

相似形メッシュを用いた梁解析の一手法

A similar mesh generation method in two or three dimensional beam problems

内山義博^{*}・山尾敏孝^{**}・片山拓朗^{***}・平井一男^{****}

Yoshihiro UCHIYAMA, Tositaka YAMAO, Takuro KATAYAMA and Itio HIRAI

- * 工修 八代工業高等専門学校助教授 土木建築工学科 (〒866-8501 八代市平山新町 2627)
 ** 工博 熊本大学教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)
 *** 工博 崇城大学講師 工学部環境建設工学科 (〒860-0082 熊本市池田町 4-22-1)
 **** 工博 崇城大学教授 工学部環境建設工学科 (〒860-0082 熊本市池田町 4-22-1)

In the two or three dimensional beam problem, if only the sizes of meshes are similar, the stiffness matrix of each elements is similar and the subparts made from the stiffness matrices of elements are similar too. This paper presents a mesh generation method in the Finite Element Method, which divides a given system into the subparts with the similar stiffness matrix under the concept that the stiffness matrices are the same independent of the sizes of the subparts, if only the shapes of the subparts are similar. Validity of proposed method by using similar mesh element is shown by numerical results.

Key Words : similar mesh, subpart, condensation

1. まえがき

近年、計算機性能の発展は目ざましく、計算時間の高速化、計算機容量の増大とパソコン程度の計算機でも、大容量を必要とするような問題の解析が可能になってきている。さらに大規模の系を解析する場合、いくつかの部分に分割し解析するサブストラクチャー法¹⁾がある。この場合、メッシュ分割が等分割や相似分割のように規則的に行えない部分はズーム法^{2), 3)}などと結合して解くとする。一般に大部分は規則性のあるメッシュ分割が可能である。従って、この部分の剛性方程式をいかに効果的に解くかは、系の効率的な解析に大きく影響する。

本研究では、有限要素法解析において相似形メッシュで分割された系の剛性マトリックスの特性に着目、その特性を生かして剛性マトリックスの縮合を効率よく行う手法について述べる。系が相似メッシュで構成されているならば、各要素の剛性マトリックスは互いに相似比の関係にあり、その相似比を考慮すれば、一部の要素の剛性マトリックスで全体の剛性マトリックスは表せる。特に、2次元弾性問題においては、相似比に関係なく剛性マトリックスは同一となる。従って、剛性マトリックスの縮合において、節点消去の順番を配慮すれば全体の剛性マトリックスを扱うことなく一部の剛性マトリックスのみの取り扱いで済み、しかも

消去・縮合を直接行うよりもはるかに少ない回数で計算できることを示す。また、系の一部で要素剛性が変化するなど、相似系が壊れた修正系においても修正部のみの取扱で解析が可能な事を示す。最後に、具体的な数値計算を通して手法の適用範囲を明確にする。

2. 基礎式

2.1 相似メッシュ系剛性マトリックスの消去・縮合

相似メッシュよりなる系の剛性マトリックスの消去・縮合を

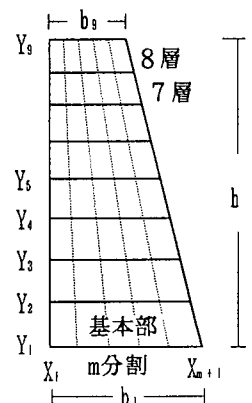


図-1 原系

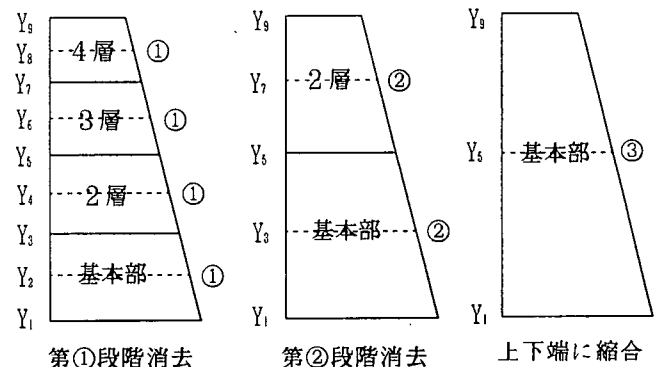


図-2 内部行の消去・縮合

容易に行う方法について述べる。まず図-1に示すように、相似メッシュで横 m 分割、縦 n 分割された台形板を例とする。最下層を基本部、その剛性マトリックスを基本マトリックスとすると、縦 n つのパートは相似であるから各パートは基本マトリックスと同じ剛性マトリックスである。いま、内部行 $Y_2 \sim Y_{n-1}$ 行をすべて消去して上下行 Y_1, Y_n へ縮合することを考える。この手順は図-2に示すように、まず第一段階として偶数行を消去して縮合する。すると4層になる

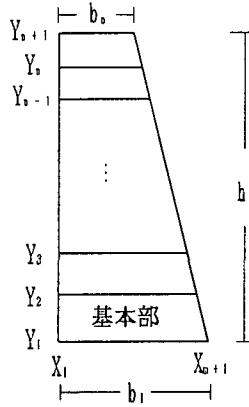


図-3

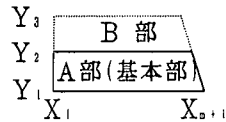


図-4 ユニットパート

ので、次に第2段階としてその偶数行を同様に消去・縮合する。以下同様にして一行おきに消去と縮合の演算を繰り返せばよい。以上のことを一般的な問題として、マトリックス演算で表記すると次のようになる。いま、横方向 m 分割、縦方向 n 分割された図-3モデルについて、上下端 Y_{n+1}, Y_1 行への消去・縮合を考える。ただし、各段階で偶数行を消去していくことから、縦方向分割数 n は、 $n=2^p+2$ の果乗とする。図-3モデルより下2層を取り出した系を図-4に示す。図-4でA部の基本マトリックス K_1 は式(1)で表される。

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

ここで、下添字は Y_1, Y_2 行に対応している。図-4でB部の剛性マトリックスはA部と同一であり、A部について剛性マトリックスを作成し、これを重ね合わせればユニットパート全体の剛性マトリックスとなる。即ち

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots (2)$$

ただし、 $\bar{K}_{22} = K_{11} + K_{22}$ であり、 u は対応する変位である。図-3のモデルで、2層 $\sim n$ 層もA部の剛性マトリックスと同じであり、 $Y_1 \sim Y_{n+1}$ 行に対応する変位を $u_1 \sim u_{n+1}$ とし、それに応じて剛性マトリックスも分割表示を行う。また、縮合は剛性マトリックスのみの問題であるから中間行には外力はないものとして話を進める。以上のことを考慮すると、式(2)より剛性方程式は次のようなバンドマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12} & \bar{K}_{22} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ u_1 \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots (3)$$

展開すると

$$\begin{aligned} K_{11} u_1 + K_{12} u_2 &= 0 \\ K_{21} u_1 + K_{22} u_2 + K_{12} u_3 &= 0 \\ K_{21} u_2 + K_{22} u_3 + K_{12} u_4 &= 0 \\ K_{21} u_3 + K_{22} u_4 + K_{12} u_5 &= 0 \\ K_{21} u_4 + K_{22} u_5 + K_{12} u_6 &= 0 \\ K_{21} u_5 + K_{22} u_6 + K_{12} u_7 &= 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$K_{21} u_{n-1} + K_{22} u_n + K_{12} u_{n+1} = 0$$

$$K_{21} u_n + K_{22} u_{n+1} = 0$$

偶数行の消去・縮合は次のように行える。式(4)の第2式より u_2 を求め、第1式へ代入すると

$$(K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_3 = 0 \quad \dots (5)$$

第4式より u_4 は

$$u_4 = -\bar{K}_{22}^{-1} (K_{21} u_3 + K_{12} u_5) \quad \dots (6)$$

以下同様にして、偶数行の消去、奇数行への縮合は次のように整理できる。すなわち、消去・縮合後の最下行 Y_1 行は

$$(K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_3 = K_{11} u_1 + K_{12} u_3 \quad \dots (7)$$

最上行 Y_{n+1} 行は

$$\begin{aligned} -K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_{n-1} + (K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12}) u_{n+1} \\ = K_{21} u_{n-1} + K_{22} u_{n+1} \end{aligned} \quad \dots (8)$$

中間行 Y_j 行は

$$\begin{aligned} -K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_{j-2} + (\bar{K}_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_j - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_{j+2} \\ = K_{21} u_{j-2} + K_{22} u_j + K_{12} u_{j+2} \end{aligned} \quad \dots (9)$$

ここで、 ${}_1K_{11} = K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}$

$${}_1K_{12} = -K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} = {}_1K_{21}^T \quad \dots (10)$$

$${}_1K_{22} = K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12}$$

従って、 ${}_1K_{11}, {}_1K_{12}, {}_1K_{21}, {}_1K_{22}$ で偶数行縮合後のマトリックスは表される。故に、偶数行縮合後のマトリックスは次式となる。

$${}_1K = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ {}_1K_{11} & {}_1K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}_1K_{21} & {}_1K_{22} & {}_1K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

$$\text{ただし、} {}_1\bar{K}_{22} = {}_1K_{11} + {}_1K_{22} \quad \dots (12)$$

次に、下2層のみを考えた図-4のユニットパートの剛性マトリックスのみを用いて、上記の系全体を消去・縮合したマトリックス式(11)が表せることを示す。図-4での剛性マトリックス K は式(2)であり、式(2)での Y_2 行の消去・縮合は次のように行える。まず、 Y_2 行

の u_2 を Y_1 行へ代入すると

$$(K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_3 \\ = K_{11} u_1 + K_{12} u_3 \quad \dots (13)$$

Y_3 行へ代入すると

$$-K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_1 + (K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12}) u_3 \\ = K_{21} u_1 + K_{22} u_3 \quad \dots (14)$$

3, 4 層については、図-4 および式(2)で $Y_1 \sim Y_3$ を $Y_3 \sim Y_5$, $u_1 \sim u_3$ を $u_3 \sim u_5$ と変更すれば全く同じ式が使用できる。従って、 Y_3 行は

$$(K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_3 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_5 \\ = K_{11} u_3 + K_{12} u_5 \quad \dots (15)$$

Y_5 行は

$$-K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_3 + (K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12}) u_5 \\ = K_{21} u_3 + K_{22} u_5 \quad \dots (16)$$

式(14)と式(15)を加えて、 Y_3 行で両者重ね合わせる。

$$K_{21} u_1 + (K_{11} + K_{22}) u_3 + K_{12} u_5 \\ = K_{21} u_1 + K_{22} u_3 + K_{12} u_5 \quad \dots (17)$$

結果は、原系で直接 Y_2 , Y_4 行を消去、 Y_3 行へ縮合した場合と全く同じ式となる。同様な操作を繰り返せば、残りの中間行 Y_5 以降も計算できる。なお最下行 Y_1 は、上記 Y_1 であり、最上行 Y_{n+1} 行は、式(8)あるいは式(16)と同一である。従って、図-3 の原系で基本マトリックスのみを作成、これを重ね合わせて図-4 のユニットパートを作成し、 Y_2 行の消去・縮合を行えば、必要な $K_{11} \sim K_{22}$ が得られるので、第一段階の消去・縮合マトリックスは、これらを重ね合わせることで求めることができる。

第二段階の消去・縮合は、縮合された Y_1 , Y_3 行よりなる部分を新しい基本部とすると、基本マトリックスの要素は先に得られた $K_{11} \sim K_{22}$ であり、それを重ね合わせて図-4 のユニットパートを作成、 Y_5 行を消去・縮合すれば、必要な $K_{11} \sim K_{22}$ が得られるので、これらを重ね合わせれば第二段階の消去・縮合マトリックスとなる。

以下同様に消去・縮合を p 回繰り返せば上下に縮合されたマトリックスを求めることができる。実際の計算では、上下への縮合マトリックスが求まればよいから、中間行の縮合マトリックスは必要ではなく、基本マトリックスのみの作成、演算で済む。図-3 の系は、横 m 、縦 $n (= 2^p)$ 分割であり、直接演算では、 $2(m+1) \times (n+1)$ のマトリックスで、 $n-1$ 回の消去・縮合を必要とするのに対し、本法は大きさ $2(m+1) \times 3$ のマトリックス、 p 回の消去・縮合で済み、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。

2.2 中間荷重の取扱

今まで、荷重は無視してきたが、中間荷重がある場合は式(3)で荷重項を考慮すればよい。すなわち、式(4)で右辺に対応する荷重項 $F_1 \sim F_{n+1}$ 導入すればよい。従って、 Y_2 行より u_2 は

$$u_2 = -\bar{K}_{22}^{-1} (K_{21} u_1 + K_{12} u_3 - F_2) \quad \dots (18)$$

Y_1 行は

$$(K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_3 = \\ F_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} F_2 \quad \dots (19)$$

Y_4 行より u_4 は

$$u_4 = -\bar{K}_{22}^{-1} (K_{21} u_3 + K_{12} u_5 - F_4) \quad \dots (20)$$

Y_3 行は

$$-K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_1 + (\bar{K}_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} - \\ K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21}) u_3 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} u_5 \\ = F_3 - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} F_2 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} F_4 \\ \dots \dots$$

Y_{n+1} 行は

$$-K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} u_7 + (K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12}) u_9 \\ = F_9 - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} F_8 \quad \dots (22)$$

故に、中間に荷重が作用するときは荷重項の演算が加わるのみで、一般に次式で表せる。最下行 Y_1 行は

$$K_{11} u_1 + K_{12} u_3 = \bar{F}_1 \quad \dots (23)$$

最上行 Y_5 行は

$$K_{21} u_7 + K_{22} u_9 = \bar{F}_9 \quad \dots (24)$$

中間行 Y_3 行は

$$K_{21} u_{j-2} + \bar{K}_{22} u_j + K_{12} u_{j+2} = \bar{F}_j \quad \dots (25)$$

ここで、

$$\bar{F}_1 = F_1 - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} F \\ \bar{F}_9 = F_9 - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} F_8 \\ \bar{F}_j = F_j - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} F_{j-1} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} F_{j+1} \quad \dots (26)$$

と剛性マトリックスと同様基本マトリックスのみで計算できる。但し、荷重項としては、その段階、段階で全て求め、記憶しておく必要があるが、荷重はベクトルであるから、計算時間あるいは容量的にもあまり問題にならない。

2.3 中間行変位の算定

中間行変位が必要ならば、次のように後退代入で求められる。中間行 $p-1$ 回縮合時の基本マトリックス(図-5 参照)は、次式で与えられる。

$${}_{p-1}K_3 = \begin{bmatrix} {}_{p-1}K_{11} & {}_{p-1}K_{12} \\ {}_{p-1}K_{21} & {}_{p-1}K_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (27)$$

ここで、左下添字 $p-1$ は $p-1$ 回目の消去・縮合を表す。図-5 の第 $p-1$ 回段階消去系の剛性マトリックスは、式(27)を重ね合わせた次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} {}_{p-1}K_{11} & {}_{p-1}K_{12} & 0 \\ {}_{p-1}K_{21} & {}_{p-1}\bar{K}_{22} & {}_{p-1}K_{23} \\ 0 & {}_{p-1}K_{32} & {}_{p-1}K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots (28)$$

但し、 ${}_{p-1}\bar{K}_{22} = {}_{p-1}K_{11} + {}_{p-1}K_{22}$ であり、 u_2 は中央 Y_2 行の変位である。これより u_2 は

$$u_2 = -{}_{p-1}\bar{K}_{22}^{-1} ({}_{p-1}K_{21} u_1 + {}_{p-1}K_{12} u_{n+1}) \quad \dots (29)$$

で求められる。中間行 $p-2$ 回縮合時の基本部の剛性マトリックス ${}_{p-2}K_4$ は、式(27)で下添字を $p-2$ に変更すればよい。図-5 で第 $p-2$ 回段階消去系の剛性マトリッ

クスは、基本マトリクス ${}_{p2}K_i$ の重ね合わせで得られ、式(28)より、下添字をp2に変更した次式となる。

$$\begin{bmatrix} {}_{p2}K_{11} & {}_{p2}K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}K_{22} & {}_{p2}K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}K_{22} & {}_{p2}K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}K_{22} & {}_{p2}K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & {}_{p2}K_{21} & {}_{p2}K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,1} \\ u_c \\ u_{1,2} \\ u_{1,1} \end{bmatrix} = \{0\} \quad \dots (30)$$

これより、 Y_{11} 、 Y_{12} 行の未知変位 $u_{1,1}$ 、 $u_{1,2}$ は次式で求められる。

$$u_{1,1} = -{}_{p2}\bar{K}_{22}^{-1}({}_{p2}K_{21}u_1 + {}_{p2}K_{12}u_c) \quad \dots (31)$$

$$u_{1,2} = -{}_{p2}\bar{K}_{22}^{-1}({}_{p2}K_{21}u_c + {}_{p2}K_{12}u_{1,1}) \quad \dots (32)$$

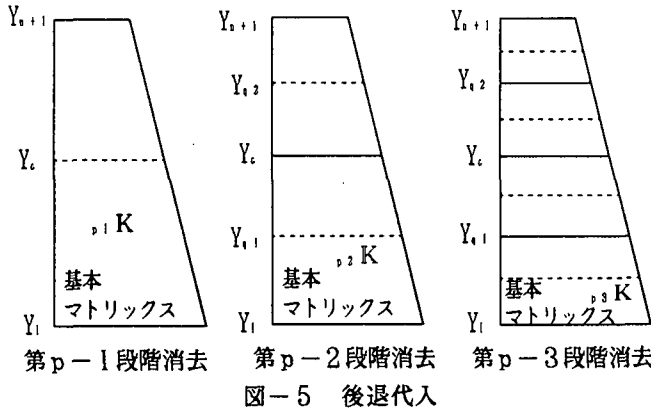


図-5 後退代入

上記では、基本マトリックスの重ね合わせで作成した剛性方程式を用いたが、式(31)、(32)で分るように、中間変位算定に必要な諸量は、各消去段階での基本マトリックスと、その時の上下行の変位のみである。以下、同様に繰り返して行けば、全体の変位は算定できる。

一般に、j段階消去時のi行変位は、j段階での上下行の変位 u_{i+1} 、 u_{i-1} とj-1段階での基本マトリックスを用いて

$$u_i = -{}_{j1}\bar{K}_{22}^{-1}({}_{j1}K_{21}u_{i-1} + {}_{j1}K_{12}u_{i+1}) \quad \dots (33)$$

で表される。

2.3 3次元問題

3次元問題において、相似メッシュで分割された系の剛性マトリックスは、相似比の累乗で表される。図-6立体モデルを図-1平面モデルと同様縦8分割し、最下層を基本部とすると、上7層の各剛性マトリックスは基本部の基本マトリックス K_8 へ相似比の累乗倍をかけた $K_2=rK_8$ 、 $K_3=r^2K_8$ 、 $\dots$ 、 $K_8=r^7K_8$ であり、全体の剛性マトリックスはこれらの重ね合わせで得られる。

$$K = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & rK_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & rK_{21} & r^2K_{22} & r^2K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2K_{21} & r^2K_{22} & r^2K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2K_{21} & r^2K_{22} & r^2K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^4K_{21} & r^4K_{22} & r^4K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^4K_{21} & r^4K_{22} & r^4K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^6K_{21} & r^6K_{22} & r^6K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^6K_{21} & r^6K_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (34)$$

但し、 $\bar{K}_{22} = K_{11} + rK_{22}$ である。

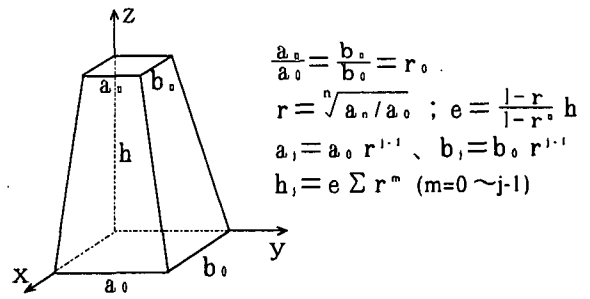


図-6 立体モデル

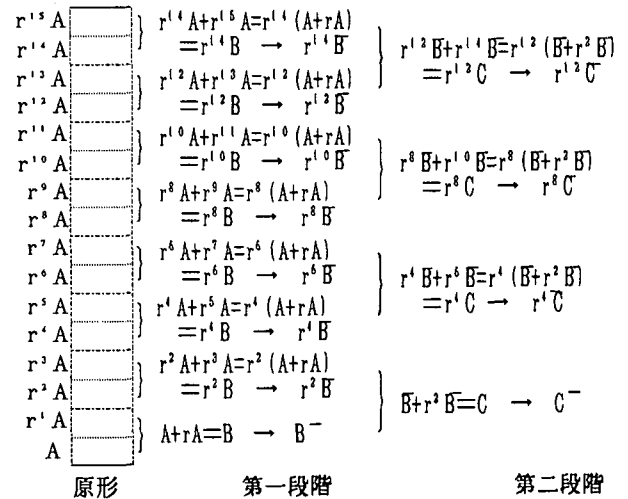


図-7 内部行の消去・縮合

平面問題と同様、常に偶数行から消去・縮合を行えばよいが、平面問題と異なるのは、相似比の累乗が関係することである。しかし、図-7に示す様な操作により、平面問題同様上下端への縮合マトリックスは計算できる。

原形で基本部の剛性マトリックスをAとすると、j層のマトリックスは $r^{j-1}A$ で表される。第一段階での縮合ユニットの剛性マトリックスがB、中央行消去・縮合したマトリックスがB-barであり、以下、C作成→消去・縮合C-bar、D作成→消去・縮合D-barと3回繰り返せば得られたD-barマトリックスは、中間行を全て消去、上下行に縮合されたマトリックスとなる。この時、各演算に必要なマトリックスは各段階での基本部の基本マトリックス K_8 のみでよく、これに相似比rの累乗倍したものを加え、縮合ユニットの剛性マトリックス $K_i (=K_8 + r^i K_8)$ を作成、次々と消去・縮合を繰り返して行けば、上下端への縮合マトリックス解は得られる。B-barマトリックス

$$A = K_8 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (35)$$

$$B = A + rA (=K_9) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + rK_{11} & rK_{12} \\ 0 & rK_{21} & rK_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (36)$$

Bマトリックスの Y_2 行を消去・縮合してB-barを作成

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3 \\ \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (37)$$

$\bar{B}$ マトリックスの重ね合わせより

$$C = \bar{B} + r^2 \bar{B} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3 & Y_5 \\ \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & 0 \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} + r^2 \bar{K}_{11} & r^2 \bar{K}_{12} \\ 0 & r^2 \bar{K}_{21} & r^2 \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (38)$$

であり、以下消去・縮合、縮合ユニット作成と同様な操作を行えばよい。

2.4 一部修正系への適用

相似メッシュ系で、一部の要素 $Y_{1,1}$ の剛性が、例えば降伏などの理由で変化すれば、相似メッシュ系ではなくなる。しかし、変化する範囲が小範囲の一部修正であれば、以下のように変化部のみの取扱で済むので、相似系の消去・縮合法が有効に使える。右図で原形の剛性マトリックスを K_A 、変位を u_A 、荷重を F_A とすると、原系の剛性方程式は

$$K_A u_A = F_A \quad \dots (39)$$

前節の消去・縮合によって、原系の各段階での K_A の縮合マトリックス並びに変位 u_A は求められているものとする。いま、図-8で k 層部の斜線部に剛性変化 ΔK が生じたとすると、修正後の剛性マトリックスは、 $K_B = K_A + \Delta K$ に、それに伴って変位も u_B と変化する。従って、修正後の剛性方程式は

$$K_B u_B = (K_A + \Delta K) u_B = F_A \quad \dots (40)$$

変形すると

$$K_A u_B = F_A - \Delta K u_B = F_B \quad \dots (41)$$

ここで、 u_B は ΔK 部に対応する変位である。

従って、 ΔK 部に対応する修正後の変位 u_B が得られれば、原系である相似系に外力 F_B の作用する問題として、相似系の消去・縮合法が適用できる。式(40)より

$$K_A (I + f_A \Delta K) u_B = F_A \quad \dots (42)$$

ここで、 $f_A = K_A^{-1}$ である。 $f_A \Delta K$ は、 K つまり系全体の逆マトリックスである f_A を含むからこのままでは問題である。しかし、一部修正を対象にしているの、 ΔK は全体の大きさに比べ小部分であり、 f_A も次に示すように ΔK に対応する小部分のみで済む。 k 部が修正部であるから、分割マトリックスで表すと

$$f_A \Delta K = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{1k} & f_{13} \\ f_{k1} & f_{kk} & f_{k3} \\ f_{31} & f_{3k} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{3k} \Delta K & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (43)$$

従って、式(43)は

$$(I + f_A \Delta K) u_B = \begin{bmatrix} I & f_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & I + f_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{3k} \Delta K & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{B1} \\ u_{Bk} \\ u_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{A1} \\ u_{Ak} \\ u_{A3} \end{bmatrix} \quad \dots (44)$$

ここで、修正部 k に対応する変位は u_{Bk} であるから

$$(I + f_{kk} \Delta K) u_{Bk} = u_{Ak} \quad \dots (45)$$

これより

$$u_{Bk} = (I + f_{kk} \Delta K)^{-1} u_{Ak} \quad \dots (46)$$

従って u_{Bk} 、即ち式(41)の u_B は、修正部 k の大きさのマトリックス演算で求められる。

また、 K_A の縮合マトリックスは求められているから、 f_{kk} は k 部の各点に次々と単位の荷重が作用するときの k 部の変位として、相似系の消去・縮合法で求めることができる。求めた u_{Bk} を、式(41)に代入すれば F_B が得られ、修正変位 u_B は相似系の消去・縮合法で計算できる。この場合の問題は、系全体に対する修正部の大きさであり、修正量の大小は問題にならない。

3. 数値計算結果と考察

3.1 片持ち梁の解析

相似メッシュモデルとして、図-9のような左端固定、右端自由で高さが変化する片持ち梁について、数値計算を行った。右自由端に鉛直荷重 $P=640\text{kgf}$ が鉛直下方向へ作用するものとした。他のモデル緒元は表-1に示す通りである。縦方向は等分割、横分割はメッシュ縦横の比が1となるように分割した。相似メッシュの各寸法は横方向分割数 $n=2^3$ とすると、相似比 r で n 分割であるから $b=a r^3$ より、相似比 r は次式となる。

$$r = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \quad \dots (47)$$

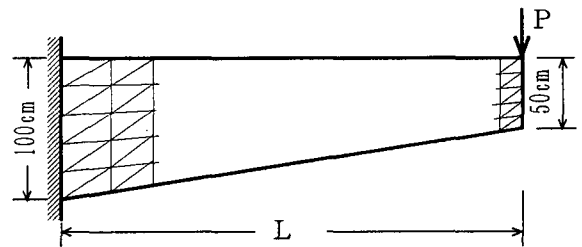


図-9 変断面片持ち梁

従って、 j 列目の高さ b_j は

$$b_j = a r^j \quad \dots (48)$$

また、 j 列目の幅 L_j は

$$L_j = d \Sigma r^j \quad \dots (49)$$

で与えられる。本法との比較解法として一般に用いられる反復法(ICCG法)¹¹⁾を使って数値計算を行なった。反復法の前処理には不完全修正コレスキー分解を用い、収束

判定は、相対残差ノルムで 10^{-7} とした。提案法の精度は残差ノルム⁵⁾で 10^{-8} 程度である。計算には、CPU: Intel Pentium II (266MHz), RAM: 128Mbを搭載したパーソナルコンピュータを用い、使用言語はFortranで倍精度計算を行った。本法の適用性を調べるために、左右端寸法は固定、長さLを4通り変化したモデルについて計算容量、計算時間の比較を行った。表-2に各モデルの緒元、演算で取り扱う系の自由度、計算時間を示す。また、両者の計算時間の比較図を図-9に示す。縦軸は反復法を基準とした計算時間比、横軸は系の総自由度とし、全節点変位を求めるのに必要な演算時間で比較している。計算容量、計算時間のいずれについて

も、反復法は系の全自由度に、本法は基本部の自由度に依存する。基本部は、はりの長さLには無関係であるから、はりが長くなるほど本法が有利になる。縦横分割数が同じモデルAでも計算容量は本法が少なくて済んだ。演算では、横分割数は 2^2 より、消去すべき内部行は 2^2-1 行であるが、本法では、各段階で基本部のみの演算でよいからp回で済む。ただし、各段階で縦1行の自由度を持つマトリックス演算を5回必要とする。従って、計算時間でも縦分割が少なく横分割数が多いほど

表-1 片持ち梁諸元

諸元	数値
左端(b)	1.0m
右端(a)	0.5m
スパン(L)	1.0~4.0m
厚さ(t)	0.01m
ポアソン比(ν)	0.3
ヤング係数(E)	200GPa

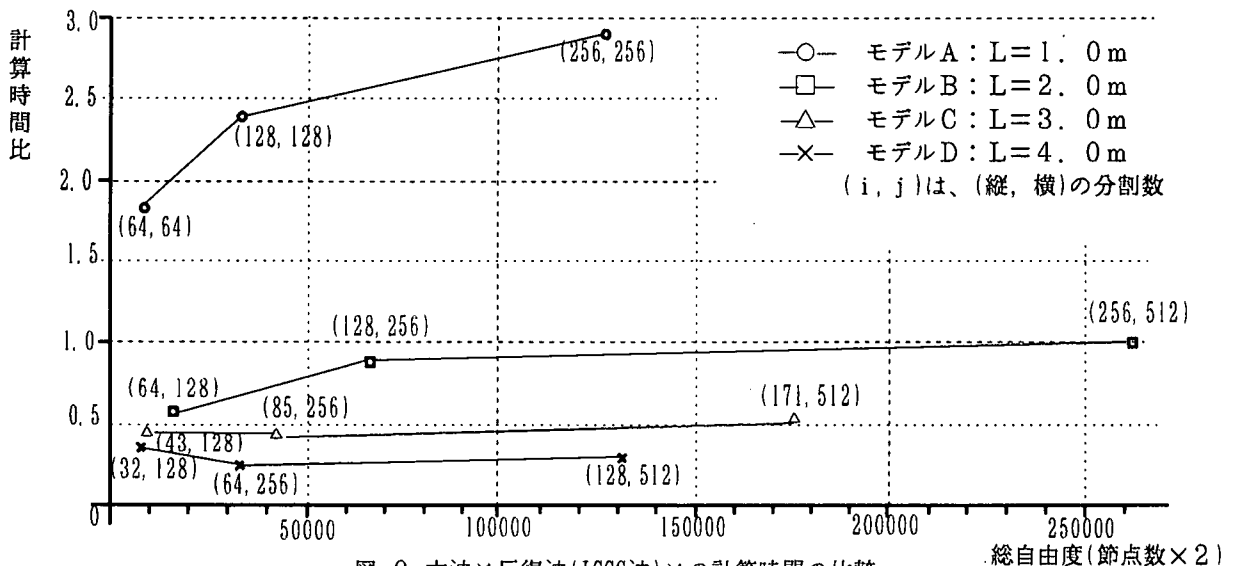
表-3 自由端たわみ($\times 10^{-2}$ m)

モデル	分割数		p-Dis	k-Dis
	桁高	桁長		
A	256	250	0.003577	0.003312
B	256	512	0.018725	0.018587
C	171	512	0.057821	0.057787
D	128	512	0.132700	0.132875

表-2 本法と反復法(ICCG法)との比較

モデル	桁高(m)		桁長(m)	分割数			自由度		計算時間(秒)			
	支点	先端		桁高	桁長	長/高	部分	全体	本法	反復法	時間比	
A	1.0	0.5	1.0	64	64	1.0	130	8320	11	6	1.83	
				128	128		258	33024	98	41	2.39	
				256	256		514	131564	921	318	2.90	
B	1.0	0.5	2.0	64	128	2.0	130	1664	12	18	0.67	
				128	256		258	66048	115	134	0.86	
				256	512		514	263168	1067	1070	1.00	
C	1.0	0.5	3.0	43	128	3.0	88	11264	5	12	0.42	
				85	256		172	44032	33	83	0.40	
				171	512		344	176128	325	653	0.50	
D	1.0	0.5	4.0	32	128	4.0	66	8448	3	8	0.38	
				64	256		130	32280	15	60	0.25	
				128	512		258	132096	138	479	0.29	

(モデルD)その効果は大となる。結果より縦横分割数比が1:1のモデルAでは劣るが、縦横分割数比が1:2以上であれば、また分割数を増加して精度を上げる場合には、本法は非常に有効な手法であるといえる。また、表-3に片持ちはりモデルA~Dについての自由端のたわみを示す。k-Disは、構造力学⁶⁾でのせん断たわみを考慮した変断面はりの自由端のたわみ値であり、p-Disは、本法で求めたたわみ値である。本法でのたわみは、各モデルとも要素数最大の時の自由端中央の



値である。妥当な結果が得られたと思われる。

3.2 立体片持ち柱の解析

立体解析例として、図-10に示すような変断面柱で底面固定、柱頭が自由な片持ち柱に水平力が作用するモデルを用いた。表-4に解析モデル諸元を示す。本手法の妥当性を確かめるために、図に示すように座標系XYZは底面側を原点にして設定した。解析では、X方向は4分割に固定し、Y方向及びZ方向の分割数を変化させたモデルA～Dについて実施した。結果を表-5に示す。モデル名で3Lは本法の、3Dはバンドマトリックスを用いた直接法の解を示す。両解法の結果は完全に一致している。

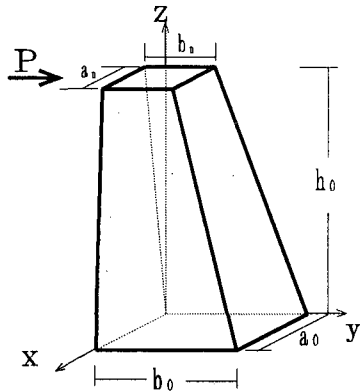


図-10 立体モデル

表-4 立体モデル諸元

諸元	数値
荷重(P)	102.47N
高さ(h)	1.0m
固定辺幅(a ₀)	0.04m
固定辺高(b ₀)	0.1m
自由端幅(a ₁)	0.02m
自由端高(b ₁)	0.05m
ヤング係数	0.98MPa
ポアソン比	0.3

従って、剛性マトリックスに相似比が関係するような問題でも、相似系の消去・縮合法が適用できることが分った。また、構造力学のエネルギー法⁶⁾によると、せん断変形を考慮した柱頭変位は $u = 2.106302\text{cm}$ であり、モデルA～DとY,Z方向分割を増すにつれて変位が合致していくのが分る。なお、モデルDの本法での演算時間5時間を要したが、バンドマトリックス法では82万円の方程式を解く必要があり、これからも本法の有効性が示されたと思われる。

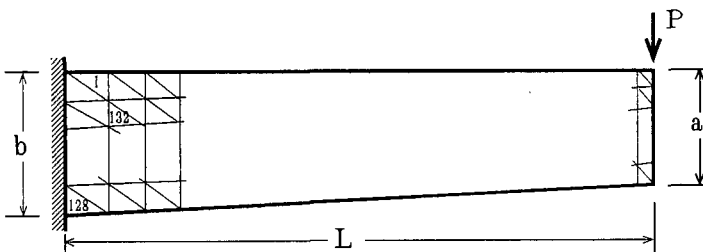


図-11 片持ち梁

表-5 立体モデル解析結果(上段：本法，下段：直接法)

モデル	分割数		サブパート / 系全体		柱頭変位 ($\times 10^{-2}\text{m}$)
	Y方向	Z方向	要素数	節点数	
3L-A	10	128	200	110	2.054799
3D-A			21600	7095	2.054799
3L-B	16	128	320	170	2.073092
3D-B			54825	8192	2.073092
3L-C	40	512	800	410	2.101237
3D-C			40960	105165	
3L-D	80	1024	1600	810	2.103799
3D-D			1638400	415125	

3.3 一部修正されたはりの解析

修正系への適用例として、図-12に示す片持ちばりで、荷重の増大とともに要素が降伏し、剛性が次々と変化する場合について計算を行い、荷重P

表-6 片持ち梁諸元

諸元	数値
左端(b)	0.1m
右端(a)	0.8m
スパン(L)	4.0m
厚さ(t)	0.01m
ポアソン比(ν)	0.3
ヤング係数(E)	200GPa

の増加に伴う降伏の進展及び変位状況を追跡した。表-6に解析に使用したモデル諸元を示す。要素の降伏判定は、2次元問題におけるvon Misesの降伏条件式 $\sigma_a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$... (50) を使い、 $\sigma_t = 240\text{MPa}$ で降伏するものとした。降伏した要素の剛性については、0と初期剛性の2割に低減した場合の2通りについて行った。図-12は、分割方法が高さ方向64分割、長さ方向256分割した系について、荷重Pの増加に伴う、先端たわみの変化を示したものである。この例では、いずれの剛性変化についても4回目

表-7 片持ち梁の解析結果(修正要素剛性：0)

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
荷重(N)	6445.2	7056.1	7136.3	7138.0	7138.0	7138.0	7138.0	7138.0	7138.0
先端たわみ($\times 10^{-2}\text{m}$)	1.0101	2.0214	3.0336	4.0468	5.0625	6.0783	7.0949	8.1124	9.1318
降伏要素番号	1	128	2	3	130	126	131	127	132

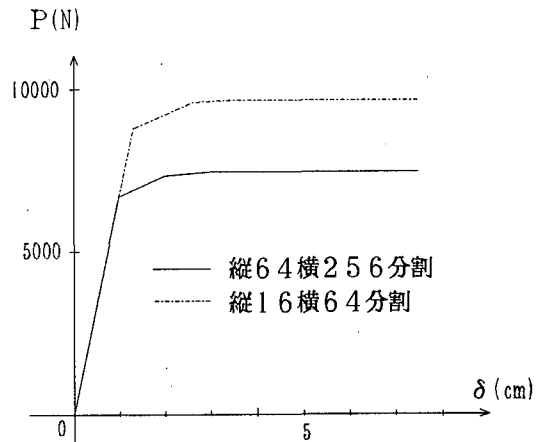


図-12 荷重(P) - 先端たわみ(δ)関係

以降荷重の増加はほとんど見られずたわみのみ進行した。剛性0の場合について荷重増加と、降伏していく要素の順番を示したものが表-7である。2列目、上端2層め要素(132要素)が降伏した時点では、不安定となった。原因としては、剛性0として再解析する際の応力集中などが考えられる。初期剛性の2割に低下するとした場合は、はりの上下端に降伏域が滑らかに広がり崩壊する傾向は示したが、荷重増加はあまり見られず、要素数の多い方が強度が低いなど、弾塑性解析への適用には問題を残した。今後、この剛性低下の割合算定について検討したい。しかし、相似系の一部修正については、基本マトリックスと修正部のみの取扱で、相似系の消去・縮合法が適用できることは確認できた。

4. おわりに

本研究では、有限要素法解析において、相似形メッシュで分割された系の剛性マトリックスの特性に着目、その特性を生かして剛性マトリックスの縮合を効率よく行う手法の誘導を行い、上下端への剛性マトリックスの縮合、全変位の算定まで、基本部の剛性マトリックスの計算のみで済むことを示した。また、2次元問題ではあるが変断面ばりの解析を本法と反復法の1つICCG法で行い、その解析を通して本法の妥当性の検討を行った。計算容量としては、提案法はサブパートのみの取り扱いで済むことから縦横分割比1:1の正方形はりでも提案法が有利である。計算時間に関して提案法は、2^p-1行の中間行を消去・縮合するのに、p回で行えることから、分割数が少ないとその効果は小さいが、縦横分割比1:2以上の場合についてはその効果を発揮できるこ

とから、大規模な系を解くための一解析法として十分有用な方法であると思われる。また、3次元問題に関しても同様であることを解析を通して明かにした。最後に、一部修正されたはりの解析例として、荷重の増大とともに要素が降伏し、剛性に変化する問題に適用してみた。解析結果より、降伏以後の挙動解析に問題が残るが、完全に相似系でなくとも、非相似部分を一部修正として扱うこの手法が十分適用可能であることが明らかになった。

参考文献

- 1) 土木学会編：構造工学シリーズ、構造工学における計算力学の基礎と応用、p370~371
- 2) I. HIRAI・Y. UCHIYAMA・Y. MIZUTA・D. PILKEY: AN EXACT ZOOMING METHOD, Finite Elements in Analysis and Design 1, 1985, P61~69
- 3) 内山・水田・平井：FEM修正ズーム法による計算効率化について、土木構造・材料論文集、第11号、1995年12月、P121~126
- 4) Richard B., Michael B., Tony F. Chan, James D., June D., Jack D., Victor E., Roldan P., Charles P. and Henk von der Vorst(長谷川里美、長谷川秀彦、藤野清次共訳)：反復法 Templates, 朝倉書店、1996
- 5) K. J. Bathe, E. L. Wilson(菊地文雄訳)：有限要素法の数値計算, 科学技術出版、1979
- 6) 崎元達郎：構造力学[下], 森北出版、1998
- 7) 横山正明：高精度計算力学, 朝倉書店、1998

(2001年4月20日受付)