

土質材料におけるせん断変形挙動の降伏曲線形状への依存性

Dependency of Shear Deformation Behaviour in Soil upon Shape of Yield Curve

守 時 一*・ 及 川 洋**・ 荻 野 俊 寛***

Hitoshi MORITOKI, Hiroshi OIKAWA and Toshihiro OGINO

*非会員 工博 秋田大学名誉教授 自宅 (〒010-0964 秋田市八橋鯉沼町 4-7)

**正会員 工博 秋田大学教授 土木環境工学科 (〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)

***正会員 工修 秋田大学助手 土木環境工学科 (〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)

The volumetric change accompanying with plastic shear deformation causes the dependency of q on p where p and q respectively represent the hydrostatic pressure and the equivalent deviatoric stress in yielding. Their dependency is called yield curve or yield function. In geomechanics Cam-clay and cap models have been frequently used as yield curve. In the last report we examined the shapes of yield curve based on the deformation behaviour observed in the published experiments where a parallel piped specimen was compressed under plane strain condition or a cylindrical specimen was extended in axial direction increasing confining pressure. In many cases the shape of yield curve were different from those in Cam-clay and cap models. In this paper the inverse prediction is discussed where the deformation behaviour is predicted according to the yield curve and hardening characteristics obtained in the last report. First, the method of the inverse treatment is proposed, and then the comparison is made between predicted behaviour and the observed one. On the whole the inverse prediction is successful, but an abnormal prediction arises in the case that the term $f_r + a$ tends to zero or to be negative where f_r represents the ratio of compressive volumetric strain rate to distortional strain rate and a is the hardening ratio constant. So far geomechanics has been developed under the condition of $a=0$. In such framework the abnormal prediction can be brought about at positive volumetric strain rate, and so introducing of hardening ratio constant must be considered. Stress point (p, q) moves with progressive deformation. Under plane strain compression the stress point approaches to the critical state line with the increase of deformation, and finally reaches to it. It is proved that the movement of stress point always stops on the critical state line regardless of the hardening characteristics of deforming soil.

Key Words : yield curve, hardening characteristics, basic yield curve, deformation behaviour

1. 緒 言

土質材料の圧縮変形特性は地盤強度の実体を把握する上で必要不可欠な基礎資料を与えている。基本的な変形挙動は比較的単純な材料試験、例えば、円柱圧縮試験あるいは角柱の平面ひずみ圧縮試験などから求められることが多い。土質材料が負荷履歴を受けているとき、そこでどのような変形挙動がもたらされるかの情報は構成関係を介して予測される。このため、土質材料の変形挙動を総合的に理解するには、当然のこととして、塑性変形に関する構成関係が正しく構築されていなければならない。

土質材料は体積変化を示す点に特徴があり、塑性挙動における降伏曲線(相当偏差応力 q の静水圧応力 p への依存性)はひがみ変形と体積変化に関する関係を規制してい

る。降伏曲線モデルとしてカムクレイモデル¹⁾は著名で、数値実験(せん断帯解析)などで常用されていることが多い。これに加えて、円形、あるいは楕円形を基本曲線形状としたキャップモデル²⁾の提唱もある。これらのモデルに共通していることは、基本曲線形状が塑性変形に伴い相似膨脹する降伏曲線を仮定していることである。この相似膨脹は降伏曲線を同定する上で現時点では容認せざるを得ない仮定であるが、降伏曲線の基本曲線形状(相似膨脹の基本となる形状)が本来どのような形状を呈すべきかについての議論は少ない。構成関係は現実の変形挙動に基づいて構築されていなければならないが、降伏曲線に関して変形挙動からこれを同定しようとする試みは少ない。Miura ら³⁾、Yasufuku ら⁴⁾は非常に綿密な実験観察を行い、応力ベクトルと降伏曲線における線素ベクトルとの間の

相対角度が応力ベクトルの偏角と一義的な関係にあることを見出し、その関係を同定し、これを用いて降伏曲線形状を求めている。これに対して、筆者らは連続負荷における変形経過から基本降伏曲線を同定する手法を前報⁵⁾で紹介し、変形挙動と降伏曲線形状とのおおまかな関連を調べた。そこでは、カムクレイモデルで提唱されているような降伏曲線形状は特別な場合を除いて一般的には予測されない結果が得られた。

近年、数値実験が随所で行われ、多くの技術情報を与えている。その有用性は任意に設定した負荷状態においてそこでの変形挙動を自由に予測することができる点にあるが、予測された変形挙動が正しく求められていることの保証がなければならぬ。これに関する検証例として本報では、前報で求めた、実測された圧縮試験に基づく降伏曲線を用いて、この逆予測に相当する演算を行い、構成関係と設定負荷条件から逆に変形挙動を予測し、これと実測された変形挙動との間の整合性について比較検討を試みた。そこでは、これまで筆者の一人が指摘してきた、従来の構成関係における概念上の矛盾点⁶⁾に遭遇する事例も現れた。

2. 基礎関係式

2. 1 構成関係式

応力、ひずみ成分はそれぞれ引張り、伸びを正值とする。静水圧応力と圧縮体積ひずみ速度は

$$p \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (1a)$$

$$\dot{\varepsilon}_p \equiv -\dot{\varepsilon}_{kk} \quad (1b)$$

である。偏差応力と偏差ひずみ速度は

$$\sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}'_{ij} \equiv \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_p\delta_{ij} \quad (2)$$

である。相当偏差応力と相当偏差ひずみ速度は

$$q \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \quad (3a)$$

$$\dot{\varepsilon}_q \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}'_{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij}} \quad (3b)$$

で定義される。土質材料は圧力依存性を示す点に特徴があり、いま、 p 、 q の依存関係を降伏関数あるいは降伏曲線と呼び、

$$f(p, q, p_y) = 0 \quad (4)$$

で表す。ここで、 p_y は、土質材料の塑性変形に伴う硬化の状態を表す変数であり、硬化相当圧力と呼ぶことにする。対象とする土質材料は、特別な場合を除き、剛塑性体とし、等方性を維持しているものと仮定する。降伏関数 f を時間微分すると

$$\dot{f} = N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} + M_y\dot{p}_y = 0 \quad (5)$$

の関係にある。ここで、

$$N_{ij} \equiv f_p \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + f_q \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6a)$$

$$M_y \equiv \frac{\partial f}{\partial p_y} \quad (6b)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{kj} - \sigma_{kj}\omega_{ki} \quad (6c)$$

であり、

$$f_p \equiv \frac{\partial f}{\partial p}, \quad f_q \equiv \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{ji} - v_{ji}) \quad (7)$$

と置いている。 $\dot{\sigma}'_{ij}$ はJaumannの応力速度であり、 v_i は変位速度成分を表す。降伏関数 f を塑性ポテンシャルとするとき、構成式は $\dot{\varepsilon}$ を比例係数として

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\Lambda} N_{ij} \quad (8)$$

で表される。式(1a)、(3a)より

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2q}\sigma'_{ij} \quad (9)$$

であるので、式(6a)は

$$N_{ij} = -\frac{1}{3}f_p\delta_{ij} + \frac{3}{2q}f_q\sigma'_{ij} \quad (10)$$

と表される。式(10)より

$$f_p = -N_{kk}, \quad f_q = Q \quad (11)$$

となる。ここで、

$$Q \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{N_{rs}N_{rs} - \frac{1}{3}N_{rr}N_{ss}} \quad (12)$$

と置いている。これらを用いて

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\Lambda} f_p, \quad \dot{\varepsilon}_q = \dot{\Lambda} f_q \quad (13)$$

と表すことができる。式(5)の表現を変え

$$\dot{f} = \dot{\sigma}'_f - \dot{\Lambda} h = 0 \quad (14)$$

と表す。 $\dot{\sigma}'_f$ を全相当応力速度、 h を塑性係数と呼ぶ。ここで

$$\dot{\sigma}'_f \equiv N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} \quad (15a)$$

$$M_y\dot{p}_y \equiv -\dot{\Lambda} h \quad (15b)$$

の関係にある。

2. 2 硬化特性

硬化に寄与する塑性ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_y$ で表し、その時間積分値を ε_y とする。これらをそれぞれ硬化ひずみ速度、硬化ひずみと呼ぶことにする。これにより、硬化相当圧力は

$$p_y = g(\varepsilon_y^T) \quad (16a)$$

$$\bar{p}_y \equiv \frac{p_y}{p_0} = \bar{g}(\varepsilon_{y0}, \varepsilon_y) \quad (16b)$$

$$\varepsilon_y^T = \varepsilon_{y0} + \varepsilon_y, \quad \varepsilon_y \equiv \int d\varepsilon_y, \quad \dot{p}_y = \frac{d\bar{g}}{d\varepsilon_y} \dot{\varepsilon}_y \quad (16c)$$

で表されるものとする。ここで、上符号 $\bar{}$ と p_0 について説明する。試験片は最初、応力零の状態から初期設定圧力

p_0 まで各方向に一樣に圧密変形を受け、しかる後設定された変形様式に従って負荷（二次負荷）されるものとする。このとき、 p_0 は応力関連成分の基準値となる。応力関連成分を p_0 で規格化し、無次元量とした諸量に上符合 $\sim$ を付した。 ε_{y0} は圧密変形における硬化ひずみを、 ε_y はその後の硬化ひずみを表し、これらの和を ε_y^T と置いている。 $\bar{p}_y$ は式 (16b) におけるように ε_{y0} に依存しているので、 $\bar{p}_y$ の使用にあたってはこのことについての配慮が必要である。硬化ひずみ速度を

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_p + a\dot{\varepsilon}_q = \dot{\Lambda}(f_p + af_q) \quad (17)$$

と置く。ここで、 a は定数であり、硬化比率定数と呼ぶことにする。このとき、降伏曲線の膨張可能な領域で $\dot{\varepsilon}_y > 0$ (すなわち $f_p + af_q > 0$) を満足する定数 a が設定されているものとする。塑性係数は式 (15b) より

$$h = -M_y \frac{dg}{d\varepsilon_y} (f_p + af_q) \quad (18)$$

となる。式 (16a) の硬化関数 g は ε_y に対して単調増加の関係にあり、 $dg/d\varepsilon_y$ は零にはならない。さらに $f_p + af_q > 0$ でなければならないので、 $h = 0$ は常に $M_y = 0$ と対応している。

以下の取り扱いにおいては応力関連成分は p_0 で規格化し、これらの無次元量に関して考察するものとする。

2. 3 基本降伏曲線

横軸に $\bar{p}$ 、縦軸に $\bar{q}$ を採る式 (4) の降伏曲線は $\bar{p}_y$ の増大に伴って相似の中心を原点に持ち、相似形を維持して膨張するものと仮定する。初期設定圧力 p_0 における降伏曲線は $\bar{p}$ 軸と単位で交差し、 $\bar{p}_y = 1$ である。この降伏曲線は膨張する降伏曲線の基本形状を与えるものであり、基本降伏曲線と名付ける。基本降伏曲線に関する諸量（当然 p_0 により規格化されている）に上符合 $\sim$ を付して表す。これを図-1に示す。二次負荷開始時には基本降伏曲線上の応力点は点 S(1,0)

$$\bar{p}_0 = 1, \bar{q}_0 = 0 \quad (19)$$

に位置している。

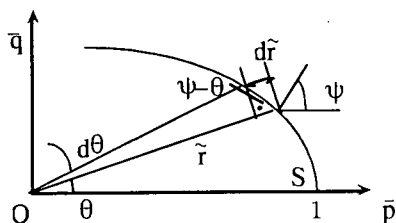


図-1 基本降伏曲線

塑性変形に伴って降伏曲線が膨張し、 $\bar{p}$ 軸との交点が $\bar{p}_y$ となった降伏曲線上に応力点が移動し、現時点において応力空間上の点 $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$ に位置しているとする。このときの応力点と原点を結ぶ動径を $\bar{r}$ 、動径が $\bar{p}$ 軸となす偏角を θ で表すと

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad (20)$$

$$\bar{p} = \bar{r} \cos \theta, \quad \bar{q} = \bar{r} \sin \theta$$

の関係にある。この応力点に対して同一の偏角 θ を与える基本降伏曲線上の点が基本対応点 $(\bar{p}, \bar{q})$ である。この基本対応点における動径 $\bar{r}$ と偏角 θ は

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad (21)$$

$$\bar{p} = \bar{r} \cos \theta, \quad \bar{q} = \bar{r} \sin \theta$$

である。ここで、基本降伏曲線の形状を

$$\bar{r} = k(\theta) \quad (22)$$

で表す。降伏曲線における相似膨張の仮定から硬化相当圧力は

$$\bar{p}_y = \frac{\bar{r}}{\bar{r}} \quad (23)$$

の関係にある。一般に、素材の硬化特性は式 (16b) で与えられている。基本対応点における基本降伏曲線の法線が $\bar{p}$ 軸となす角度を ψ とすると

$$f_r = \frac{1}{\tan \psi} \quad (24)$$

の関係にある。ここで、

$$f_r \equiv \frac{f_p}{f_q} \quad (25)$$

と置いている。動径の時間変化は図-1を参照して

$$\dot{\bar{r}} = -\bar{r} \tan(\psi - \theta) \dot{\theta} \quad (26)$$

の関係にある。式 (20) より応力点の動径と偏角の変化は

$$\dot{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}} (\bar{p} \dot{\bar{p}} + \bar{q} \dot{\bar{q}}), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\bar{r}^2} (\bar{p} \dot{\bar{q}} - \bar{q} \dot{\bar{p}}) \quad (27)$$

である。

2. 4 主応力場における変形

主応力下にある次のような圧縮負荷を想定する。試験片は初期設定圧力 p_0 まで一樣に圧密変形を受け、しかる後各主方向独立に負荷されるものとする。初期設定圧力 p_0 の状態からの新たな負荷を二次負荷と呼び、その応力成分を $D\sigma_i$ で表す。二次負荷を

$$D\bar{\sigma}_1 = -\zeta\kappa, \quad D\bar{\sigma}_2 = -\alpha\kappa, \quad D\bar{\sigma}_3 = -\beta\kappa \quad (28)$$

と置く。ここで、 κ は無次元時間に対応する尺度である。 ζ はここでは定数であり、 α 、 β は変数とする。これにより、応力値は

$$\bar{\sigma}_1 = -(1 + \zeta\kappa), \quad \bar{\sigma}_2 = -(1 + \alpha\kappa) \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_3 = -(1 + \beta\kappa)$$

であり、偏差応力、静水圧応力、相当偏差応力はそれぞれ

$$\bar{\sigma}'_1 = \frac{1}{3}(-2\zeta + \alpha + \beta)\kappa \quad (30a)$$

$$\bar{\sigma}'_2 = \frac{1}{3}(\zeta - 2\alpha + \beta)\kappa \quad (30b)$$

$$\bar{\sigma}'_3 = \frac{1}{3}(\zeta + \alpha - 2\beta)\kappa \quad (30c)$$

$$\bar{p} = 1 + \frac{1}{3}(\zeta + \alpha + \beta)\kappa \quad (31a)$$

$$\bar{q} = \kappa \bar{q}^* \quad (31b)$$

$$\bar{q}^* \equiv \sqrt{\zeta^2 - \zeta\alpha - \zeta\beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} \quad (31c)$$

となる。\$N_i\$は式 (10) より、\$f_q \neq 0\$ であるとき

$$N_i = -\frac{1}{3}f_q \left(f_r - \frac{9}{2\bar{q}} \bar{\sigma}'_i \right) \quad (32)$$

である。ひずみ速度比

$$\gamma \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}, \quad \delta \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (33)$$

を定義する。これらは構成式 (8) より

$$\frac{N_2}{N_1} = \gamma, \quad \frac{N_3}{N_1} = \delta \quad (34)$$

であり、これらより

$$\dot{\varepsilon}_p = -\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_1(1 + \gamma + \delta) \quad (35a)$$

$$\dot{\varepsilon}_q = \frac{2}{3}|\dot{\varepsilon}_1| \sqrt{1 - \gamma - \delta + \gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2} \quad (35b)$$

の関係にある。式 (31a,b) より \$\bar{p}\$, \$\bar{q}\$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \frac{1}{3} \left\{ (\zeta + \alpha + \beta)\dot{\kappa} + \kappa(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \right\} \\ \dot{\bar{q}} &= \kappa \dot{\bar{q}}^* \end{aligned} \quad (36)$$

$$+ \frac{\kappa}{2\bar{q}^*} \left\{ (-\zeta + 2\alpha - \beta)\dot{\alpha} + (-\zeta - \alpha + 2\beta)\dot{\beta} \right\}$$

である。式 (34) に式 (32) を適用し、式 (30a,b,c) を代入して

$$\begin{aligned} f_q \bar{q}^* &= \frac{3}{2} \frac{\zeta - 2\alpha + \beta - (-2\zeta + \alpha + \beta)\gamma}{(1 - \gamma)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\zeta + \alpha - 2\beta - (-2\zeta + \alpha + \beta)\delta}{(1 - \delta)} \end{aligned} \quad (37)$$

を得る。さらに、式 (37) の後半の等式より

$$(\zeta - \beta)\gamma - (\zeta - \alpha)\delta = \alpha - \beta \quad (38)$$

の関係がある。

2. 5 状態量の決定

変形挙動を調査する実験の変形様式に基づいて \$\alpha, \beta\$ あるいは \$\gamma, \delta\$ の間に依存関係が課せられる。\$\alpha, \beta\$ についてはどちらか一つが設定されているか、あるいはこれらが等置されているかのいずれかである。\$\gamma, \delta\$ についても、どちらか一つが設定されているか、等置されているかのいずれかである。前者の場合、他の一つは式 (38) の関係に基

づいて決定される。そこで、ここでは \$\alpha, \delta\$ が設定されているものとして論を進める。

硬化ひずみ \$\varepsilon_y\$ に対応してそのときの状態量 \$\theta, \beta\$ を知ることが求められる。これらが判明すると他の状態量は以下のように順次決められる。まず、\$\theta\$ から式 (22) により \$\bar{r}\$ が求められる。\$\bar{p}_y\$ は硬化特性として式 (16b) の関数 \$\bar{g}\$ で与えられ、既知である。式 (23) より \$\bar{r}\$ を、式 (20) を用いて \$\bar{p}, \bar{q}\$ を求めることができる。式 (31a,b) の \$\bar{p}, \bar{q}\$ から \$\kappa\$ が算出され、これを用いて式 (29) から \$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2\$, さらに \$\beta\$ を用いて \$\bar{\sigma}_3\$ が判明する。

ここで、状態量 \$\theta, \beta\$ の算出法について述べる。式 (20) における \$\bar{p}, \bar{q}\$ の \$\bar{r}\$ に式 (23) を適用し、式 (31a,b) から \$\kappa\$ を消去すると

$$f_1 \equiv 3\bar{q}^* + \bar{g}k \left\{ (\zeta + \alpha + \beta)\sin\theta - 3\bar{q}^*\cos\theta \right\} = 0 \quad (39)$$

の関係をj得る。式 (22) より式 (26) は

$$\tan(\psi - \theta) = -\frac{k'}{k} \quad (40)$$

と表せるので、式 (24) より

$$f_r = \frac{k \cos\theta + k' \sin\theta}{k \sin\theta - k' \cos\theta} \quad (41)$$

となる。ここで、プライム記号 ' はその関数の導関数を表す。式 (37) に式 (41) を代入することにより

$$\begin{aligned} f_2 \equiv 2\bar{q}^* (1 - \delta) & \left\{ k \cos\theta + k' \sin\theta \right. \\ & \left. - 3 \left\{ \zeta + \alpha - 2\beta - (-2\zeta + \alpha + \beta)\delta \right\} \right. \\ & \left. \times (k \sin\theta - k' \cos\theta) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

を得る。これらの \$f_1, f_2\$ は \$\theta, \beta\$ を未知数として含み、これら \$\theta, \beta\$ は式 (39), (42) の関係を同時に満足する値を採らなければならない。しかし、\$f_1, f_2\$ は \$\theta, \beta\$ に関して線形ではないので、最初に解に近いこれらの値を予測し、順次近似度を高めながら解を算出することになる。予測値 \$\theta, \beta\$ の下では必ずしも \$f_1, f_2\$ を零にするとは限らない。

そこで、これら予測値に関して求められた \$f_1, f_2\$ をそれぞれ \$\Delta f_1, \Delta f_2\$ で表すことにする。\$f_1, f_2\$ を零にする修正値 \$\Delta\theta, \Delta\beta\$ は

$$f_{i\theta}\Delta\theta + f_{i\beta}\Delta\beta + \Delta f_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (43)$$

で近似することができる。ここで

$$f_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial j} \quad (i = 1, 2, j = \theta, \beta) \quad (44)$$

である。式 (43) を \$\Delta\theta, \Delta\beta\$ について解き、これらにより \$\theta, \beta\$ を修正する。この操作を順次繰り返すことで \$\Delta f_i\$ を零に収束させ、\$\theta, \beta\$ の解を得る。\$f_{ij}\$ は具体的には

$$f_{1\theta} = \bar{g}k \left\{ (\zeta + \alpha + \beta)\cos\theta + 3\bar{q}^*\sin\theta \right\}$$

$$+ \bar{g} k' \left\{ (\zeta + \alpha + \beta) \sin \theta - 3\bar{q}^* \cos \theta \right\} \quad (45a)$$

$$f_{1\beta} = \bar{g} k \sin \theta - \frac{3}{2\bar{q}^*} (1 - \bar{g} k \cos \theta) (\zeta + \alpha - 2\beta) \quad (45b)$$

$$\begin{aligned} f_{2\theta} = & 2\bar{q}^* (1 - \delta) \left\{ -k \sin \theta + k' \cos \theta \right\} \\ & - 3 \left\{ \zeta + \alpha - 2\beta - (-2\zeta + \alpha + \beta) \delta \right\} \\ & \times (k \cos \theta + k' \sin \theta) \\ & + 2\bar{q}^* (1 - \delta) \left\{ k' \cos \theta + k'' \sin \theta \right\} \\ & - 3 \left\{ \zeta + \alpha - 2\beta - (-2\zeta + \alpha + \beta) \delta \right\} \\ & \times (k' \sin \theta - k'' \cos \theta) \end{aligned} \quad (45c)$$

$$\begin{aligned} f_{2\beta} = & -\frac{(1 - \delta)}{\bar{q}^*} (k \cos \theta + k' \sin \theta) (\zeta + \alpha - 2\beta) \\ & + 3(2 + \delta) (k \sin \theta - k' \cos \theta) \end{aligned} \quad (45d)$$

である。解 θ , β が確定すると、式 (38) から

$$\gamma = \frac{\alpha - \beta + (\zeta - \alpha) \delta}{\zeta - \beta} \quad (46)$$

を、式 (41) から f_r を、さらに式 (24) から ψ が求められる。

最初に予測される θ , β の値がその解としての値から極端にかけ離れていると上記の逐次近似法で収束値を得ることが困難となる場合がある。数値実験の過程では、変形進行因子 ε_y は順次増大させ、変形増分を各段階毎に加算することで変形を追跡している。1ステップ前の状態における θ , β が求められていると、考察時点の θ , β の値を高い精度で予測することが可能となる。前述の手法で解 θ , β が既知となると、これらの時間微分 $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ は以下により算出できる。

$$\begin{aligned} f_{1i}, f_{2i} \text{ は常に零であるので} \\ f_{1i} = f_{i\theta} \dot{\theta} + f_{i\beta} \dot{\beta} + f_{i\alpha} \dot{\alpha} + f_{i\gamma} \dot{\gamma} = 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (47)$$

を満足していなければならない。ここで、 $f_{i\alpha}$, $f_{i\gamma}$ はそれぞれ j を α , γ とした式 (44) の定義に従っている。具体的には

$$\begin{aligned} f_{1\alpha} = & \bar{g} k \sin \theta - \frac{3}{2\bar{q}^*} (1 - \bar{g} k \cos \theta) (\zeta + \beta - 2\alpha) \\ f_{2\alpha} = & -\frac{(1 - \delta)}{\bar{q}^*} (k \cos \theta + k' \sin \theta) (\zeta + \beta - 2\alpha) \\ & - 3(1 - \delta) (k \sin \theta - k' \cos \theta) \\ f_{1\gamma} = & \bar{g} k' \left\{ (\zeta + \alpha + \beta) \sin \theta - 3\bar{q}^* \cos \theta \right\} \\ f_{2\gamma} = & 0 \end{aligned} \quad (48)$$

である。 $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$ は指定しているので、式 (47) から $\dot{\theta}$,

$\dot{\beta}$ が算出される。これにより次ステップにおける予測値 θ , β を適当な外挿法を用いて求めることができる。

3. 変形様式

直方体試験片に平面ひずみ変形の拘束を与える圧縮実験と、円柱試験片にその側圧力を増大させることにより円柱を伸長させる実験を取り上げる。前者に関しては Viggiani ら⁷⁾ と Desmes ら⁸⁾ の実験を、後者に関しては Desmes ら⁸⁾ の実験を参照している。前報⁵⁾ で、これらの実験値に基づく降伏曲線、硬化特性はすでに求められている。これらの降伏曲線と硬化特性を用い、本報では上記2種類の実験様式に従って変形挙動を調査し、これと実験値との間の比較を行うことを目的としている。

3. 1 平面ひずみ圧縮変形

平面ひずみ条件下における圧縮試験を想定する。いま、圧縮方向を座標軸1の方向に採り、座標軸3の方向に平面ひずみ拘束

$$\varepsilon_3 = 0 \quad (49)$$

を課すものとする。座標軸2の方向には、圧密時の圧力 P_0 を保持し負荷するものとする。このとき、変形拘束として

$$\zeta = 1, \alpha = 0, \dot{\alpha} = 0, \delta = 0 \quad (50)$$

と置くことができる。この条件下において2.5節の手法に従って状態量を決定する。

3. 2 円柱伸長

円柱試験片を加圧容器内に入れ、側圧力を増大することにより円柱を軸方向に伸長させる実験を対象としている。この円柱伸長では円柱の軸方向垂直応力を一定の初期圧力 P_0 に保持し、側圧力のみを増加させる実験がなされている。円柱軸方向に座標軸1を採る。座標軸2, 3はこれに垂直で互いに直交している。このとき、拘束条件は

$$\zeta = 0, \alpha = \beta = 1, \gamma = \delta \quad (51)$$

であり、 α , β は変数ではなくなる。それゆえ、解 θ の修正とその変化速度はそれぞれ式 (43), (47) より

$$\Delta \theta = -\frac{\Delta f_{1i}}{f_{1\theta}}, \quad \dot{\theta} = -\frac{f_{1\gamma}}{f_{1\theta}} \dot{\gamma} \quad (52)$$

で算出される。ここでは γ は式 (37) より直接

$$\gamma = \frac{2f_r + 3}{2(f_r - 3)} \quad (53)$$

で与えられる。

4. 変形挙動の逆予測

本研究で参照した実験を下記のように呼ぶことにする。

平面ひずみ圧縮実験に関する Viggiani らによる実験⁷⁾を実験 A, Desrues らのそれ⁸⁾を実験 B とし, 側圧負荷による円柱伸長に関して Desrues らによる実験⁸⁾を実験 C とした。

4. 1 平面ひずみ圧縮変形

3. 1 節の方法に従って実験が行われている。そこで, 軸圧縮ひずみ $-\varepsilon_1$ に対して軸圧縮応力 $-\sigma_1$, 体積ひずみ ε_v の経過が求められている。Viggiani らによる実験 A についてこれらを図-2 に, Desrues らの実験 B に関して図-3 に示す。図-2, 図-3 の状態量の経過にはそれぞれ目立った特徴はないが, 極値を示す $-\varepsilon_1$ の相対的な値に特徴が見られる。 $-\sigma_1$ の極値を与える $-\varepsilon_1$ を $-\varepsilon_{1SM}$ と表し, ε_v に関するそれを $-\varepsilon_{1VM}$ とする。そしてこれらの比

$$\xi \equiv \frac{-\varepsilon_{1VM}}{-\varepsilon_{1SM}} \quad (54)$$

を極値比と呼ぶことにする。この値は, 実験 A ではほぼ $\xi \cong 1$ であるが, 実験 B では $\xi \cong 0.35$ である。この極値比の相違が降伏挙動に大きく係わってくる。これらの実験値に基づく基本降伏曲線を図-4 に示す。実線が実験 A のそれを, 破線が実験 B のそれを表している。一般に, 極値比が小さくなるに従って基本降伏曲線が扁平化する傾向にある。基本降伏曲線を極座標表示した式 (22) の関数 k を図-5 に示す。実線, 破線がそれぞれ実験 A, 実験 B の

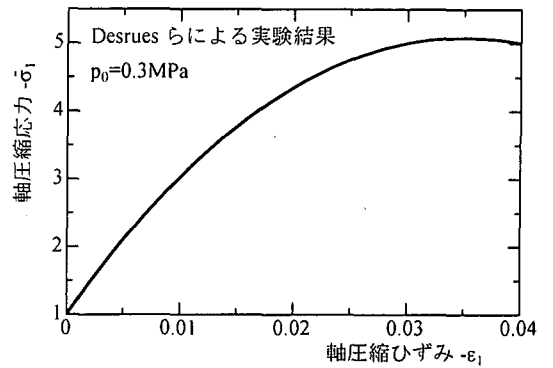


図-3a 実験Bにおける負荷応力の経過

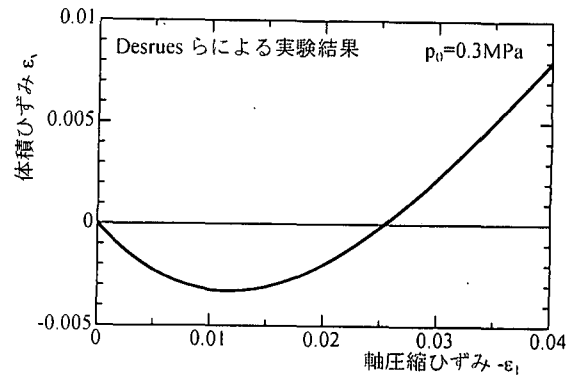


図-3b 実験Bにおける体積ひずみの経過

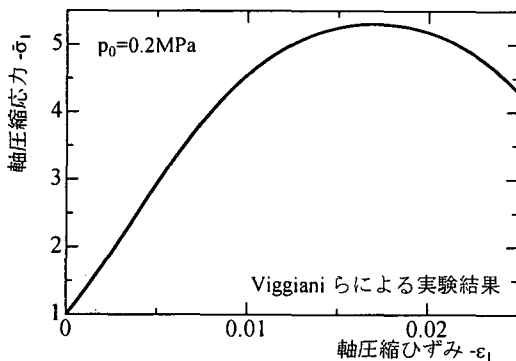


図-2a 実験Aにおける負荷応力の経過

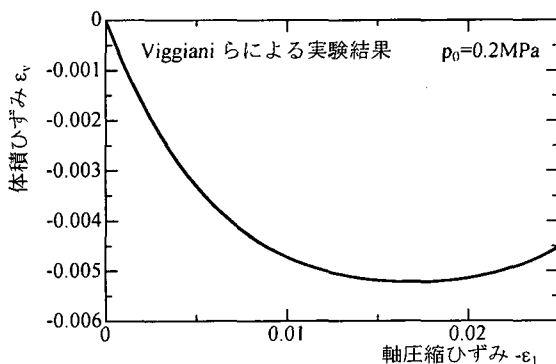


図-2b 実験Aにおける体積ひずみの経過

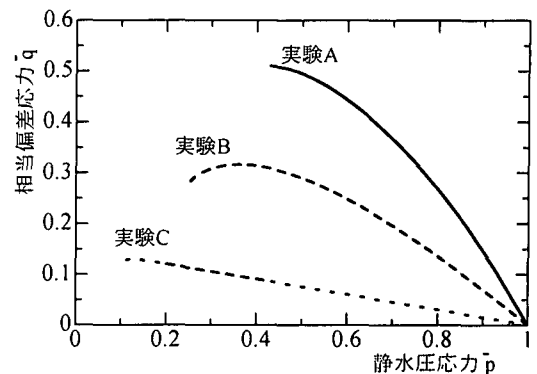


図-4 各種実験における基本降伏曲線

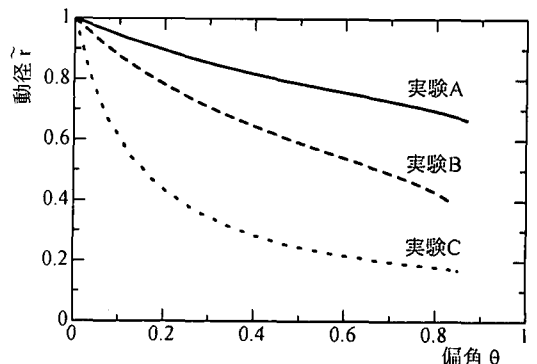


図-5 各種実験における基本降伏関数 $k(\theta)$

それらである。降伏曲線の扁平化は $\bar{r}$ の θ に関する減少率と関連している。ここで示された $\bar{r}$ 値が θ のある値のところで途切れているかに見えるが、この限界では $d\bar{r}/d\theta$ は負値の無限大へと発散し、それ以降は演算を実行すると θ が減少する方向に状態を転ずる。これについては5章で論ずる。

硬化特性を表す硬化相当圧力 $\bar{P}_y$ は式(16)におけるように硬化ひずみ ε_y の関数で与えている。硬化ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_y$ には硬化比率定数 a を導入した。このため、 $\bar{P}_y$ の算出には a を設定しなければならない。そこで、ここでは全く任意に a を指定した。それぞれの指定した a に対応して ε_y に対する $\bar{P}_y$ の経過を、実験Aのそれを図-6に、実験Bでは図-7に示した。本来、硬化相当圧力 $\bar{P}_y$ は硬化ひずみ ε_y に関して単調増加の関係で表示されるものと想定されている。しかし、平面ひずみ圧縮変形では変形のある段階で不安定現象が現れ、図-2、図-3に示されているようにそこで軸圧縮応力の減少が始まる。不安定現象が現れると、塑性負荷を続行する領域と弾性除荷に遷移する領域が共存し、試験片全体で変形の一様性は保証されない。そこでは $\bar{P}_y$ を通常的手法で算出できないが、これを無視して軸圧縮応力の減少が始まる変形段階以降においても

変形の一様性が維持されているものとして処理すると、 $\bar{P}_y$ の減少過程が現れる。しかし、これらの値は参照すべきでないことは当然であり、したがって図-6、図-7ではこれらを描いてない。硬化特性は、本来、このような不安定現象が出現しない実験様式に従って求められるべきである。

実験A, Bで観察された変形挙動を基に求めた降伏曲線と硬化特性を用いて平面ひずみ条件下で予測される変形挙動を2章で詳述した手法に従って追跡を試みた。実験Aの経過を図-8に、実験Bのそれを図-9に示す。ここで、破線は図-2、図-3で示した実測値である。実験Aでは、逆予測の結果は軸圧縮応力に関しても体積ひずみに関しても $a=0$ の場合を除いて元の実験値と全く重なる程度の一致が見られる。式(13)、(25)より

$$f_r = \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_q} \quad (55)$$

の関係にあるので、式(35)より

$$f_r = \frac{3}{2} \frac{1+\gamma}{\sqrt{1-\gamma+\gamma^2}} \quad (56)$$

である。式(17)は式(55)より

$$\dot{\varepsilon}_y = (f_r + a)\dot{\varepsilon}_q \quad (57)$$

となり、これに式(35b)を代入し

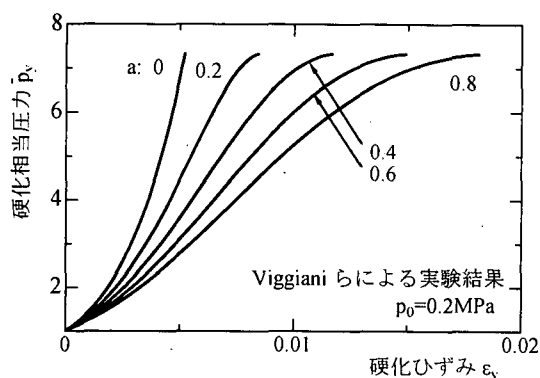


図-6 実験Aにおける硬化特性

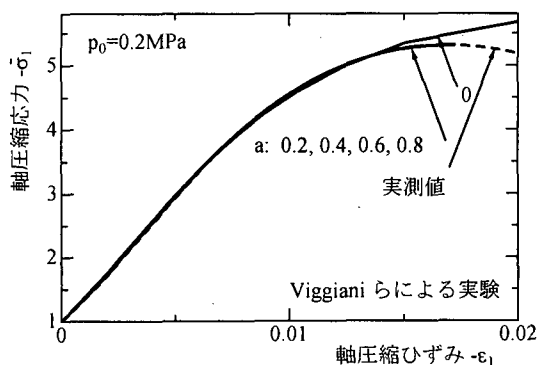


図-8a 実験Aにおける軸負荷応力の逆予測

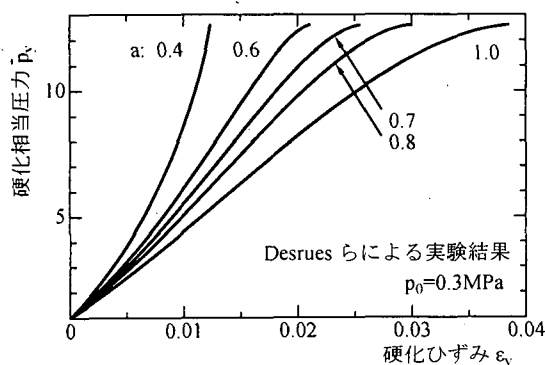


図-7 実験Bにおける硬化特性

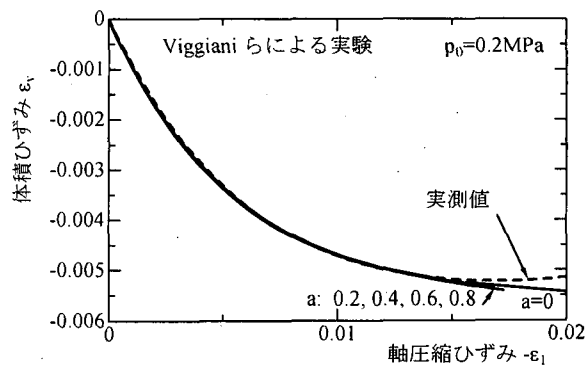


図-8b 実験Aにおける体積ひずみの逆予測

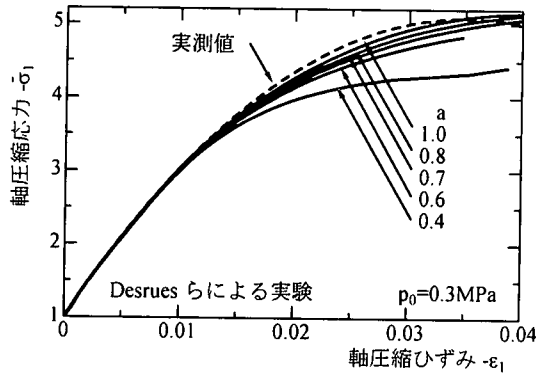


図-9a 実験Bにおける軸負荷応力の逆予測

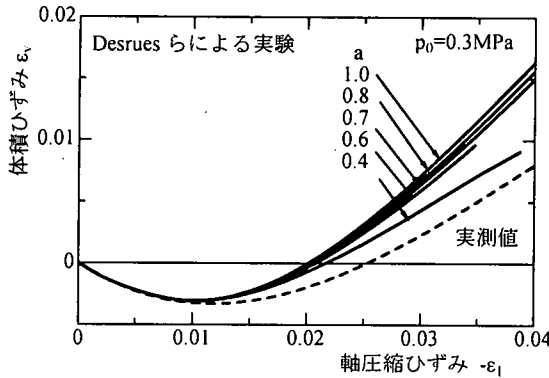


図-9b 実験Bにおける体積ひずみの逆予測

$$-\dot{\varepsilon}_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{(f_r + a)\sqrt{1 - \gamma + \gamma^2}} \dot{\varepsilon}_y \quad (58)$$

を得る。式 (58) の分母を零にする引き金となる項は $f_r + a$ であり、 $f_r + a$ が零に近づくと、与えられた $\dot{\varepsilon}_y$ に対して $-\dot{\varepsilon}_1$ は無限大へと増大し、このとき衝撃的なひずみ速度がもたらされることになる。このことがひずみ $-\varepsilon_1$ の算出値に影響し、逆予測値は実測値から遊離する結果となる。図-8において $a=0$ では、 γ が-1に近づくと式 (56) より f_r は零に近づき、このような状態が現れる。また、図-9では $a=0.4$ においても $-\sigma_1$ が極値を迎える前に $f_r + a$ が零に近づき逆予測における変形追跡を狂わせている。これまでの土質塑性力学では公理的に $a=0$ として理論の構築がなされてきた。しかし、 $a=0$ の下では不安定限界を迎える以前に上記の現象が現れ、不自然な変形挙動を誘発する可能性が高くなる。筆者の一人はこれまでこのことへの警鐘を唱えてきた⁶⁾。しかし、 a としてどの程度の値を採用すべきであるかについては議論はなされていない。 a 値の決定に関して次のような方法が考えられる。それは、同一材料に変形様式の異なる複数の変形を課し、これらにおいて同一の硬化特性が得られることを条件に決定する方法である。この手法を金属粉体の圧縮変形と圧密変形に適用し、 $a \approx 1.5$ の推定値を得ている⁹⁾が、この値がそのま

ま土質材料に採用できるとは限らない。現時点で言えることは不安定限界までの変形過程で少なくとも $f_r + a$ を零にすることのない a 値の採用が要請されるべきである。図-9では、図-8に比べ、逆予測による変形経過は採用する a 値により影響を受け、 a 値が小さくなるに伴い精度の低下が伺える。

4. 2 側圧荷重による円柱の伸長変形

軸伸びひずみ ε_1 に対する側圧荷重応力 $-\sigma_2 (= -\sigma_3)$ と、体積ひずみ ε_v の経過が求められている。実験CのDesruésらによる実測値を図-10に示す。そこでの実験は3. 2節の変形様式に基づいて行われている。実験Cにおける

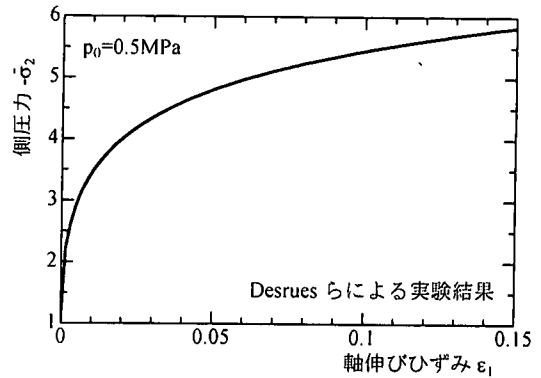


図-10a 側圧荷重伸長実験における側圧力の経過

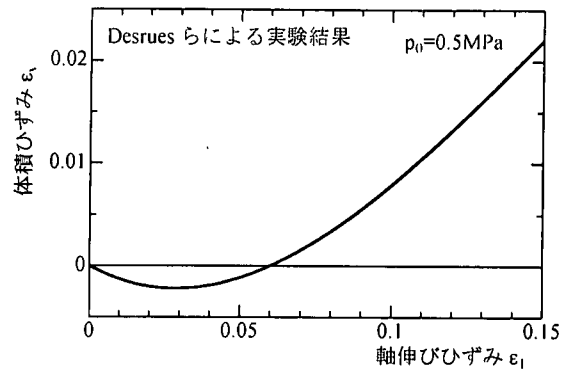


図-10b 側圧荷重伸長実験における体積ひずみの経過

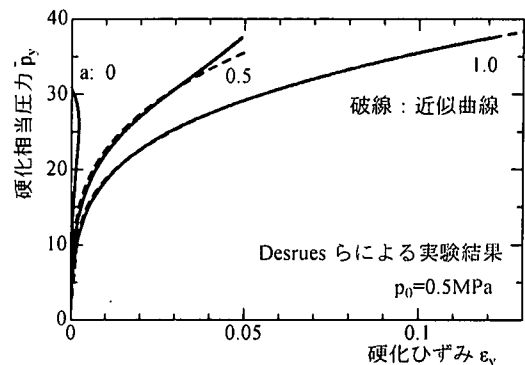


図-11 実験Cにおける硬化特性

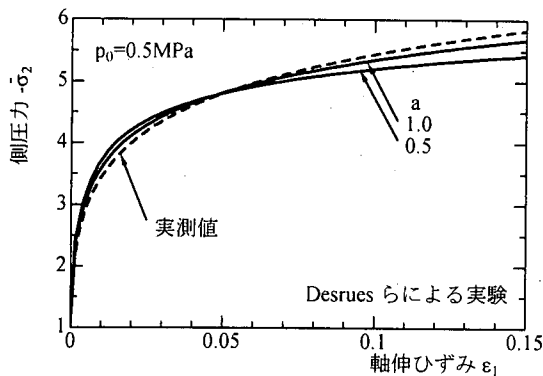


図-12a 実験Cにおける側圧力の逆予測

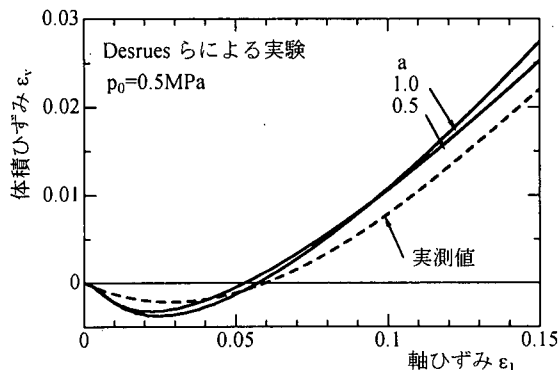


図-12b 実験Cにおける体積ひずみの逆予測

基本降伏曲線は図-4の点線で、その極座標表示関数 k は図-5にやはり点線で示されている。側圧負荷応力は図-10aにおけるように常に増加の過程にあり、この変形様式では不安定は生じていない。このため、図-5における関数 k の導関数 k' は平面ひずみ圧縮変形におけるように負値の無限大へと増大することではなく、図-4で示した基本降伏曲線はその全域を表し切っていない。実験Cにおける硬化特性を図-11に実線で示した。ここでの硬化相当圧力 $\bar{p}_y$ は変形初期に非常に急峻に増加しており、このためこれらの近似表現の精度は平面ひずみ変形における実験A、Bに比べ高くない。演算に使用したこれらの近似曲線を図-11に破線で示している。

以上の基本資料に基づいて変形挙動を逆予測した。それらの結果を図-12に示す。破線は実測された変形経過であり、実線が予測経過である。 $a = 0.5$ 、 $a = 1.0$ について示しているが、これらでは実測値の経過と似通っており、逆予測がほぼ正しく行われていることを保証している。 $a = 0$ における硬化特性を図-13に示す。 $a = 0$ では硬化ひずみは図-10bの体積ひずみと符合を逆にし、体積ひずみが正值となる領域では硬化ひずみは負値を示し、図-13の結果となっている。そこでは変形に伴い硬化ひずみは減少する経過を辿り、不合理である。このようなことから $a = 0$ についての逆予測は行っていない。

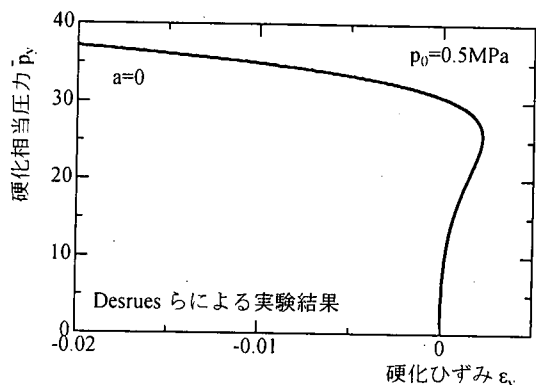


図-13 実験Cにおいて $a=0$ で見られる硬化特性の異常

5. 限界変形

平面ひずみ圧縮実験では基本降伏曲線の極座標表示関数 k の独立変数 θ に限界値 θ_c が存在し、そこでは導関数 k' が負値の無限大となることを4.1節で述べてきた。図-5の表示では限界値 θ_c の存在が明瞭には表されていない。そこで一例として、実験Bについて限界近傍における関数 k の状態を拡大し図-14に示した。ここでは、基礎降伏曲線におけるこのような限界と変形駆動応力が極値を持つこととの間の関連について検討を試みる。

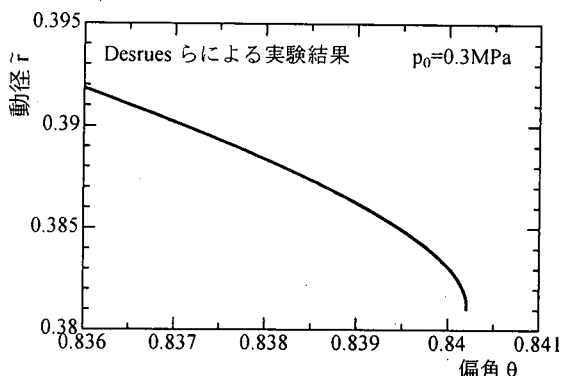


図-14 実験Bにおける限界近傍の基本降伏関数の形状

限界の条件は

$$k'_c \Rightarrow -\infty \quad (59)$$

である。最初に、応力空間 $(\bar{p}, \bar{q})$ における軌跡がこの限界においてどのようなかを考察する。ここでは、平面ひずみ変形を対象とし、 α はある値に設定されているものとする。したがって、式(50)において $\alpha = 0$ の条件を外している。式(59)を考慮して式(42)より

$$\frac{2}{3} \frac{\bar{q}^*}{1 + \alpha - 2\beta} = -\cot \theta_c \quad (60)$$

である。これより

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = \frac{\bar{q}^*}{\sin^2 \theta_c} \left(\frac{1 + \alpha - 2\beta}{1 - \alpha} \right)^2 \quad (61)$$

を得る。これと式 (45b) の $f_{1\beta}$ は共に有限であるので、

$$\frac{1}{k'_c} f_{1\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \Rightarrow 0 \quad (62)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k'_c} \left(f_{1\theta} + f_{1\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \\ &= \bar{g} \left\{ (1 + \alpha + \beta) \sin \theta_c - 3\bar{q}^* \cos \theta_c \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

である。式 (47) より

$$k'_c \frac{d\theta}{d\varepsilon_y} = - \frac{f_{1y}}{\frac{1}{k'_c} \left(f_{1\theta} + f_{1\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right)} = - \frac{\bar{g}^* k}{\bar{g}} \quad (64)$$

となる。式 (64) の右辺は有限であるので、これより

$$\frac{d\theta}{d\varepsilon_y} = 0 \quad (65)$$

が結果する。式 (64) の関係を用いて式 (23) より

$$\frac{d\bar{r}}{d\varepsilon_y} = \bar{g} k'_c \frac{d\theta}{d\varepsilon_y} + k \bar{g}' = 0 \quad (66)$$

を得る。式 (66) の関係は $\bar{g}'$ の値に無関係に恒等的に成り立ち、 $(\bar{p}, \bar{q})$ 応力空間における応力点動径は限界 θ_c において恒等的に変化しないことを表している。式 (65)、

(66) より応力点は限界直線

$$\bar{q} = \bar{p} \tan \theta_c \quad (67)$$

に漸近的に接近し、これに接したとき、その移動を停止することになる。

今回参照した平面ひずみ圧縮実験では限界点近傍で $\bar{g}' = 0$ となるが、これは不安定現象の現れによるものである。負荷応力 $-\sigma_1$ が極値を採る近傍で不安定を起し、それ以降は一樣変形が保証されていない。不安定に伴い負荷力の停留が促されると、これに呼応して硬化特性は $\bar{g}' = 0$ であるかのごとく算出される。しかし、このとき塑性変形域で硬化相当圧力が必ずしも停留する状態にあるとは限らない。限界状態にあることと $\bar{g}' = 0$ であることとの間には直接的な因果関係はなく、限界状態で見られる $\bar{g}' = 0$ は仮想的なものであると考えるべきである。あくまでも、応力空間 $(\bar{p}, \bar{q})$ において限界直線と $\bar{p}$ 軸で囲まれた降伏曲線の膨脹域 ($0 < \theta < \theta_c$ の範囲にある) は無限に広がっていることから、硬化特性は硬化ひずみに対して単調増加関数であることが本質的に要請されている。したがって、平面ひずみ圧縮実験で $\bar{g}' = 0$ が観察される結果となったのは不安定現象によりもたらされたものとして理解すべきである。

一般に基本降伏曲線は限界 θ_c において式 (59) の状態

にあり、式 (65)、(66) の結果を得た。このとき式 (27) より、 $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$ に関する係数行列式は $\bar{r}^2$ であり、零ではないので、

$$\bar{p} = 0, \bar{q} = 0 \quad (68)$$

であり、さらに、式 (36) より、

$$\dot{\kappa} = 0, \dot{\beta} = 0 \quad (69)$$

でなければならない。したがって、応力点が限界直線に漸近したとき式 (28) より負荷応力の停留が促される結果となる。

6. 結 言

直方体試験片による平面ひずみ圧縮試験と円柱試験片に側圧力を負荷することによる軸伸長試験において実測された変形挙動を基に基本降伏曲線と硬化特性が求められている。これらを用いて両試験における変形挙動を逆に予測し、予測値と実測値との比較を行った。ここでは Viggiani らと Desnes らの実験を参照した。

最初に、逆予測の演算手法を提示した。極値比 ξ が 1 に近い素材については高い精度で逆予測が得られたが、 ξ がこれより低くなるといくぶん演算精度の低下が見られた。

硬化比率定数 a が小さくなると変形進行の過程で $f_r + a$ が零となる変形段階に到達する事例の現れることがある。そこでは、変形進行因子である ε_y の微少増分 $d\varepsilon_y$ に対して変形増分 $d\varepsilon_1$ が無限大に増大する。このため、 $f_r + a$ が零に近づくにつれて変形増分の予測値は実測値から偏る傾向を示した。このことから、 $f_r + a$ が零とならないような硬化比率定数 a が採択されていることが必要である。従来の土質力学では硬化比率定数 a を導入することが必要であるとの認識は少なく、さらに、 $f_r < 0$ において軟化を想定している。このような前提の下で数値実験が正常に行われているか否かについての検討がなされるべきであろう。

応力点は設定した変形様式に基づいて応力空間内を移動する。応力点が限界直線に接するとき変形の限界を迎え、応力点の移動がそこで停止することを示した。硬化相当圧力は本質的には硬化ひずみに対して単調に増大する設定がなされるべきであり、応力点が限界直線に到達した段階においても通常は硬化相当圧力は停留しないが、応力点そのものはその時点で停留状態に入ることを示した。

参 考 文 献

- 1) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: On the yielding of soils, *Geotechnique*, Vol.8, pp.22-53, 1958.
- 2) Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J.: Soil mechanics and work-hardening theory of plasticity, *ASCE Trans.*, Paper No.2864, pp.338-346, 1957.

- 3) Miura, N., Murata, H. and Yasufuku, N.: Stress-strain characteristics of sand in a particle-crashing regin, *Soils and Foundations*, Vol.24, pp.77-89, 1984.
- 4) Yasufuku, N., Murata, H. and Hyodo, M.: Yield characteristics of anisotropically consolidated sand under low and high stresses, *Soils and Foundations*, Vol.31, pp.95-109, 1991.
- 5) 守時 一, 及川 洋: 土質材料における降伏曲線形状と変形挙動の関連 土木学会, 応用力学論文集, 第 3 巻, pp.303-312, 2000.
- 6) 守時 一, 奥山栄樹: 土質力学における限界状態と多価条件の関連 土木学会, 応用力学論文集, 第 1 巻, pp.417-426, 1998.
- 7) Viggiani, G., Finno. R. J. and Harris, W. W. : Experimental observation of strain localization in plane strain compression of a stiff clay, *Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks*, Chambon, R., Desrues, J. and Vardoulakis, I. (eds), Balkema, Rotterdam, pp.189-198, 1994.
- 8) Desrues, j., Lanier, J. and Stutz, P.: Localization of the deformation in tests on sand sample, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.21, pp.909-921, 1985.
- 9) 守時 一, 神谷 修: 金属粉末のひずみ制御圧密における降伏挙動に関する考察, 日本機械学会論文集A 編, 67巻, 671 号, pp.836-843, 2001.

(2001 年 4 月 20 日受付)