

古典塑性論および非古典塑性論の軟化挙動予測特性

Evaluation of conventional and unconventional plasticity for prediction of softening behavior

橋口公一*, 齊藤公志郎**, 岡安崇史***, 堤成一郎**

Koichi Hashiguchi, Koshiro Saitoh, Takashi Okayasu, Seitiro Tsutsumi,

*工博, 農博 九州大学大学院農学研究院教授, 生産環境科学部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

**農修 九州大学大学院生物資源環境科学府博士課程 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

***農博 九州大学大学院農学研究院学術特定研究者, 生産環境科学専攻 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

The *conventional elastoplasticity* is based on the idealization that the interior of the yield surface is a purely elastic domain. This idealization would not lead to unrealistic prediction of hardening behavior but would cause unrealistic prediction of softening behavior which is observed typically in over-consolidated soils, while metals and normally-consolidated soils exhibit hardening behavior. On the other hand, the *unconventional elastoplasticity* disusing the idealization enables to describe the plastic deformation due to the change of stress inside the yield surface exhibiting the smooth elastic-plastic transition and thus is expected to describe pertinently softening behavior. In this article the capabilities of the conventional and the unconventional elastoplasticity for the description of softening behavior are examined, comparing the *Drucker-Prager model* as the conventional one and the *subloading surface model* as the unconventional one for the prediction of deformation behavior of over-consolidated soils. Then, it is concluded that the unconventional elastoplasticity has to be adopted for the prediction of softening behavior.

Key Words: *Drucker-Prager model, elastoplastic constitutive equation, softening, soil, subloading surface model*

1. 緒言

降伏面の内部を純粋弾性域とする理想化に基づく古典弾塑性論¹⁾は, 金属や正規圧密土にみられる硬化挙動の予測に広く活用されている。しかし, この理想化は, 過圧密土に代表される軟化挙動を伴う変形に対しては, 非現実的な予測をもたらす。したがって, 軟化挙動の予測においては, この理想化を前提とせず, 降伏面内部の応力の変化による塑性変形を表現し得る非古典弾塑性論²⁾を導入すべきであると思われる。

自然地盤あるいは地盤構造物は, 過去に何らかの負荷を経験している一方, 通常, 大気に露出しており, これらの露出面近傍は高い過圧密状態にあると考えられる。したがって, 地盤構造物の力学設計においては, 過圧密状態の土の変形挙動を適切に予測することが不可欠である。

土の弾塑性構成モデルとして最もよく知られている Cam-clay モデル³⁾は, 正規圧密状態の土の変形挙動は現実的に予測し得るが, 限界状態よりも密な側においては過大に膨らんだ降伏面が仮定されるので, 過圧密状態の土のピーク応力を過度に高く予測する。この欠点を回避するために, 過圧密状態に対しては Drucker-Prager モデル⁴⁾が広く用いられている。これらのモデルの組合せは, Cap モデル^{5), 6)}と称されている。いずれのモデルも古典弾塑性論の枠組に属し, 後者の降伏面は, 主応力空間において中心軸が静水圧軸に一致する錘面を呈する。しかしながら, この錘面上の降伏面に連続流動則を適用すると, 非現実的に大きな塑性体積膨張が予

測されるので, 降伏面より低い勾配をもつ塑性ポテンシャル面を導入する非関連流動則が広く用いられている。

一方, 多面モデル^{7), 10)}, 無数面モデル¹¹⁾, 二面モデル^{12), 13)}, 下負荷面モデル^{14), 15), 16)}に代表される非古典弾塑性論に属する種々のモデルが提案されている。これらの中で, 下負荷面モデルは, 関連流動則を採用するので, シンプルな構造を有しているが, 連続性条件, 滑らか条件, 仕事率・剛性緩和等の力学的要求条件を満たす合理的な特性を有している^{17), 18), 19), 20)}。なお, 本モデルは, 金属^{15), 21), 22)}および土^{14), 23), 24), 25)}に対してその適用性が実証されている。

本論文では, 過圧密土の変形挙動に代表される軟化挙動の予測に対する古典弾塑性論と非古典弾塑性論の基本特性の相違を論じる。土の軟化挙動表現に広く用いられている古典論としての Drucker-Prager モデルおよび非古典論として最も合理的であると思われる下負荷面モデルを採り上げ, 排水および非排水三軸圧縮負荷挙動の予測特性の比較, 照査を行う。その結果, 後者が過圧密土の変形挙動を予測するモデルとして妥当であることを結論づける。

なお, 本論文では, 応力(速度)およびストレッチング(速度勾配の対称部分)は引張を正とする。また, 応力は, 全応力から間隙水圧を差し引いた有効応力で表す。

2. 弾塑性構成式

ストレッチング D は, 弾性ストレッチング D^e と塑性

ストレッチング D^p に加算的に分解されるとする。

$$D = D^e + D^p \quad (1)$$

ここに、弾性ストレッチング D^e は次式で与えられる。

$$D^e = E^{-1} \dot{\sigma} \quad (2)$$

σ は応力、 $(\cdot)$ は客観性をもつ共回転速度を示す。4 階のテンソル E は Hooke 型の次式で与えられるとする。

$$E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3)$$

ここに、体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G は、一般に、応力および内部状態変数の関数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、すなわち、 $i = j$ に対し $\delta_{ij} = 1$ 、 $i \neq j$ に対し $\delta_{ij} = 0$ である。

次の降伏条件を仮定する。

$$f(\sigma) = F(H) \quad (4)$$

ここに、 f は σ の同次関数である。また、 H は等方便・軟化変数を表し、その発展則は塑性ストレッチングの同次線形関数で次式のように与えられるものとする。すなわち、

$$\dot{H} = \text{tr}\{f_H(\sigma, H)D^p\} \quad (5)$$

ここに、 $(\cdot)$ は物質時間微分を表し、 f_H は 2 階のテンソルである。

2.1 古典弾塑性構成式

降伏条件式(4)の時間微分により、適応条件は次式で表される。

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \dot{\sigma}\right) = F' \dot{H} \quad (6)$$

ここに、

$$F' = \frac{dF}{dH} \quad (7)$$

次の流動則を仮定する。

$$D^p = \lambda M \quad (8)$$

ここに、 $\lambda (> 0)$ は正值の比例係数を表し、2 階のテンソル

M は、塑性ポテンシャル面 $g(\sigma) = g(\sigma_c)$ (σ_c 現在の応力) の正規化された外向き法線であり、次式で与えられる。

$$M = \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} / \left\| \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \right\| \quad (9)$$

$\| \cdot \|$ は大きさ(norm)を表す。

適応条件(6)に流動則(8)を代入して、 λ は次式で表される。

$$\lambda = \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{M_p} \quad (10)$$

ここに、2 階のテンソル N は、次式で示される正規化された降伏面の外向き法線である。

$$N = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} / \left\| \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \right\| \quad (11)$$

塑性係数 M_p は次式で与えられる。

$$M_p = \text{tr}(N \sigma) \frac{F'}{F} h \quad (12)$$

$$h = \frac{\dot{H}}{\lambda} \quad (13)$$

なお、式(5)により、 h は σ 、 H および M の関数である。

式(8)および(10)より、塑性ストレッチングは次式で与えられる。

$$D^p = \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{M_p} M \quad (14)$$

式(2)および(14)を式(1)に代入して、ストレッチング D が次式のように得られる。

$$D = E^{-1} \dot{\sigma} + \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{M_p} M \quad (15)$$

流動則(8)における正值の比例係数をストレッチングで表す場合、記号 λ を Λ に置き換えて、次式を得る。

$$\Lambda = \frac{\text{tr}(NED)}{M_p + \text{tr}(NEM)} \quad (16)$$

式(15)の逆関係は次式で与えられる。

$$\dot{\sigma} = ED - \frac{\text{tr}(NED)}{M_p + \text{tr}(NEM)} EM \quad (17)$$

または、

$$\dot{\sigma} = \left\{ E - \frac{1}{M_p + \text{tr}(NEM)} (EM) \otimes (NE) \right\} D \quad (17)'$$

なお、関連流動則においては、以上の諸式において M を N に置き換える。

負荷基準は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D^p \neq 0: f(\sigma) - F(H) = 0 \text{ and } \text{tr}(NED) > 0 \\ D^p = 0: \text{otherwise.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

2.2 非古典弾塑性構成式：下負荷面モデル

下負荷面モデルは、降伏面の内部を純粋弾性域とせず、降伏面内部の応力速度による塑性変形を表現する拡張された弾塑性論、すなわち非古典弾塑性論¹⁾に属する最も妥当なモデルである^{17,18,19}。本モデルでは、古典弾塑性論における降伏面を正規降伏面と称し、正規降伏面の内部に常に現応力点 σ を通り、応力空間の原点 $\sigma = 0$ に関して正規降伏面と相似形および相似の配置を保ちつつ膨張・収縮する下負荷面を導入する。さらに、正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比、すなわち、これらの面の相似比を R により表す。変数 R は、正規降伏状態への接近の度合いを表すので、これを“正規降伏比”と称する。以上により、下負荷面は次式で表される。

$$f(\sigma) = RF(H) \quad (19)$$

正規降伏面および下負荷面を模式的に図 1 に示す。ここに、 $\sigma_y (= \sigma/R)$ は、正規降伏面上の共役応力であり、外向き法線は下負荷面上の現応力 σ に関するものと一致する。

下負荷面式(19)の時間微分は次式で与えられる。

$$\text{tr}\left(\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \dot{\sigma}\right) = \dot{R}F + RF' \dot{H} \quad (20)$$

塑性変形過程において、下負荷面は正規降伏面に漸近することを考慮して、 R の発展則を次式で与える。

$$\dot{R} = U \|D^p\| \quad \text{for } D^p \neq 0 \quad (21)$$

ここに、 U は次の条件を満たす R の単調減少関数である (図2参照)。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} U &= +\infty \quad \text{for } R = 0, \\ U &= 0 \quad \text{for } R = 1, \\ (U < 0 \quad \text{for } R > 1). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

なお、式(22)を満たす関数 U として、次式を仮定する。

$$U = -u \ln R \quad (23)$$

ここに、 u は材料定数である。

式(21)を式(20)に代入することにより、下負荷面に拡張された適応条件式が次式で与えられる。

$$\text{tr} \left(\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right) = U \|D^p\| F + R F' \dot{H} \quad (24)$$

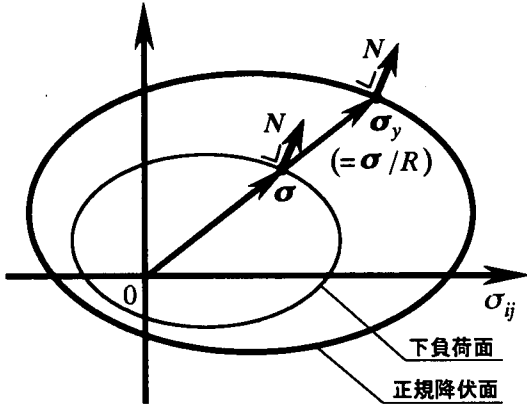


図-1 正規降伏面および下負荷面

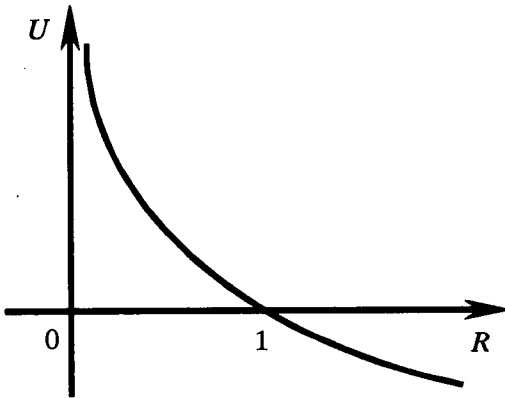


図-2 正規降伏比 R の発展則における関数 U

次の関連流動則を導入する。

$$D^p = \bar{\lambda} N \quad (25)$$

ここに、 $\bar{\lambda}$ は正值の比例係数であり、適応条件式(24)に関連流動則(25)を代入して、 $\bar{\lambda}$ が次式で与えられる。

$$\bar{\lambda} = \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{\bar{M}_p} \quad (26)$$

ここに、

$$\bar{M}_p = \left(\frac{F'}{F} \bar{h} + \frac{U}{R} \right) \text{tr}(N \sigma) \quad (27)$$

$$\bar{h} = \frac{\dot{H}}{\lambda} \quad (28)$$

なお、 $\bar{h}$ は σ , H および N の関数である。

塑性ストレッチングは、式(25)および式(26)より、次式で表される。

$$D^p = \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{\bar{M}_p} N \quad (29)$$

式(2)および(29)を式(1)に代入して、ストレッチング D は次式で与えられる。

$$D = E^{-1} \dot{\sigma} + \frac{\text{tr}(N \dot{\sigma})}{\bar{M}_p} N \quad (30)$$

関連流動則(25)における正值の比例係数をストレッチングで表す場合、記号 $\bar{\lambda}$ を $\bar{\Lambda}$ に置き換えて、次式を得る。

$$\bar{\Lambda} = \frac{\text{tr}(NED)}{\bar{M}_p + \text{tr}(NEN)} \quad (31)$$

式(30)の逆表現は次式で与えられる。

$$\dot{\sigma} = ED - \frac{\text{tr}(NED)}{\bar{M}_p + \text{tr}(NEN)} EN \quad (32)$$

あるいは、

$$\dot{\sigma} = \left\{ E - \frac{1}{\bar{M}_p + \text{tr}(NEN)} (EN) \otimes (NE) \right\} D \quad (32')$$

負荷基準^{20), 26)}は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D^p \neq 0 : \text{tr}(NED) > 0, \\ D^p = 0 : \text{tr}(NED) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

塑性ストレッチング(29)は、下負荷面に拡張された適応条件(24)に、関連流動則(25)を代入して得られる。本場合、応力が正規降伏面に接近するにつれて、塑性変形が徐々に発達して滑らかな弾塑性遷移が表現される。つまり、下負荷面モデルにおいては、“応力速度—ストレッチング関係(あるいは剛性テンソル)が応力状態の連続的な変化に対して連続的に変化する”ことを意味する次の滑らか条件^{18), 19), 20)}を常に満たす。

$$\lim_{\delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\partial \dot{\sigma}(\sigma + \delta \sigma, S_i, D)}{\partial D} = \frac{\partial \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D)}{\partial D} \quad (34)$$

ここに、 $S_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$ は、塑性変形による力学的応答の変化を記述するスカラーまたはテンソルの内部状態変数をまとめて示している。 $\delta(\cdot)$ は微小な変化量を表す。本条件を満たす下負荷面モデルは次の利点を有する。

- 1) 滑らかな単調負荷に対して滑らかな応答 (例えば、単軸負荷における滑らかな軸応力—軸ひずみ関係) が予測される。一方、滑らか条件に抵触する構成モデル、例えば、古典塑性モデルにおける降伏点、多面^{8), 9), 10)}または無数面モデル¹¹⁾における応力反転点、二面モデル^{12), 13), 27), 28)}における下降伏点においては、滑らかな応答が予測されない。
- 2) 応力は下負荷面上に常に存在するので、負荷基準においては $\text{tr}(NED)$ の符号の判定のみを行えばよい。一方、降伏面内部を純粋弾性域とする古典塑性論に基づく構成式においては、 $\text{tr}(NED)$ の符号判定のみならず、応力が降伏面に存在するか否かの判定を要する。また、滑ら

か条件に抵触する非古典構成モデルにおいても、同様の判定を要する。例えば、多面^{9),10)}または無数面モデル¹¹⁾においては、応力が応力反転面に到達したか否かの判定が必要である。また、二面モデル^{12),13),27),28)}においては、応力が降伏面上にあるか否かの判定を要する。

- 3) 応力が仮に降伏面から飛び出しても、条件(22)により、 $R > 1$ に対して $\dot{R} < 0$ となるので、応力は自動的に正規降伏面へ引き戻される(図3参照)。したがって、下負荷面モデルにおいては、大きな計算ステップによる粗い数値計算が可能である。一方、古典塑性論では、塑性荷重過程において、応力が常に降伏面上に存在するように応力を修正する特殊な数値計算法、例えば、Euler法²⁹⁾、mean normal法³⁰⁾、radial return法³¹⁾などの導入が必要である。

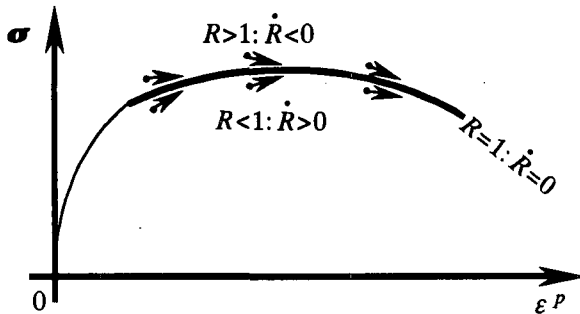


図-3 下負荷面モデルの応力制御機能

3. 土への適用

以上に基づいて土の構成式を定式化するに当たって必要な材料関数を以下に示す。

等方硬・軟化関数 F を次式で与える。

$$F = F_0 \exp\left(\frac{H}{\rho - \gamma}\right) \quad (35)$$

ここに、 F_0 は初期の降伏面の大きさを表し、先行圧密圧力 p_{y0} に一致する。また、 ρ および γ はそれぞれ体積 v と圧力 p ($= -\text{tr} \sigma / 3$)の面対数($\ln v - \ln p$)線形関係^{14), 32), 33)}(図4参照)における正規圧密線および膨潤線の勾配を示す。

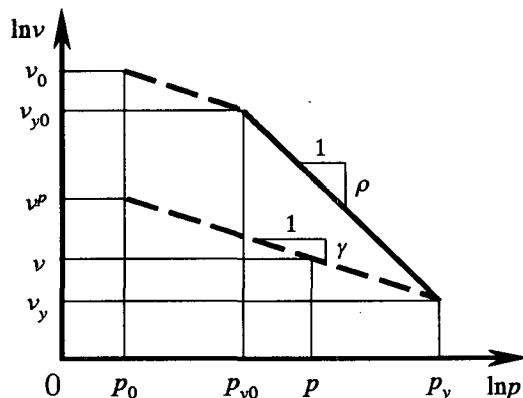


図-4 $\ln v - \ln p$ 線形関係

さらに、等方硬・軟化変数 H の発展則として次式を採用する。

$$\dot{H} = -D_v^p = -\text{tr} D^p \quad (36)$$

また、 $\ln v - \ln p$ 線形関係より体積弾性係数 K を次式で与える。

$$K = \frac{p}{\gamma} \quad (37)$$

さらに、せん断弾性係数 G は式(37)とポアソン比 ν により次式で表される。

$$G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (38)$$

なお、Hashiguchi and Collins³⁴⁾はより妥当な弾性構成式を提案している。

3.1 Drucker-Prager モデル

図5に $p - \|\sigma^*\|$ 面におけるDrucker-Prager降伏面および塑性ポテンシャル面を示す。ここに、 $(*)$ は偏差成分を示す。

Drucker-Prager降伏面は、限界状態において修正Cam-clayモデル³⁵⁾に一致する。すなわち、

$$f(\sigma) = \frac{2(\|\sigma^*\| - m_y p)}{m - m_y} = F(H) \quad (39)$$

ここに、 m および m_y はそれぞれ限界状態における応力比 $\|\sigma^*\|/p$ および降伏面の勾配を表す材料定数である。また、次の塑性ポテンシャル面を仮定する。

$$g(\sigma) = \|\sigma^*\| - m_p p - (\|\sigma_c^*\| - m_p p_c) = 0 \quad (40)$$

ここに、 m_p は塑性ポテンシャル面の勾配を表す材料定数、 σ_c^* および p_c はそれぞれ σ^* および p の現在値である。 m 、 m_y および m_p は一般に応力の関数であるが、ここでは軸対称圧縮状態に限定し、いずれも一定とする。

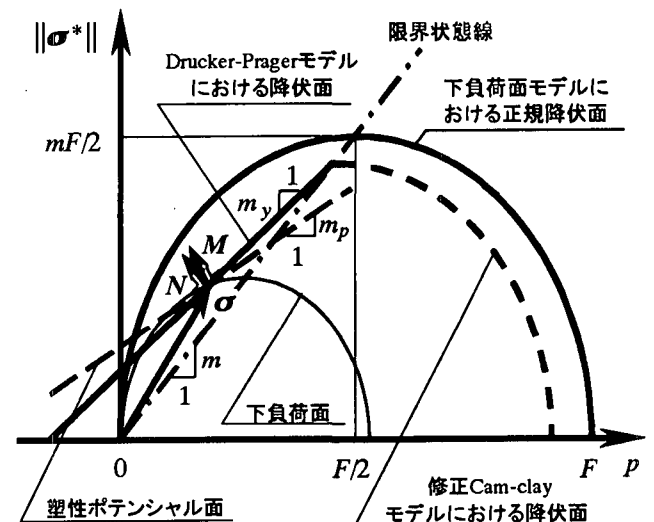


図-5 Drucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルにおいて導入される諸力学面

Drucker-Prager降伏面および塑性ポテンシャル面の正規化外向き法線テンソル N および M は、式(39)および(40)より、

それぞれ次式で表される。

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}m_y^2}} \left(\frac{\sigma^*}{r} + \frac{1}{3}m_y I \right) \quad (41)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}m_p^2}} \left(\frac{\sigma^*}{r} + \frac{1}{3}m_p I \right) \quad (42)$$

ここに、 I は恒等テンソルである。

式(13), (36), (39), (41)および(42)を式(12)に代入して、塑性係数 M_p は次式で与えられる。

$$M_p = \frac{-F'm_p(m-m_y)}{2\sqrt{1 + \frac{1}{3}m_p^2}\sqrt{1 + \frac{1}{3}m_y^2}} \quad (43)$$

ここに、

$$F' = \frac{F}{\rho - \gamma} \quad (44)$$

以下に、等方応力状態からの側圧一定排水三軸圧縮負荷 ($\dot{\sigma}_a \neq 0$, $\dot{\sigma}_l = 0$; σ_a および σ_l はそれぞれ軸応力および側方応力) における Drucker-Prager モデルに基づく応力-ひずみ関係の解析解を導出する。側圧一定排水三軸圧縮状態において、圧力および偏差応力の大きさはそれぞれ次式で与えられる。

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_l)/3, \quad \|\sigma^*\| = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_l - \sigma_a) \quad (45)$$

式(3), (37), (38)および(45)を式(2)に代入した結果を積分して、弾性軸ひずみ ε_a^e と弾性体積ひずみ ε_v^e はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^e &= -\frac{\gamma}{3} \left\{ 1 + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \right\} \ln \left(-\frac{\sigma_a}{3p_0} + \frac{2}{3} \right), \\ \varepsilon_v^e &= -\gamma \ln \left(-\frac{\sigma_a}{3p_0} + \frac{2}{3} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

ここに、 p_0 は初期状態における圧力である。

式(3), (37), (38), (41)–(45)を式(15)に代入した結果を積分して、弾塑性変形過程における軸ひずみ ε_a および体積ひずみ ε_v はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_a - \varepsilon_{ay0} &= -\frac{\gamma}{3} \left\{ 1 + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \right\} \ln \left(-\frac{\sigma_a}{3p_0} + \frac{2}{3} \right) \\ &\quad + \frac{(\rho - \gamma)(\sqrt{6} - m_p)}{3m_y} \ln \left\{ \frac{2(m_y - \sqrt{6})}{3F_0(m - m_y)} (\sigma_a - \sigma_{ay0}) + 1 \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_v - \varepsilon_{vy0} &= -\gamma \ln \left(-\frac{\sigma_a}{3p_0} + \frac{2}{3} \right) \\ &\quad - (\rho - \gamma) \ln \left\{ \frac{2(m_y - \sqrt{6})}{3F_0(m - m_y)} (\sigma_a - \sigma_{ay0}) + 1 \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

ここに、 σ_{ay0} は初期降伏時の軸応力であり、 ε_{ay0} および ε_{vy0} はそれぞれ初期降伏時の軸ひずみおよび体積ひずみである。

次に、体積一定条件 (体積ストレッチング $D_v = D_a + 2D_l = 0$; D_a および D_l はそれぞれ軸ストレッチングおよ

び側方ストレッチング) を満たす非排水三軸単調圧縮状態における Drucker-Prager モデルに基づく応力-ひずみ関係の解析解は、式(3), (41)および(42)を式(17)'に代入することにより次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} K \left[\frac{1}{m_p} + \frac{1}{2G} \left\{ m_y K - \frac{1}{2} F'(m - m_y) \right\} \right] D_a, \\ \|\dot{\sigma}^*\| &= -\sqrt{6} G \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{m_p}{2G} \left\{ m_y K - \frac{1}{2} F'(m - m_y) \right\}} \right] D_a. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

応力速度比は、式(37), (38)および(43)を式(49)に代入することにより、次式で与えられる。

$$\frac{\|\dot{\sigma}^*\|}{\dot{p}} = -A \left(\frac{\|\sigma^*\|}{p} - \frac{\rho}{\gamma} m_y \right) \quad (50)$$

ここに、

$$A = \frac{\gamma}{\rho - \gamma} \quad (51)$$

また、初期条件 ($p = p_0$, $\sigma^* = \sigma_{y0}^*$: 初期降伏状態における偏差応力) の下で式(50)を積分することにより、非排水応力経路は次式で表される。

$$\|\sigma^*\| = p_0 \left(\frac{\|\sigma_{y0}^*\|}{p_0} - m_y \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-A} + m_y p \quad (52)$$

さらに、式(37), (38), (43)および(52)を式(49)₁に代入し、これを初期条件 ($p = p_0$: $\varepsilon_a = \varepsilon_{ay0}$) の下で積分して、軸ひずみは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_a - \varepsilon_{ay0} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma}{1-2\nu} \left[\left\{ (1+\nu)m_y - 3(1-2\nu)\frac{1}{m_p} \right\} \ln \frac{p}{p_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma(1+\nu)}{\rho} \left(\frac{\|\sigma_{y0}^*\|}{p_0} - m_y \right) \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-A} - 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (53)$$

3.2 下負荷面モデル

正規降伏面、下負荷面は、修正 Cam-clay モデル (図5 参照) と同様に、次の負荷関数で表されるとする。

$$f(\sigma) = p(1 + \chi^2) \quad (54)$$

ここに、

$$\chi = \frac{\|\eta\|}{m} \quad (55)$$

$$\eta = \frac{\sigma^*}{p} \quad (56)$$

下負荷面の正規化された外向き法線は、式(54)–(56)を式(11)に代入して、次式で与えられる。

$$N = -\frac{\frac{1}{3}(1 - \chi^2)I - 2\frac{\chi}{m}\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|}}{\sqrt{\frac{1}{3}(1 - \chi^2)^2 + \left(\frac{2\chi}{m}\right)^2}} \quad (57)$$

塑性係数 $\bar{M}_p$ は、式(23), (28), (35), (36), (54)および(57)を式(27)に代入して次式で表される。

$$\bar{M}_p = \frac{f}{\sqrt{\frac{1}{3}(1-\chi^2)^2 + \left(\frac{2\chi}{m}\right)^2}} \left\{ \frac{R(1-\chi^2)\frac{F'}{F}}{\sqrt{\frac{1}{3}(1-\chi^2)^2 + \left(\frac{2\chi}{m}\right)^2}} - \frac{1}{R}u\ln R \right\} \quad (58)$$

4. 実測値との比較

過圧密土の排水および非排水三軸圧縮試験結果に対するDrucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルの予測結果を比較し、両モデルの妥当性について検討する。

4.1 排水三軸圧縮試験

Drucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルによる側圧一定排水三軸圧縮挙動の予測特性を図6に示している。Drucker-Pragerモデルにおいては、変形に伴い弾性係数が増大するとともに、降伏点で剛性が急変するので、エッフェル塔形に鋭く折れ曲がった応力-ひずみ曲線が予測される。一方、

下負荷面モデルでは、滑らかな応力-ひずみ曲線が表現される。さらに、式(27)で示される塑性係数 $\bar{M}_p$ は、正值の項 U/R を含むので、下降伏状態において、応力が限界状態 ($\text{tr}N=0$) に達した後も、 $\bar{M}_p > 0$ で限界状態を超えて上昇し得る。また、ピーク応力状態 ($\|\sigma^*\| = \max: d\|\sigma^*\|/d\varepsilon_a = 0$ および $\dot{\sigma} = 0$ より $D^p = 0$) における軸ひずみは、体積ひずみ-軸ひずみ曲線の変曲点に一致する。つまり、 $D_v^e = 0$ (D_v^e : 弾性体積ストレッチング) を満たすピーク応力点においては、 $\text{tr}N/\|N^*\| = \max$ により $D_v^p/\|D^{p*}\| = \max$ であり $D_v/D_a = d\varepsilon_v/d\varepsilon_a = \max \rightarrow d^2\varepsilon_v/d\varepsilon_a^2 = 0$ となる。すなわち、

$$\varepsilon_a \left| d\|\sigma^*\|/d\varepsilon_a \right| = 0 = \varepsilon_a \left| d^2\varepsilon_v/d\varepsilon_a^2 \right| = 0 \quad (59)$$

これは、過圧密土に特徴的に見られる力学特性である (例えば、Taylor³⁰⁾ 参照)。

図7は、正規降伏比 R の発展速度を表すパラメータ u の種々の値に対する応力-軸ひずみ曲線の推移を示している。 u の増大とともに負荷開始直後の応力の立ち上がり急になり、ピーク応力も高く予測される。なお、 $u=\infty$ に対して応答曲線は古典弾塑性構成式によるものに帰着する。

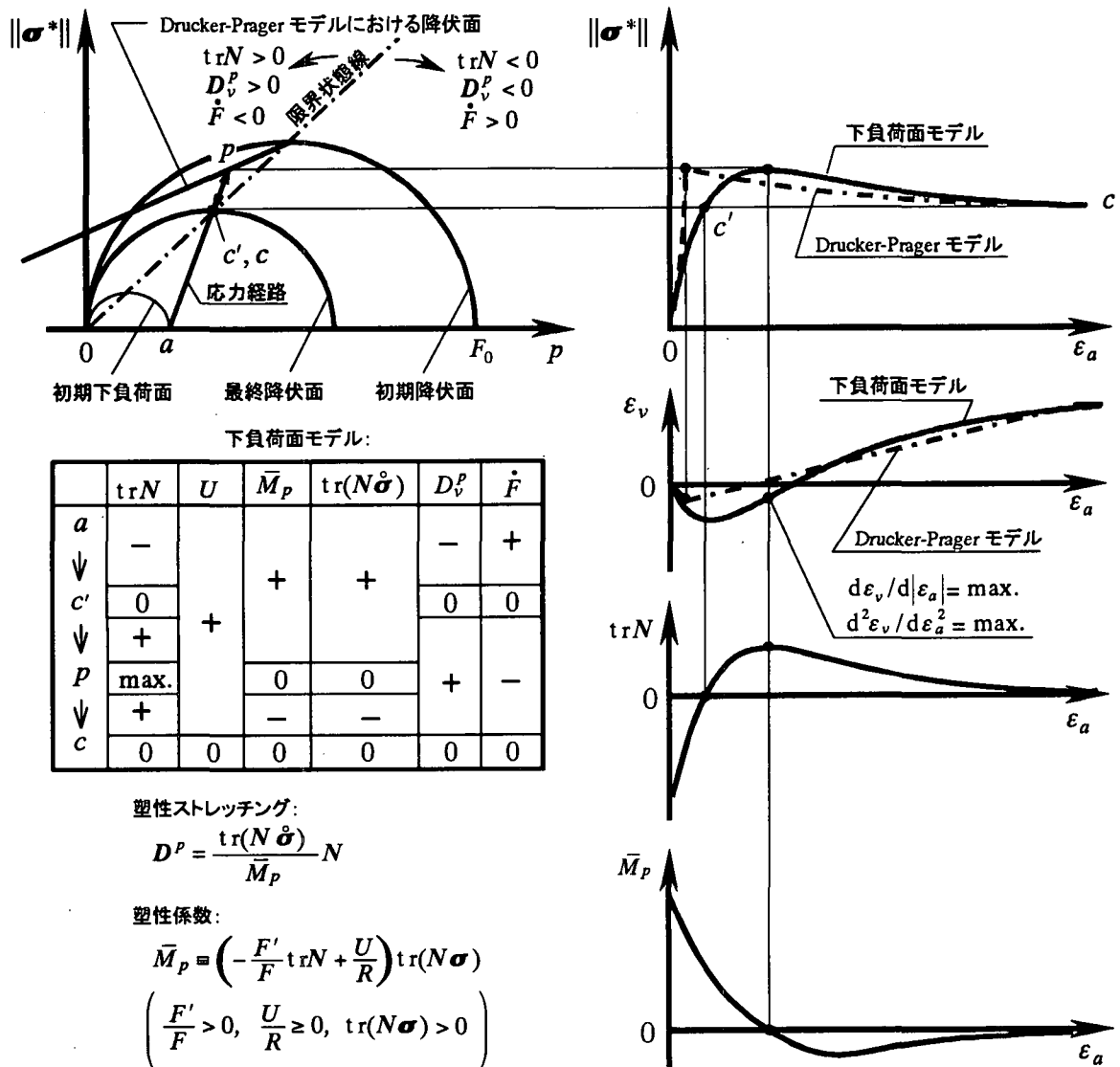


図-6 Drucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルによる過圧密土の変形予測の比較

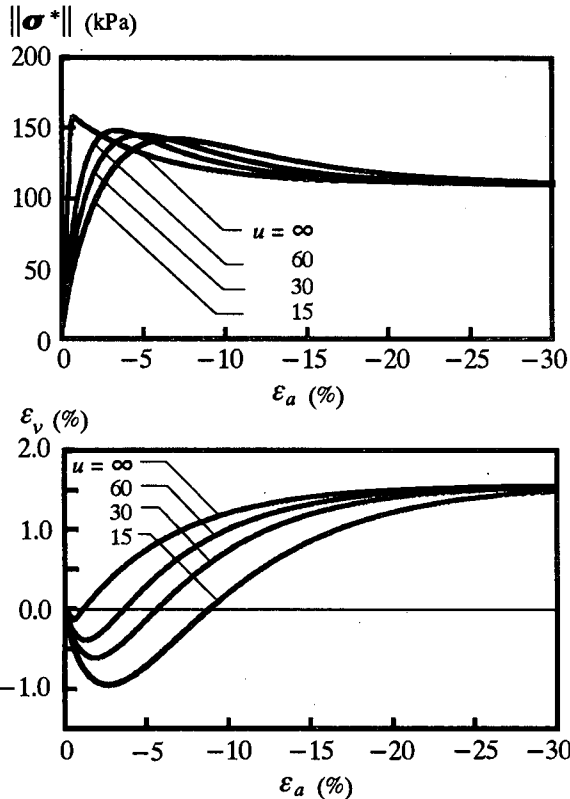


図-7 側圧一定排水三軸圧縮挙動の材料定数 u の変化に伴う下負荷面モデルによる応力-ひずみ曲線の推移

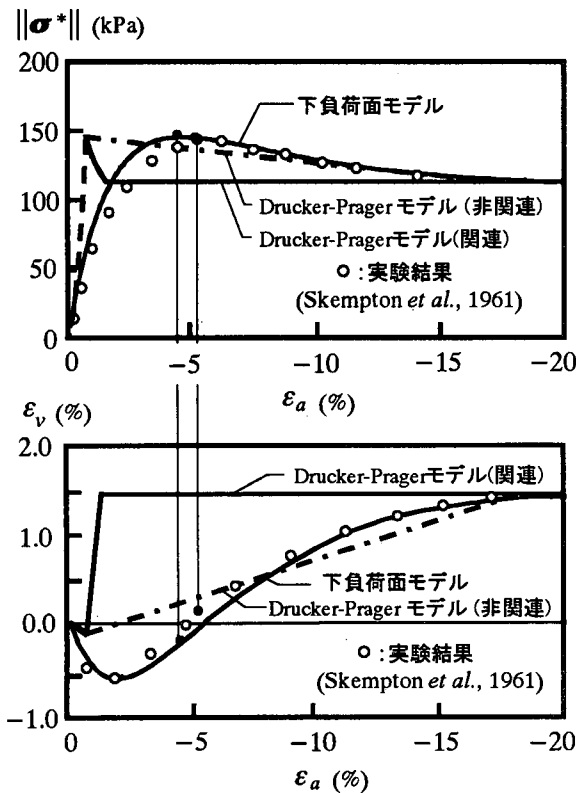


図-8 側圧一定排水三軸圧縮挙動のDrucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルによる予測

図8に Weald clay の側圧一定排水三軸圧縮試験結果³⁷⁾に対

する両モデルの予測結果の比較を示している。なお、計算に用いた材料定数および初期値は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \rho &= 0.045, \quad \gamma = 0.002, \quad \nu = 0.37, \quad m = 1.2, \\ m_y &= 0.574, \quad m_p = 0.071 \text{ for the Drucker-Prager model,} \\ u &= 33.0 \text{ for the subloading surface model,} \\ F_0 &= 330.0 \text{ kPa.} \end{aligned}$$

初期応力は $\sigma_0 = -67.0 \text{ I kPa}$ である。Drucker-Prager 降伏面は修正 Cam-clay モデルの初期降伏面の限界状態における点と下負荷面モデルにより予測される破壊応力点を通る円錐面として決定した。さらに、塑性ポテンシャル面の勾配は実験値の体積ひずみ-軸ひずみ曲線に適合するように選択した。なお、本研究におけるシミュレーションでは、実測値のデータよりパラメータを直接引用した。下負荷面モデルにおいては、Drucker-Prager モデルに比して、応力-軸ひずみ曲線、体積ひずみ-軸ひずみ曲線ともに実測値との良い一致が見られる。他方、図9においては、 $\nu = 0.47$ としてせん断弾性係数を低下させて、Drucker-Prager モデルの負荷開始時の応答を実測値に合わせているが、弾塑性変形過程での予測結果に改善が見られない。

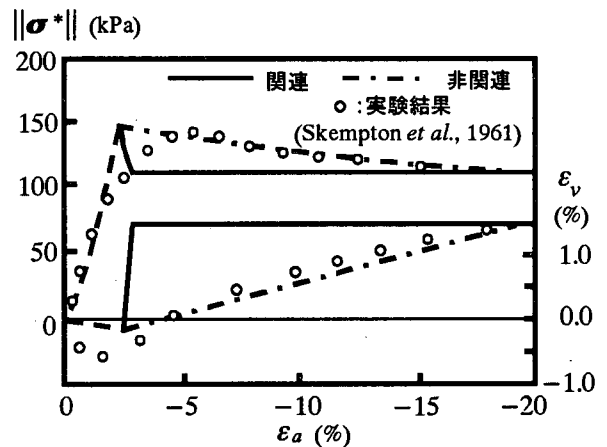


図-9 側圧一定排水三軸圧縮挙動のポアソン比 ($\nu=0.47$) の変化に伴う Drucker-Pragerモデルによるシミュレーション結果

4.2 非排水三軸圧縮試験

London clay の非排水三軸圧縮試験結果³⁸⁾に対する両モデルの予測結果の比較を図10に示している。用いた材料定数および初期値を次に示す。

$$\begin{aligned} \rho &= 0.022, \quad \gamma = 0.0063, \quad m = 0.82, \\ \nu &= 0.3 \text{ and } \nu = 0.45, \quad m_y = 0.62, \quad m_p = 0.21 \\ &\text{for the Drucker-Prager model,} \\ \nu &= 0.3, \quad u = 70.0 \\ &\text{for the subloading surface model,} \\ F_0 &= 1,700.0 \text{ kPa.} \end{aligned}$$

下負荷面モデルの予測結果は実測値に極めてよく一致している。一方、Drucker-Prager モデルは、応力経路、応力-軸ひずみ曲線いずれも実測値とは大きく異なっている。排水試験と同様にポアソン比を 0.45 に変えて計算を行ったが、予測結果に改善は見られない。

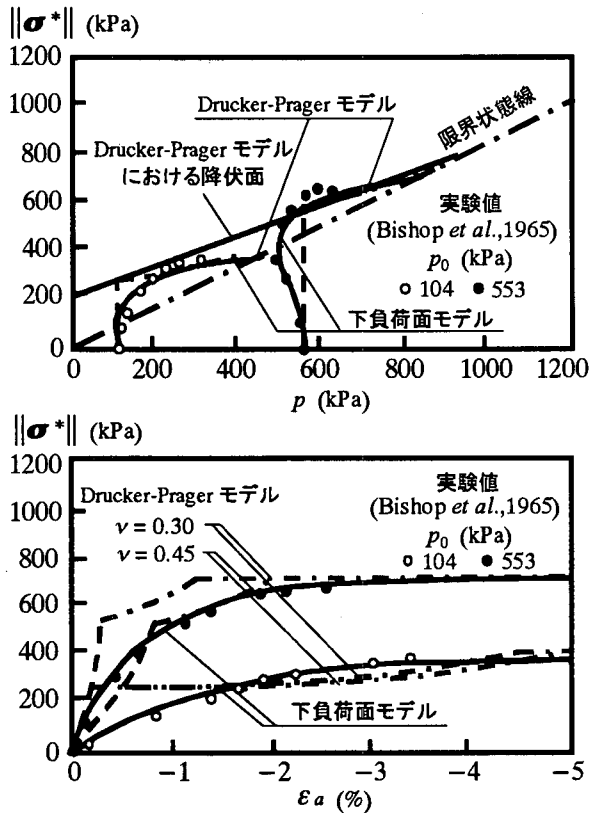


図-10 非排水三軸圧縮挙動のシミュレーション結果

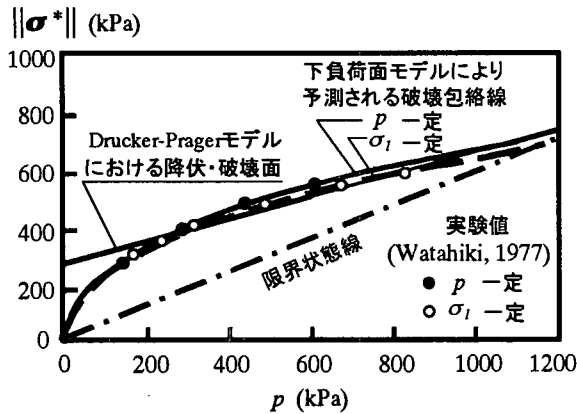


図-11 排水三軸圧縮状態における破壊応力の予測結果

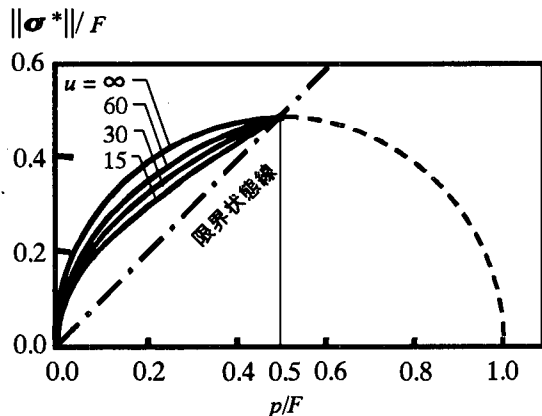


図-12 下負荷面モデルによる破壊包絡線の予測

4.3 破壊応力

締め固めカオリン粘土の側圧一定排水三軸圧縮試験³⁹⁾で得られた破壊応力の包絡線に対する両モデルの予測結果の比較を図11に示す。材料定数および初期値は次の通りである。

$$\begin{aligned} \rho &= 0.1, \quad \gamma = 0.008, \quad \nu = 0.3, \quad m = 0.60, \\ m_y &= 0.39 \text{ for the Drucker-Prager model,} \\ u &= 40.0 \text{ for the subloading surface model,} \\ F_0 &= 2,000.0 \text{ kPa.} \end{aligned}$$

下負荷面モデルにおける破壊応力の包絡線は、 $\bar{M}_p = 0$ における応力点を結ぶ曲線として与えられる。実測される破壊応力の包絡線は負荷経路に依存して変化する傾向が見られるが、下負荷面モデルはこの特徴を妥当に予測している。なお、同様の実験事実は広く実測されている^{40), 41), 42)}。一方、Drucker-Pragerモデルでは、破壊応力面は、初期降伏面と与えられるので、負荷条件の違いによる破壊応力の相違を表現できない。また、図12に下負荷面モデルにより計算される破壊応力の包絡線を硬化関数 F で無次元化して示しているが、破壊応力の包絡線も図7の結果と同様、材料定数 u の大きさに依存する。

5. 基本的特性

Drucker-Pragerモデルおよび下負荷面モデルの基本的特性の相違点を以下に列記する。

1) 滑らか条件

下負荷面モデルは負荷状態において滑らか条件(34)を常に満足するが、Drucker-Pragerモデルでは応力が降伏面に達すると本条件に抵触する。ゆえに、Drucker-Pragerモデルによると、降伏時に剛性係数の急変、すなわち、鋭く折れ曲がった応力-ひずみ曲線が予測される。

2) 負荷基準

下負荷面モデルの負荷基準は、応力が下負荷面上に常に存在することを前提としているので、式(33)に示すように、 $\text{tr}(\mathbf{NED})$ の符号判定のみが必要である。これに対して、Drucker-Pragerモデルでは、式(18)に示されるように、負荷基準の判定のみならず、降伏判定も要する。

3) 流動則：剛性係数テンソルの対称性

下負荷面モデルでは、式(32)'で示されるように関連流動則を用いているので、剛性係数テンソルは対称となる。一方、Drucker-Pragerモデルでは、非関連流動則を採用するので、式(17)'で示されるように、剛性係数テンソルは非対称となり、境界値問題に関する変分原理の定式化において困難を伴う。さらに、非関連流動則によると、大きさ一定で、方向が連続的に変化するストレッチングの入力に対して、常に鋭い鼻(nose)をもった応力速度の応答包絡線が予測される⁴³⁾。

4) 材料定数

Cam-clayモデルにおける材料定数 ρ , γ および m に加え、下負荷面モデルに追加される材料定数は、正規降伏比 R の発展則を規定する u のみである。これに対して、Drucker-Pragerモデルでは2つの材料定数 m_y および m_p を導入する必要がある。

ある。

5) 数値計算の容易さ

下負荷面モデルでは、塑性負荷過程において、応力が自動的に正規降伏面に近づくように制御されるので、ステップの粗い数値計算が許容される。一方、Drucker-Prager モデルでは、塑性負荷過程において、応力が常に降伏面上に存在するように修正する特殊な数値計算法、例えば、Euler 法²⁹⁾、mean normal 法³⁰⁾、radial return 法³¹⁾等の導入が不可欠である。加えて、前述したように降伏判定が不可欠であるので、数値計算は一段と複雑になる。

6) 破壊応力

下負荷面モデルにより予測される破壊応力は、実験事実と同様、材料特性ではなく負荷条件に依存する。これに対して、Drucker-Prager モデルでは、破壊応力は、材料特性として与えられ、負荷条件に無関係に決まることになる。

7) 関連および非関連流動則に対する熱力学的考察

熱力学的立場から摩擦性材料に対しては関連流動則が成り立たず、非関連流動則が適用されるべきであるとの主張がなされている^{44), 45), 46), 47), 48), 49)}。これらの熱力学的考察は、Ziegler の直交条件⁵⁰⁾に基づく消散関数の仮定に基づくものであるが、より一般的な消散関数を仮定することにより、材料の摩擦性の有無によらず、関連、非関連いずれの流動則も得られる⁵¹⁾。つまり、熱力学的立場から、土に対して関連、非関連いずれの流動則を採用すべきであるかは結論し得るに至っていない。

6. 結言

本論文では、Drucker-Prager モデルおよび下負荷面モデルによる過圧密土の変形挙動に関する予測特性を比較するとともに、これらの基本特性の相違について論じた。軟化現象を伴う過圧密土の変形挙動は、降伏面の内部を純粋弾性域として過度に理想化された古典弾塑性構成式によっては合理的に予測できないことを指摘した。一方、非古典弾塑性論に属する下負荷面モデルは、古典弾塑性構成式に見られる種々の難点を含まない合理的な基本構造を有し、種々の負荷条件における過圧密土の変形挙動を現実的に表現し得ることが示され、正規圧密状態から過圧密状態にわたる広範な土の力学挙動の予測に適用可能なモデルであると判断される。

参考文献

- 1) Drucker, D. C.: Conventional and unconventional plastic response and representation, *Appl. Mech. Rev. (ASME)* Vol.41, pp.151-167, 1988.
- 2) Schofield, A.N. and Wroth, C.P.: *Critical State Soil Mechanics*, London: McGraw-Hill, 1968.
- 3) Drucker, D. C. and Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Math.* Vol.10, pp.157-165, 1952.
- 4) Khosla, V.K. and Wu, T.H.: Stress-strain behavior of sand, *J. Geotech. Eng. Div. (ASCE)* Vol.102, No. GT4, pp.303-321, 1976.
- 5) Sandler, I., Dimaggio, R.L. and Baladi, G. Y.: Generalized cap model for geological materials, *J. Geotech. Eng. Div. (ASCE)*, Vol.102, No. GT7, pp.683-699, 1976.
- 6) Yamada, S. E. and Abou-Sayed, A. S.: Cap model guided by energy concept, *J. Geotech. Eng. Div. (ASCE)*, Vol.105, No. GT2, pp.183-200, 1979.
- 7) Bousshine, L., Chaaba, A. and De Saxce, G.: Softening in stress-strain curve for Drucker-Prager non-associated plasticity, *Int. J. Plasticity* Vol.17, pp.21-46, 2001.
- 8) Mroz, Z.: On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol.18, pp.1-34, 1966.
- 9) Mroz, Z.: On the description of anisotropic workhardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- 10) Iwan, W. D.: On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech. (ASME)* Vol.34, pp.612-617, 1967.
- 11) Mroz, Z., Norris, V. A. & Zienchiewicz, O. C.: An anisotropic, critical state model for soils subjected to cyclic loading, *Geotechnique*, Vol.31, pp.451-469, 1981.
- 12) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P.: A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mecha*, Vol.23, pp.173-192, 1975.
- 13) Krieg, R. D.: A practical two surface plasticity theory, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.42, pp.641-646, 1975.
- 14) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th ICSMFE, Special Session 9, Tokyo)* JSSMFE, pp.73-82, 1977.
- 15) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.47, pp.266-272, 1980.
- 16) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.25, pp.917-945, 1989.
- 17) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *Int. J. Plasticity* Vol.9, pp.525-549, 1993.
- 18) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.721-748, 1993.
- 19) Hashiguchi, K.: The extended flow rule in plasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.13, pp.37-58, 1997.
- 20) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion, *Soils and Found.*, Vol.40, No. 3, pp.155-161, 2000.
- 21) Hashiguchi, K. and Yoshimaru, T.: A generalized formulation of the concept of nonhardening region, *Int. J. Plasticity*, Vol.11, pp.347-365, 1995.
- 22) Hashiguchi, K.: Time-dependent Elastoplastic Constitutive equation, *Archives of Mechanics*, Vol.52 (Prof. Z. Mroz's 70th anniversary volume), pp.609-628, 2000.

- 23) Topolnicki, M.: An elasto-plastic subloading surface model for clay with isotropic and kinematic mixed hardening parameters, *Soils and Found.*, Vol.30, No. 2, pp.103-113, 1990.
- 24) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behavior of heavily over-consolidated clay near/at critical state, *Soils and Found.* Vol.37, No. 1, pp.13-28, 1997.
- 25) Hashiguchi, K. and Chen, Z.-P.: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.22, pp.197-227, 1998.
- 26) Hashiguchi, K.: On the loading criterion, *Int. J. Plasticity*, Vol.10, pp.871-878, 1994.
- 27) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with anisotropic hardening and elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.48, pp.297-301, 1981.
- 28) Hashiguchi, K.: A mathematical modification of two surface model formulation in plasticity, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol.24, pp.987-1001, 1988
- 29) Yamada, Y., Yoshimura, N., and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- 30) Pillinger, I., Hartley, P., Sturgess, C. E. N. & Rowe, G. W.: Use of a mean-normal large-strain elastic-plastic finite element solutions, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.28, pp.23-29, 1986.
- 31) Krieg, R. D. & Krieg, D. B.: Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic models, *J. Pressure Vessel Tech. (ASME)*, Vol.99, pp.510-515, 1977.
- 32) Hashiguchi, K.: Isotropic hardening theory of granular media, *Proc. Japan Soc. Civil Eng.* Vol.227, pp.45-60, 1974.
- 33) Hashiguchi, K.: On the linear relations of $V\text{-ln}p$ and $\ln v\text{-ln}p$ for isotropic consolidation of soils, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.19, pp.367-376, 1995.
- 34) Hashiguchi, K. and Collins, I.F.: Stress rate-elastic stretching relations in elastoplastic constitutive equations, *Soils and Found.*, in press, 2001.
- 35) Roscoe, K.H. and Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay, *Engineering Plasticity* (eds. Heyman, J. and Leckie, F.A.), London: Cambridge University Press, pp.535-608, 1968.
- 36) Taylor, D. W.: *Fundamentals of Soil Mechanics*, New York: John Wiley & Sons, 1948.
- 37) Skempton, A.W. and Brown, J.D.: A landslide in boulder clay at Selset Yorkshire, *Geotechnique*, Vol.11, pp.280-293, 1961.
- 38) Bishop, A. W., Webb. D. L. and Lewin, P.I.: Undisturbed samples of London clay from the Ashford Common shaft: strength-effective stress relationships, *Geotechnique* Vol.15, pp.1-31, 1965.
- 39) Watahiki, K.: Deformation and strength of compacted kaolin clay under triaxial compression, extension and creep conditions, *Soils and Found.*, Vol.17, No. 4, pp.75-86, 1977.
- 40) Parry, R. H. G.: Triaxial compression and extension tests on remolded saturated clay, *Geotechnique*, Vol.11, pp.166-180, 1961.
- 41) Pender, M. J.: A model for the behavior of overconsolidated soil, *Geotechnique*, Vol.28, pp.1-25, 1978.
- 42) Reddy, K.R. and Saxena, S.K.: Effects of cementation on stress-strain and strength characteristics of sands, *Soils and Found.*, Vol.33, No. 4, pp.121-134, 1993.
- 43) Hashiguchi, K.: Inexpedience of the nonassociated flow rule, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.15, pp.753-756, 1991.
- 44) Houlsby, G. T.: The work input to a granular material, *Geotechnique* Vol.29, pp.354-358, 1979.
- 45) Houlsby, G. T.: A study of plasticity theories and their applicability to soils, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1981.
- 46) Houlsby, G. T.: A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermodynamics, *Proc IUTAM Conf Deformation and Failure of Granular Materials*, Delft, pp.109-118, 1982.
- 47) Houlsby, G.T.: Interpretation of dilatation as a kinematic constraint, *Modern Approaches to Plasticity* (ed. Kolymbas, D.), Elsevier (New York), pp.19-38, 1993.
- 48) Modaressi, H., Laloui, L. & Aubry, D.: Thermodynamical approach for Camclay-family models with Roscoe-type dilatancy rules, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.18, pp.133-138, 1994.
- 49) Collins, I. F. and Houlsby, G. T.: Application of the thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials. *Proc. Royal Soc London A.* 453, pp.1975-2001, 1997.
- 50) Ziegler, H.: Discussion of some objections to the thermomechanical orthogonality, *Ingenier-Arch.*, Vol.50, pp.149-164, 1981.
- 51) Hashiguchi, K.: On the thermomechanical approach to the formulation of constitutive equations, *Soils and Found.*, in press, 2001.

(2001年4月20日 受付)