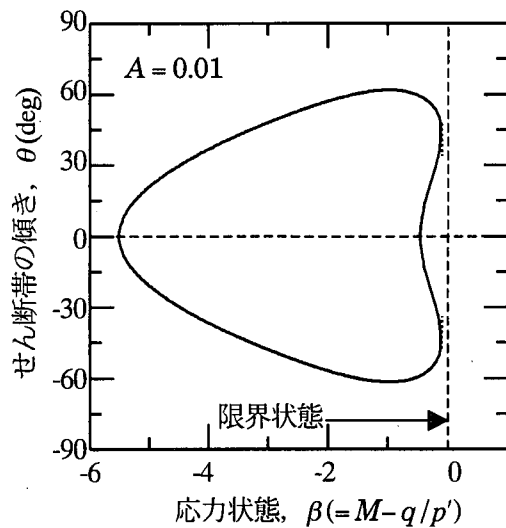
$$Z = \frac{2\tilde{G}(3\tilde{K} + \tilde{G})}{3\tilde{G} + \tilde{\beta}^2\tilde{K} + \frac{p'}{D}\tilde{\beta}}. \quad (20)$$

なるパラメータを定義すると次のようになる。

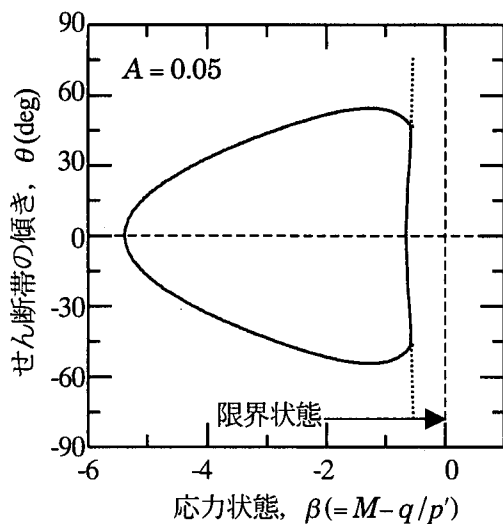
$$(X - Y)\tan^4\theta + 2(Y - Z)\tan^2\theta + (Y + X) = 0 \quad (21)$$



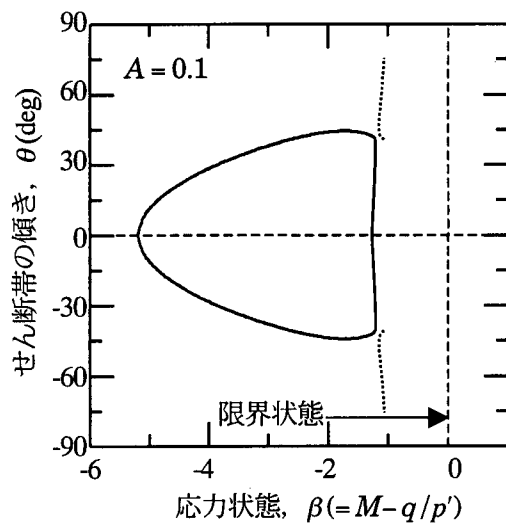
(a) $A = 0.0$ (Cam-clay モデル)



(b) $A = 0.01$



(c) ($A = 0.05$)



(d) ($A = 0.1$)

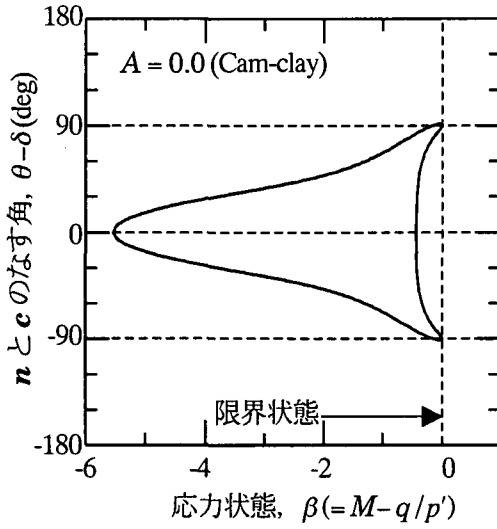
図-5 せん断帯の傾き

となる。上式から解の数が4, 2, 0の3通りであることがわかる。これは、共役なせん断帯がそれぞれ2組, 1組, 0組, 発生することを意味している。解の数は支配方程式(増分釣り合い式)の特性を示しており, それぞれ, 双曲型(解が4つ), 放物型(2つ), 楕円型(0)と呼ばれる。応力変化に対して支配方程式の数がどのように変化するかを示したのが図-7である。非共軸パラメータがある値を超えると, 支配方程式の特性変化曲線が大きく変化することがわかる。

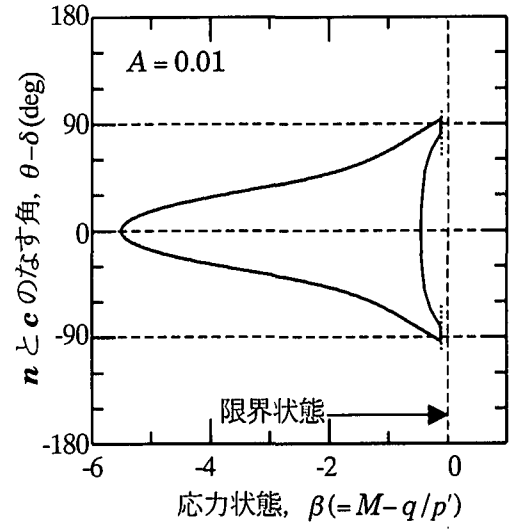
4. おわりに

本研究では, 体積変化を伴うせん断帯を考え, まず

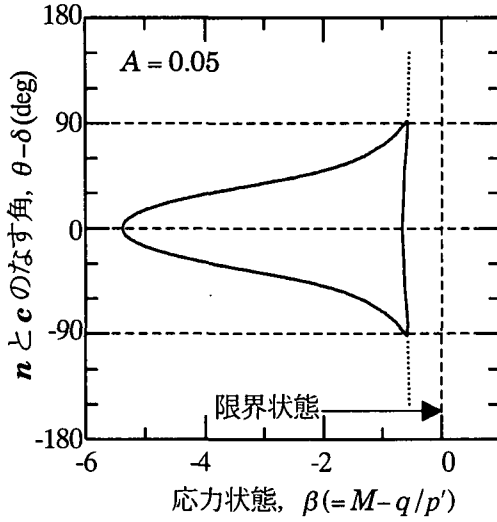
速度の不連続面の生成条件を求めた。その結果, 瞬間単純せん断剛性を用いたせん断帯の生成条件の方が速度の不連続の生成条件よりもゆるい条件であることが分かった。そして, Cam-clay モデルと非共軸 Cam-clay モデルを用いて体積変化を伴うせん断帯の発生を予測した。その結果, 限界状態より上の応力状態(ただし弾塑性状態)で体積膨張を伴うせん断帯が発生する結果となった。また, 応力状態によって, 支配方程式がどのように変化するかを調べた。その際, 非共軸パラメータを変化させたところ, 非共軸パラメータがある値となったところで, 支配方程式の特性変化曲線が大きく変化することがわかった。



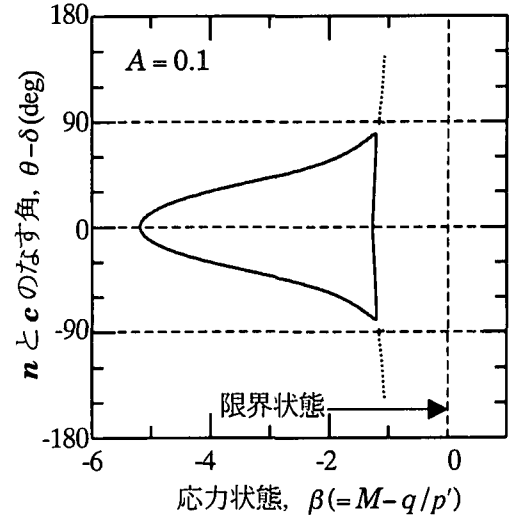
(a) $A = 0.0$ (Cam-clay モデル)



(b) $A = 0.01$



(c) ($A = 0.05$)



(d) ($A = 0.1$)

図-6 セン断帯発生に伴う体積変化

付録 非共軸 Cam-clay モデルの変形係数

Cam-clay モデルのせん断剛性 G は,

$$G = \frac{3(1-2\nu)1+e_0}{2(1+\nu)} \frac{p'}{\kappa} \quad (22)$$

である。従って、非共軸 Cam-clay モデルの変形係数 $\tilde{G}$ は、式(14)、(22)より、次のようになる。

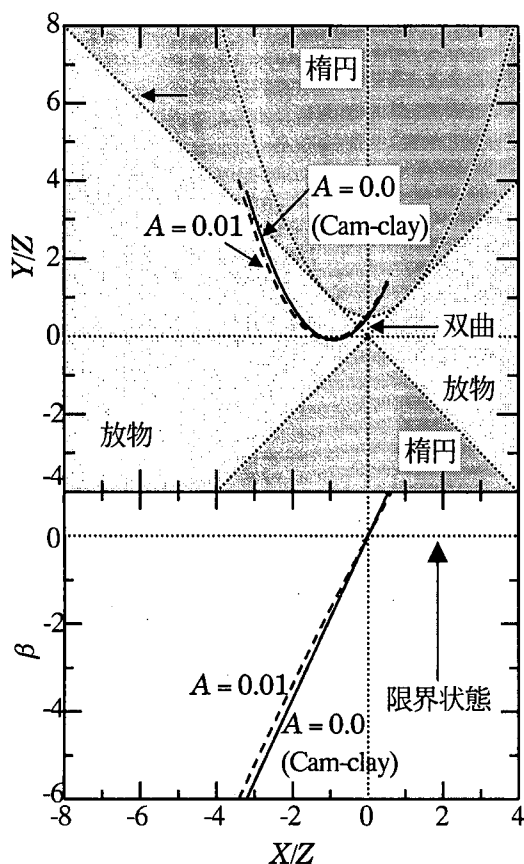
$$\tilde{G} = \frac{\frac{3(1-2\nu)1+e_0}{2(1+\nu)} \frac{p'}{\kappa} \beta}{\frac{9(1-2\nu)1+e_0}{2(1+\nu)} \frac{A+\beta}{\kappa}} \quad (23)$$

また $A \geq 0$, $p' > 0$ であるから、上式より、

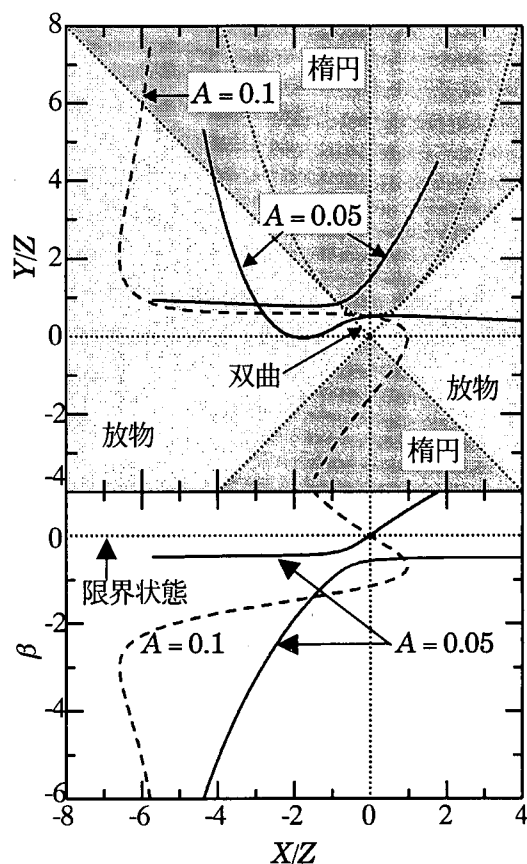
$$-\frac{9(1-2\nu)1+e_0}{2(1+\nu)} \frac{1}{\kappa} A < \beta < 0, \quad (24)$$

の範囲で $\tilde{G}$ が負の値となることがわかる。 $\tilde{G}$ が負ということは、せん断応力速度と逆方向にせん断ひずみ速度が発生することを意味する。式(24)で示された応力状態は限界状態線の上側である。図-8 に $\tilde{G} < 0$ となる応力状態を示す。ただし、 $\tilde{G}$ は弾塑性状態の変形係数であるから、式(24)に示した応力状態でも、降伏前や除荷時には変形係数 $\tilde{G}$ はせん断剛性 G となる。

一方、非共軸 Cam-clay モデルの変形係数 $\tilde{K}$ は、式(15)より、次のようになる。



(a) ($A = 0.05$)



(b) ($A = 0.1$)

図-7 支配方程式の特性変化

$$\tilde{K} = \frac{\frac{D-A}{DA} p'}{\frac{D-A}{DA} \frac{\kappa}{1+e_0} - \beta} \quad (25)$$

$D \geq 0$, $A \geq 0$, $p' > 0$ であるから,

$$0 < \frac{D-A}{DA} \frac{\kappa}{1+e_0} < \beta, \quad (D > A \text{ の場合}), \quad (26)$$

$$\beta < \frac{D-A}{DA} \frac{\kappa}{1+e_0} < 0, \quad (D < A \text{ の場合}), \quad (27)$$

の範囲で $\tilde{K}$ が負の値となることがわかる。式(26), (27)より, $D > A$ の場合は限界状態より下の応力状態, $D < A$ の場合は限界状態より上の応力状態で問題となる。図-9に, $\tilde{K} < 0$ となる応力状態を示す。ただし, $\tilde{G}$ と同様に $\tilde{K}$ も弾塑性状態の変形係数であるから, 降伏前や除荷時には変形係数 $\tilde{K}$ は体積弾性係数 K となる。

参考文献

1) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: *Critical state soil*

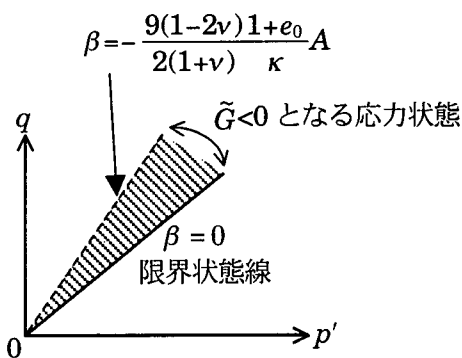


図-8 $\tilde{G} < 0$ となる応力状態

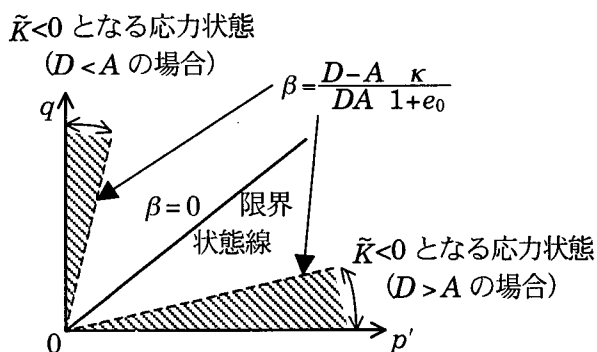


図-9 $\tilde{K} < 0$ となる応力状態

- mechanics*, McGraw-Hill, 1968.
- 2) Yatom, C., Yashima, A., Sano, I. And Iizuka, A.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundation*, Vol.29, No.3, pp. 41–53, 1989.
 - 3) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1, pp. 83–100, 1995.
 - 4) 小林一三, 飯塚 敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, *土木学会論文集*, No. 617/III–46, pp. 1–18, 1999.
 - 5) 地盤の破壊とひずみの局所化に関する研究委員会編: *地盤の破壊とひずみの局所化*, 土質工学会(現地盤工学会), 1994.
 - 6) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, No. 4/5, pp. 239–264, 1975.
 - 7) Ottosen, N. S. and Runesson, K.: Properties of Discontinuous Bifurcation Solutions in Elasto-plasticity, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 401–421, 1991.
 - 8) Hill, R.: Acceleration Waves in Solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, No. 1, pp. 1–16, 1962.
 - 9) Ogden, R. W.: *Non-linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, 1984.
 - 10) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Condition for the Localization of Deformation in Pressure-sensitive Dilatant Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, No. 6, pp. 371–394, 1975.
 - 11) Henkel, D. J.: The relationships between the effective stresses and water content in saturated clays, *Géotechnique*, Vol. 10, No. 2, pp. 41–54, 1960.
 - 12) 柴田 徹: 粘土のダイラタンシーについて, *京都大学防災研究所年報*, 第6号, pp. 128–134, 1963.
(2001年4月20日 受付)