

Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析

Vibration of Rectangular Wood Plates with Varying Thickness by the Spline Element Method

近藤八重* 水澤富作**

Yae KONDO, Tomisaku MIZUSAWA

*大同工業大学 非常勤講師 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

**工博 大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

Wood is known as a complex material having both anisotropic and viscoelastic properties from a theoretical standpoint. The moduli of elasticity of wood easily varies with the variation of temperature and water content.

This paper presents vibrations of wood plates with varying thickness using the spline element based on the orthotropic Mindlin plate theory. The convergence and accuracy of the present method are demonstrated to be compared with those obtained by other numerical methods. The effects of taper ratio, thickness ratio and variation of moduli of elasticity on the frequencies of wooden plates have been investigated

Key Words: vibration, wood plate, orthotropic Mindlin plate theory, spline element method

1. はじめに

木材は、古くから木橋、木造家屋や木製楽器などに用いられ、環境にやさしい素材として慣れ親しまれている。最近では、用途に応じて、単板を重ね合わせた合板やパーティクルボードの開発、薬品による化学的処理や高圧力による圧密加工を施して、材質の耐久性、靱性や耐衝撃性などの改善が図られている¹⁾。このような木板または木質板の振動解析は、衝撃荷重を受ける木構造物の動的応答や打撃音などの音響特性を知る上で重要な課題である。

木材は、鋼やコンクリートなどの材料と異なり、繊維質のセル構造を形成するので、繊維方向(L)、放射方向(R)や接線方向(T)により大きく弾性率が異なり、強い異方性を示し、また流動性状に関係する粘弾性を有している²⁾。木材の弾性係数比 E_L/E_R はおおよそ 10 程度であり、樹種によりせん断弾性係数は繊維方向の弾性係数と比較してかなり小さな値($E_L/G_{RT}=35\sim500$)になるので、比較的薄い板であっても横せん断変形の影響が無視できなくなる³⁾。また、樹種や含水率などによって材料特性値が大きく異なることが知られており、特に、含水率の変化により、弾性係数が 30% 程度変動することが報告されている²⁾。しかしながら、板の振動特性に与える弾性係数の変動の影響については、十分に明らか

にされていない。

異方性の大きな木板の振動特性は、古くからクラドニ一法⁴⁾やホログラフィー法⁵⁾を用いた振動実験により検討されているが、周辺自由の板が対象とされている。

一方、木構造物や木製楽器に用いられる変断面を有する木板や合板のような直交異方性変厚板の振動解析では、横せん断変形を無視した直交異方性薄板理論を適用した研究が幾つか報告されているが⁶⁻⁹⁾、解析法に重点が置かれており、変厚木板の振動特性は必ずしも十分に明らかにされていない。また、横せん断変形の影響を考慮した変厚木板の振動問題は、あまり研究されていないように思われる。

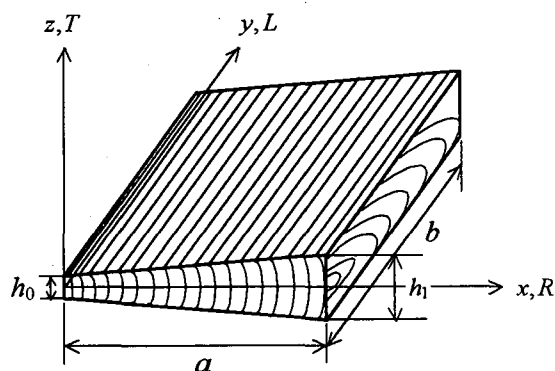


図-1 変厚木板と座標系

本研究では、直交異方性 Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、図-1に示すような変断面を有する木板の振動解析について検討し、本手法の収束性や精度比較について示している。また、長方形木板の振動特性に与える変厚比、幅厚比、弾性係数の変動や境界条件などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化

本論文では、直交異方性理論と一次せん断変形板理論に基づく spline 要素法¹⁰⁾を用いて式の定式化をする。この方法は、独立した3つの変位関数(たわみと2つの回転角)に高次の連続性を有する区分多項式である B-spline 関数を用いた数値解析法である。

Mindlin 板の x, y, z 方向の変位 U, V, W は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= z \theta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= z \theta_y(x, y) \\ W(x, y) &= W'(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 W' はたわみであり、 θ_x と θ_y は、それぞれ y 軸と x 軸回りの回転角である。

ここでは、次式で示す無次元座標系を用いて、式の定式化を行う。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad W' = W/b \quad (2)$$

ここで、 a と b はそれぞれ x 軸と y 軸方向の長さを示す。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \theta_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、それぞれ正規化された B-spline 関数である¹⁰⁾。また、 $i_x = k-1+M_x$ 、 $i_y = k-1+M_y$ 、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} は、それぞれ未定係数である。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ ξ -方向と η -方向の要素分割数である。

したがって、式(3)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (4)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \begin{bmatrix} N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、

$$\{d\} = \{\theta_x, \theta_y, W'\}^T, \quad \{\Delta\}_{mn} = \{A_{mn} B_{mn} C_{mn}\}^T \quad \text{である。}$$

次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\varepsilon\}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\varepsilon\}_s = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}_s$ を無次元座標系 (ξ, η) で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}_b = \begin{Bmatrix} (z/a)\partial\theta_x/\partial\xi \\ (z/b)\partial\theta_y/\partial\eta \\ (z/b)\partial\theta_x/\partial\eta + (z/a)\partial\theta_y/\partial\xi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \theta_y + \partial W'/\partial\eta \\ \theta_x + (b/a)\partial W'/\partial\xi \end{Bmatrix} \quad (7)$$

したがって、式(4)を式(6)と(7)に代入すれば、ひずみベクトル $\{\chi\}$ は、次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_b \\ \{\varepsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (8)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a)\partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1/b)\partial/\partial\eta & 0 \\ (1/b)\partial/\partial\eta & (1/a)\partial/\partial\xi & 0 \\ 1 & 0 & (b/a)\partial/\partial\xi \\ 0 & 1 & \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[B]_{mn} = [T][S]_{mn}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a}\right) \dot{N}_m N_n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right) N_m \dot{N}_n & 0 \\ \left(\frac{1}{b}\right) N_m \dot{N}_n & \left(\frac{1}{a}\right) \dot{N}_m N_n & 0 \\ N_m N_n & 0 & \left(\frac{b}{a}\right) \dot{N}_m N_n \\ 0 & N_m N_n & N_m \dot{N}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_b]_{mn} \\ [B_s]_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで, $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_n = N_{n,k}(\eta)$

$\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$, $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$ である.

板の板厚は, ξ -方向に任意の形状で変化すると仮定している. $\xi = 0$ と $\xi = 1$ での板厚を h_0 と h_1 とすると, 板厚が凸型断面の場合は,

$$h(\xi) = h_0 \{ \delta - (\delta - 1)(1 - \xi)^n \} = h_0 H(\xi) \quad (11)$$

また, 凹型断面の場合は,

$$h(\xi) = h_0 \{ (\delta - 1)\xi^n + 1 \} = h_0 H(\xi) \quad (12)$$

で与えられる. ここで, δ は変厚比であり, h_1/h_0 で表される. また, 上式において, 板厚断面の形状を表す多項式の次数 n を 1 に仮定すると, 板厚断面は, 線形的に変化することになる.

直交異方性変厚板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは, それぞれ次式で表される.

$$[D]_b = \frac{E_x h(\xi)^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{yx} & 0 \\ \nu_{yx} & \frac{E_y}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xy}}{E_x} (1 - \nu_{yx} \nu_{xy}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D]_s = \kappa h(\xi) \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし, $E_x, E_y, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}$ は, それぞれ弾性係数とせん断弾性係数であり, κ はせん断修正係数である. また, ν_{xy}, ν_{yx} はポアソン比であり, 直交異方性板では, 次式の関係が成り立つ.

$$\nu_{xy} E_y = \nu_{yx} E_x \quad (15)$$

したがって, 変厚直交異方性 Mindlin 板のひずみエネルギー, U は,

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{ab}{2}\right) \int_0^1 \int_0^1 \{ \varepsilon \}_b^T [D]_b \{ \varepsilon \}_b \\ &\quad + \{ \varepsilon \}_s^T [D]_s \{ \varepsilon \}_s d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{ab D_x^0}{2a^2}\right) \int_0^1 \int_0^1 \left[H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{E_y}{E_x} \right) H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \nu_{yx} H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \\ &\quad + 4(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \left(\frac{G_{xy}}{E_x} \right) H(\xi)^3 \left\{ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \right\}^2 \\ &\quad + 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \kappa \left(\frac{b}{h_0} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{G_{xz}}{E_x} \right) H(\xi) \left\{ \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{\partial W'}{\partial \xi} \right) + \theta_x \right\}^2 \\ &\quad \left. + 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \kappa \left(\frac{b}{h_0} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{G_{yz}}{E_x} \right) H(\xi) \left\{ \left(\frac{\partial W'}{\partial \eta} \right) + \theta_y \right\}^2 \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

また, この板の運動エネルギー, T は,

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\rho h_0}{2}\right) \omega^2 ab^3 \int_0^1 \int_0^1 \{ H(\xi) W'^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{h_0}{b}\right)^2 H(\xi)^3 (\theta_x^2 + \theta_y^2) \} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (17)$$

で与えられる. ここで, ρ は密度, ω は円振動数(rad/sec)であり, $D_x^0 = E_x h_0^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ である.

変厚板の全ポテンシャルエネルギー, Π は, 次式で示される.

$$\Pi = U - T \quad (18)$$

したがって, 式 (4) を式 (18) に代入し, Π を極値化すれば, 次式の代数方程式が得られる.

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_{mn} = 0, \begin{cases} m = 1, 2, \dots, i_x \\ n = 1, 2, \dots, i_y \end{cases} \quad (19)$$

式 (19) をマトリックス表示すれば, 次式のようになる.

$$\sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{r=1}^{i_x} \sum_{s=1}^{i_y} ([K]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn} - n^* [M]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn}) = 0 \quad (20)$$

ここで, n^* は振動数パラメータであり, $\omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_x^0}$ で表している.

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は, それぞれ次式で与えられる.

$$[K]_{mnrs} = \frac{D_x^0 ab}{a^2} \begin{bmatrix} [K\theta_x \theta_x] & [K\theta_x \theta_y] & [K\theta_x W'] \\ [K\theta_y \theta_x] & [K\theta_y \theta_y] & [K\theta_y W'] \\ [KW' \theta_x] & [KW' \theta_y] & [KW' W'] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[M]_{mnrs} = \rho h_0 \omega^2 ab^3 \begin{bmatrix} [M\theta_x \theta_x] & 0 & 0 \\ 0 & [M\theta_y \theta_y] & 0 \\ 0 & 0 & [MW' W'] \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで, $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは,

表-1 木材の材料物性値^{9),11),13)}

樹種	E_L	E_R	E_T	V_{LR}	ρ
	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}		
	[10^3 kgf/cm^2]				
メイプル合板	42.18 11.18	131.5 -	- -	0.12	-
シトカスプルス	118.0 7.7	9.2 7.3	5.1 0.34	0.37	0.34
杉	75.00 6.5	6.0 3.5	3.0 0.15	0.4	0.33
ヒノキ	134.0 10.1	10.4 6.4	6.3 1.28	0.43	0.43

$3(k+M_x-1)(k+M_y-1)$ で与えられる。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。
Appendix には、これらのマトリックスの要素が示してある。

3. 数値計算例および考察

ここでは、表-1 に示す材料物性値を持つ異方性の大きな合板と木板の振動解析を行い、spline 要素法で求めた解の収束性や精度比較について述べ、また軽量で建材や楽器用材として用いられるシトカスプルス材などの変厚板等の振動特性について示す。表-1 で用いた L, R, T は、それぞれ木材の繊維方向、放射方向および接線方向を表す。したがって、 $L-R$ 面は柱目板の中央面になり、 $L-T$ 面は板目板になる。また、長方形板の境界条件は CF-SC のように表し、それぞれ y 軸に平行な 2 つの辺 ($\xi=0,1$) で、固定辺(C)、自由辺(F)であり、他の 2 辺 ($\eta=0,1$) が単純支持辺(S)、固定辺(C)である。せん断修正係数 κ は $\pi^2/12$ に仮定している。

表-2 に、周辺固定されたメイプルの変厚合板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_2^2}$ の収束性に与える要素分割数の影響を示している。ここで、辺長比 $a/b=1.0$ 、変厚比 $h_1/h_0=1.5$ 、また幅厚比 b/h_0 は 250 と 10 に仮定している。要素の分割数 $M_x=M_y$ は 8 から 26 まで変化させている。これより、要素分割数を増大させると、一定値への収束状態が得られている。また、表-3 は、本手法の精度比較を示している。ここで、 x 軸に平行な 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が固定(CC-SS)および固定と自由(CF-SS)の x 方向に直線的に変厚な正方形合板($a/b=1.0, b/h_0=250$)を仮定している。比較のために、Lar らのスプライン関数法による解⁹⁾と滝沢らによる DQ 法を用いた値¹²⁾も示してある。これより、変厚比や境界条件を変化させても、本手法による値は、他の数値解と良く一致した結果が得られている。

次に、建材や楽器用材に用いられるトウヒ属科のスプ

表-2 周辺固定された変厚合板の振動数パラメータの収束性； $a/b=1.0, h_1/h_0=1.5, n=1, k-1=3$

b/h_0	$M_x=M_y$	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
250	8	33.38	56.04	81.26	96.8	108.1	138.7
	12	33.31	54.77	80.14	93.86	95.16	127.2
	16	33.30	54.68	80.06	92.93	95.05	126.5
	20	33.30	54.67	80.05	92.81	95.03	126.4
	24	33.30	54.67	80.05	92.78	95.02	126.4
	26	33.30	54.67	80.05	92.77	95.02	126.4
10	8	24.85	40.05	46.83	57.46	62.31	73.79
	12	24.85	40.06	46.83	57.49	62.31	73.79
	16	24.85	40.07	46.83	57.49	62.31	73.80
	20	24.85	40.07	46.84	57.49	62.31	73.80
	24	24.85	40.07	46.84	57.49	62.31	73.80
	26	24.85	40.07	46.84	57.49	62.31	73.80

ルース材から成る変厚柱目板の振動特性について示す。
図-2 には、周辺固定された変厚柱目板の 1 次から 400 次までの振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_2^2}$ の分布に与える要素分割数の影響が示してある。ここで、幅厚比は 10 と 100 であり、また変厚比を 2.0 に仮定している。

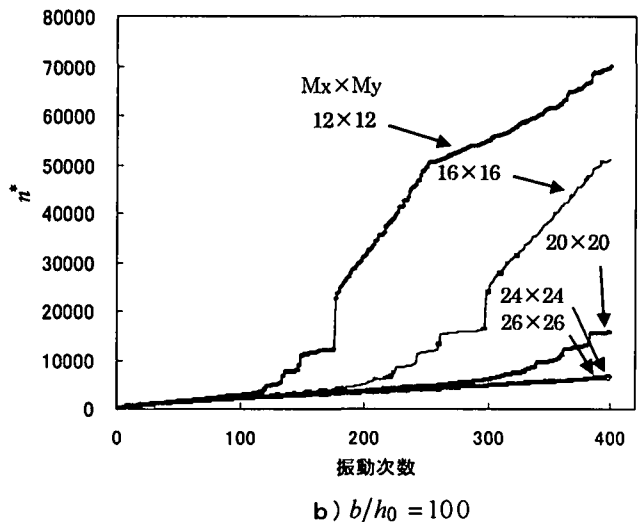
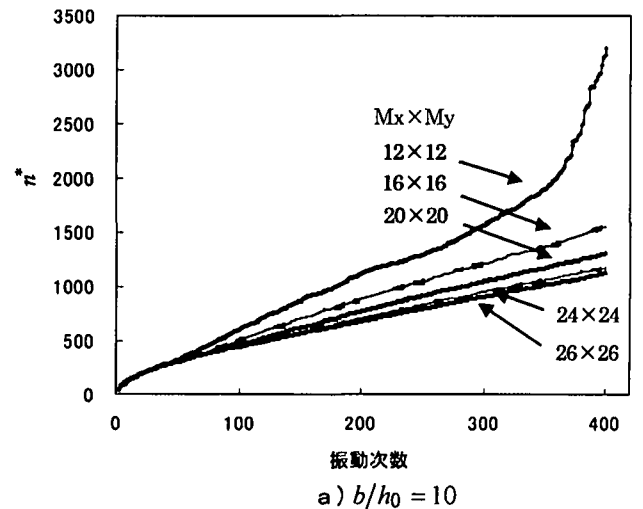


図-2 周辺固定された変厚シトカスプルス柱目板の 400 次までの振動数パラメータの収束性に与える要素分割数の影響； $a/b=1.0, h_1/h_0=2.0, n=1, CC-CC$

表-3 変厚合板の振動数パラメータの精度比較; $a/b = 1.0, b/h_o = 250, n = 1, k - 1 = 3$

境界条件	h_1/h_o	methods	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CC-SS	1.0	SEM	24.12 (1,1)	34.64 (2,1)	58.95 (3,1)	63.36 (1,2)	71.03 (2,2)	89.48 (3,2)	96.33 (4,1)	121.5 (4,2)	122.5 (1,3)	129.1 (2,3)
		spline法 ⁹⁾	24.14			63.51					123.0	
		DQ法 ¹²⁾	24.13	34.65	59.97	63.43	71.11	89.57	96.35	121.6	122.7	129.4
	1.1	SEM	25.31	36.35	61.85	66.49	74.54	93.91	101.0	127.5	128.5	135.5
		spline法	25.33			66.65					129.1	
		DQ法	25.32	36.36	61.88	66.57	74.62	94.01	101.1	127.7	128.8	135.8
	1.3	SEM	27.62	39.68	67.45	72.55	81.36	102.6	109.9	139.5	140.2	147.8
		spline法	27.65			72.73					140.9	
		DQ法	27.64	39.7	67.49	72.65	81.47	102.7	109.9	139.6	140.5	148.2
	1.5	SEM	29.87	42.91	72.82	78.40	87.96	111.0	118.1	151.2	151.4	159.7
		spline法	29.90			78.60					152.2	
		DQ法	29.89	42.93	72.86	78.53	88.10	111.2	118.2	151.4	151.9	160.2
CF-SS	1.0	SEM	7.596 (1,1)	23.74 (2,1)	25.17 (1,2)	37.98 (2,2)	51.47 (3,1)	63.33 (3,2)	64.22 (1,3)	73.94 (2,3)	90.49 (4,1)	94.53 (3,3)
		DQ法	7.596	23.74	25.18	38.00	51.48	63.36	64.27	74.00	90.51	94.62
	1.1	SEM	7.993 (1,1)	25.44 (2,1)	26.13 (1,2)	39.89 (2,2)	55.20 (3,1)	66.85 (3,2)	67.05 (1,3)	77.42 (2,3)	96.90 (4,1)	99.30 (3,3)
		DQ法	8.01	25.44	26.14	39.91	55.22	66.89	67.11	77.50	96.93	99.41
	1.3	SEM	8.812 (1,1)	28.01 (1,2)	28.80 (2,1)	43.69 (2,2)	62.25 (3,1)	72.56 (1,3)	74.05 (3,2)	84.23 (2,3)	107.9 (4,1)	108.7 (3,3)
		DQ法	8.838	28.02	28.80	43.72	62.24	72.64	74.11	84.33	108.0	108.9
	1.5	SEM	9.654 (1,1)	29.85 (1,2)	32.09 (2,1)	47.47 (2,2)	68.72 (3,1)	77.90 (1,3)	81.52 (3,2)	90.87 (2,3)	117.2 (4,1)	118.0 (3,3)
		DQ法	9.656	29.87	32.10	47.51	68.76	77.99	81.58	91.00	117.2	118.2

(i, j) は、それぞれ x, y 方向のモード次数, SEM は Spline 要素法, DQ 法は Differential Quadrature 法

これより、要素の分割数が粗いと、70 次以降の振動数にスキップが現れ、正確な高次の振動数パラメータが求められないことがわかる。特に、板厚が増大する場合や変厚比が大きくなる場合には、要素の分割数を高める必要がある。以後の数値計算では、要素分割数は 26×26 とし、スプライン次数は 3 次以上で解の収束性に与える影響が見られなかったため 3 次と仮定している。

図-3 は、板厚が凸断面を有するスプルス栓目板 ($a/b=1.0$, CC-CC) の基本振動数パラメータ n_1^* に与える幅厚比 b/h_o と凸断面形状を表す多項式の次数 n の影響を示している。ここで、変厚比 h_1/h_o は、1.0 から 2.0 まで変化させ、また b/h_o は 250 と 10 に仮定し、 n は、1 次直線から 3 次曲線まで変化させている。

これより、振動数パラメータは、板厚の断面形状に関係なく、変厚比に対して線形的に変化する。また、幅厚比が大きくなるほど、振動数パラメータに与える変厚比の影響が顕著に現れてくる。図-4 には、線形的に板厚が変化する周辺固定されたスプルス栓目板 ($a/b=1.0$, $n=1$, CC-CC) の 6 次までの振動数パラメータに与える変厚比と幅厚比の影響が示してある。ここで、 b/h_o は 250 と 10 に仮定し、 h_1/h_o は 1.0 から 2.0 まで変化させている。これより、振動数パラメータは、幅厚比に関係なく、変厚比の増大とともに直線的な増加を示している。また、図-5 に示すモード形状から分かるように、板厚が大きい場合には、変厚比により、高次振動数にモードの遷移する現象 (直線が交差し、モードのスイッチ) が生じてくる。この遷移現象は、幅厚比と変厚比に関係

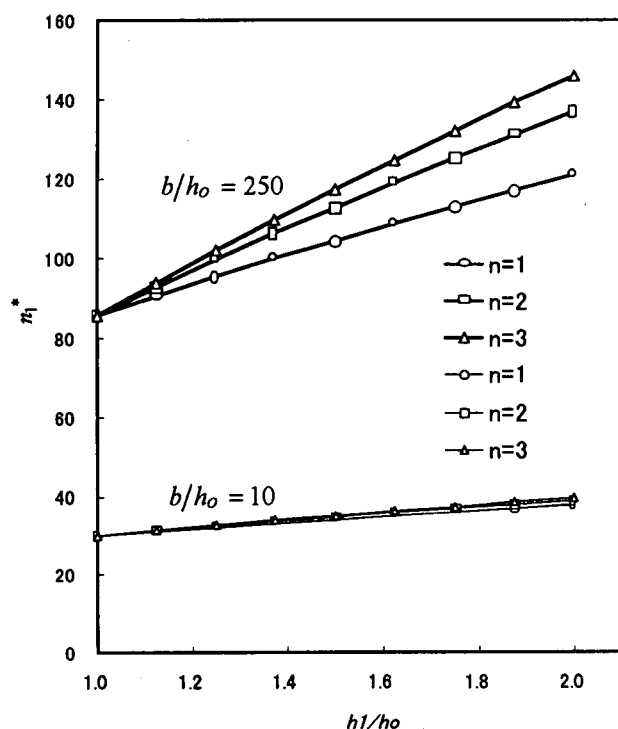


図-3 板厚が凸断面形状であるスプルス栓目板の基本振動数パラメータ n_1^* に与える b/h_o と断面形状の影響; $a/b=1.0$, CC-CC

しており、変厚比が増大すると一方向に板厚も大きくなるので、高次振動数におけるモードの遷移は、横せん断変形の影響と変厚比の変化によるものと考えられる。また、変厚板のモード形状は、等厚板の形状と比較して、板厚の薄い側に膨らみ、非対称になる。

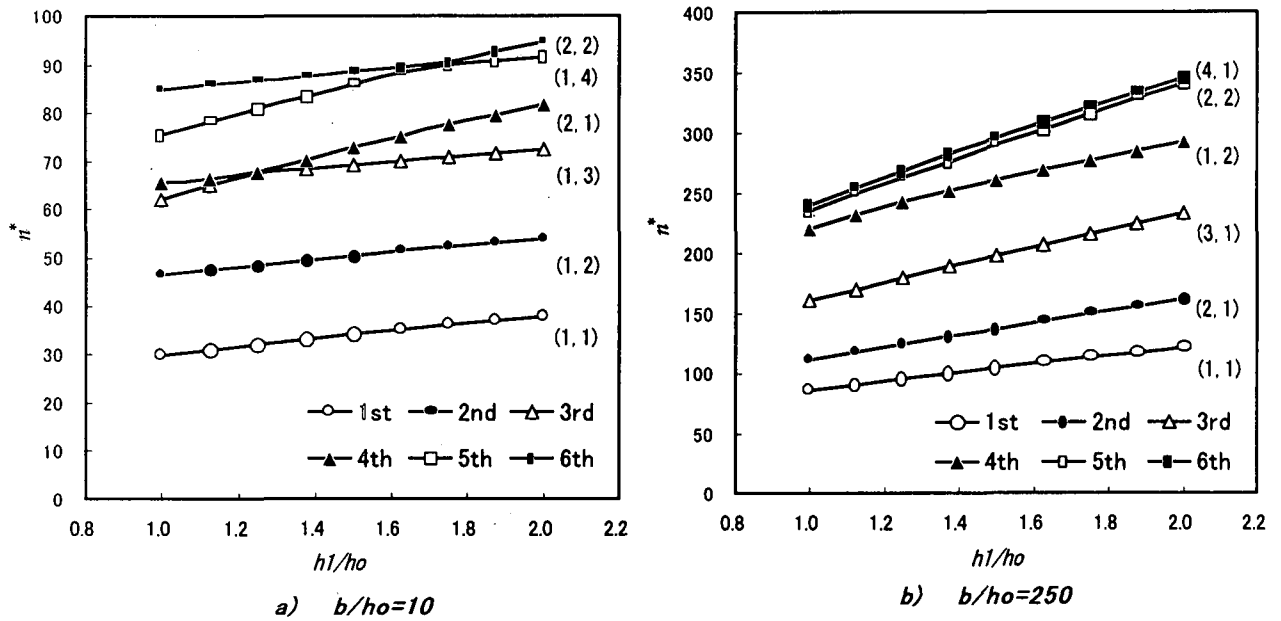


図-4 スプルス柱目板の振動数パラメータ n^* に与える b/ho と $h1/ho$ の影響 ; $a/b=1.0$, $n=1$, CC-CC
また, (i,j) は, それぞれ x,y 方向のモード次数を示す。

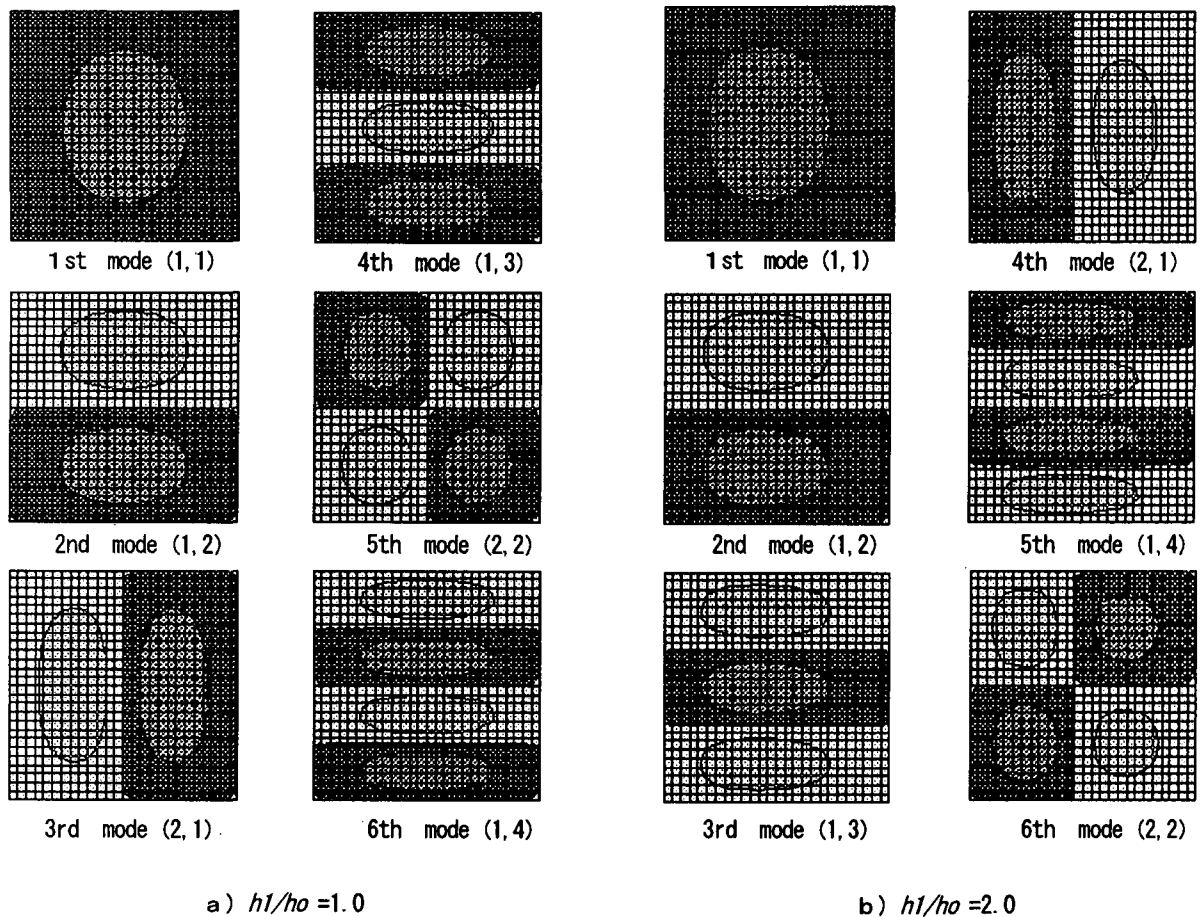


図-5 等厚断面と変厚断面のシトカスプルス柱目板の振動モード形状 ; $a/b=1.0$, $b/ho=10$, $n=1$, CC-CC
また, (i,j) は, それぞれ x,y 方向のモード次数を示す。

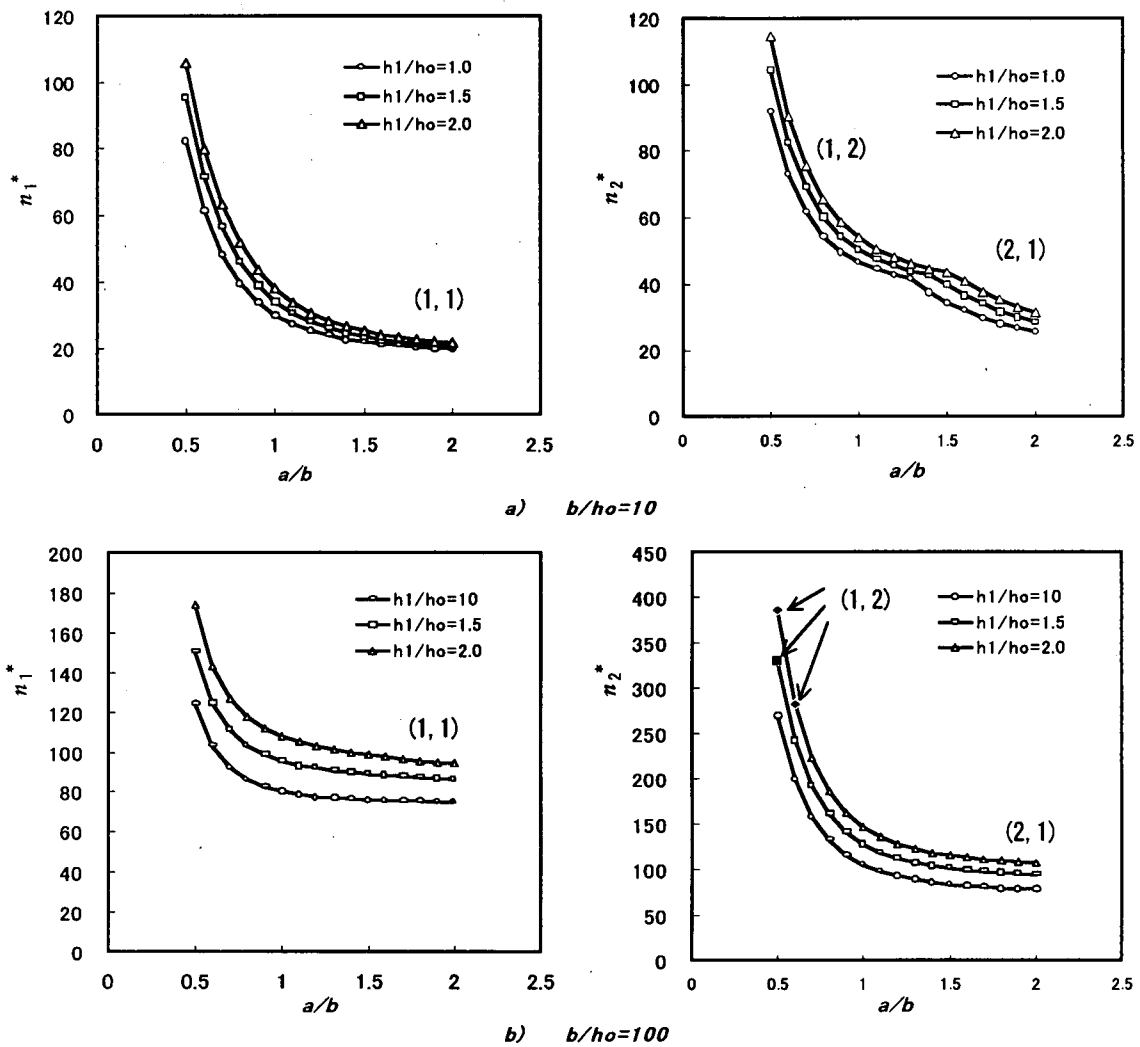


図-6 スプルス柱目板の振動数パラメータに与える a/b , $h1/h_o$ と b/h_o の影響 ; $n=1$, CC-CC, (i, j) はモード次数

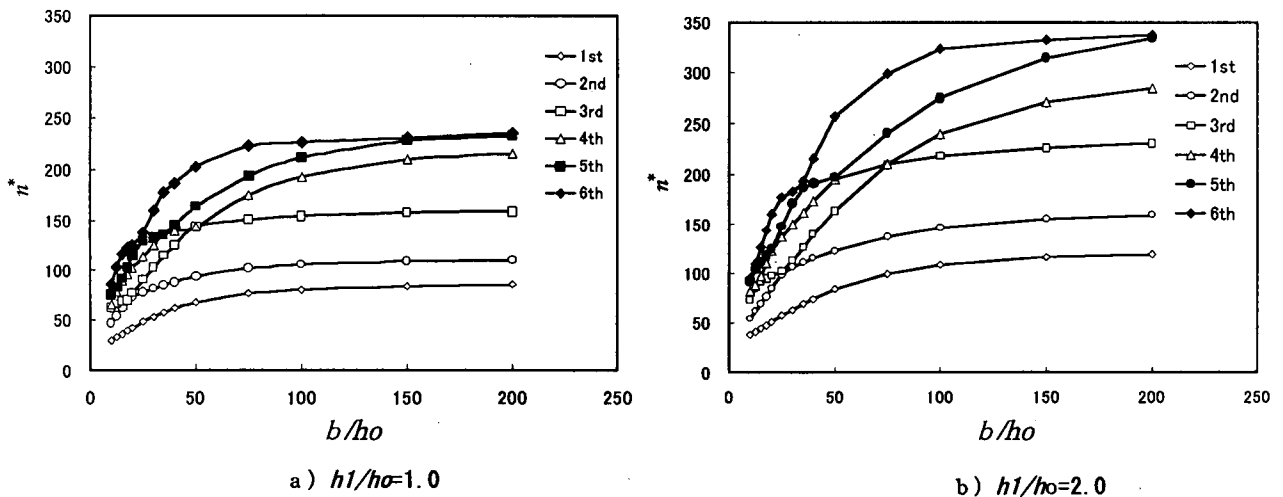


図-7 スプルス柱目板の振動数パラメータに与える $h1/h_o$ と b/h_o の影響 ; $a/b=1.0$, $n=1$, CC-CC

図-6 には、それぞれ幅厚比を 100 と 10 に仮定し、周辺固定されたスプルス長方形柱目板の 1 次と 2 次の振動数パラメータに与える辺長比 a/b の影響が示してある。ここで、 $n=1$ 、変厚比は 1.0, 1.5, 2.0 に仮定して、また辺長比は 0.5 から 2.0 まで変化させている。これよ

り変厚比が増大すると、2 次の振動数パラメータにモードの遷移現象が現れ、また幅厚比が小さいほど顕著に生じてくる。

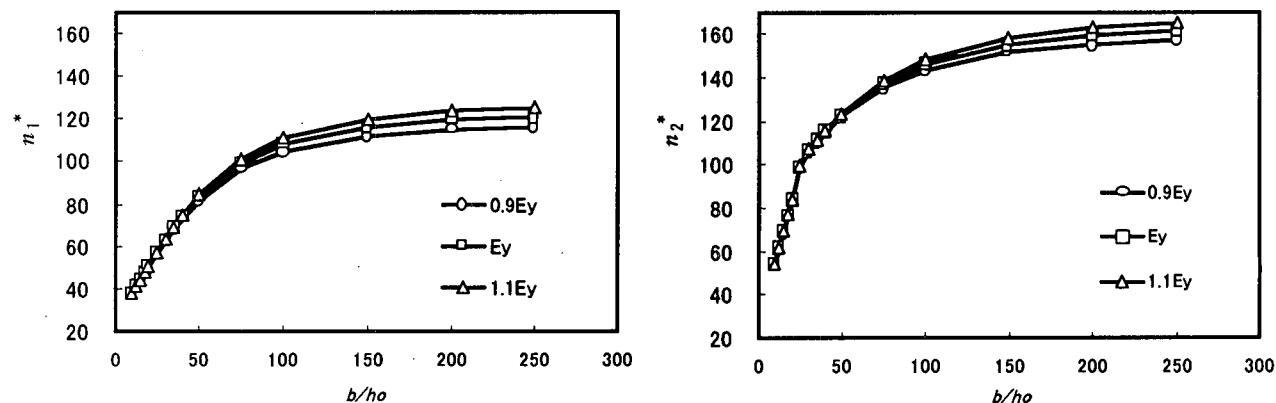
図-7 には、正方形スプルス柱目変厚板 ($a/b=1.0, n=1, CC-CC$) の 6 次までの振動数パラメー

タに与える幅厚比と変厚比の影響が示してある。ここで、 b/h_0 は 10 から 200 まで変化させている。これより、幅厚比が比較的小さな厚い板では、1 次の振動数パラメータを除く全ての振動数に、モードの遷移現象が現れる。また、変厚比が大きくなると、相対的に板厚が増大するので、比較的大きな幅厚比でも、モードの遷移が生じてくることがわかる。

次に、まえがきで述べたように木材の弾性係数は含水

率により大きく変動するので、ブレース柱目板の振動特性に与える弾性係数の変動の影響について示す。直交異方性 Mindlin 板理論でモデル化した木板には、表-1 に示すような 5 つの弾性係数がある。

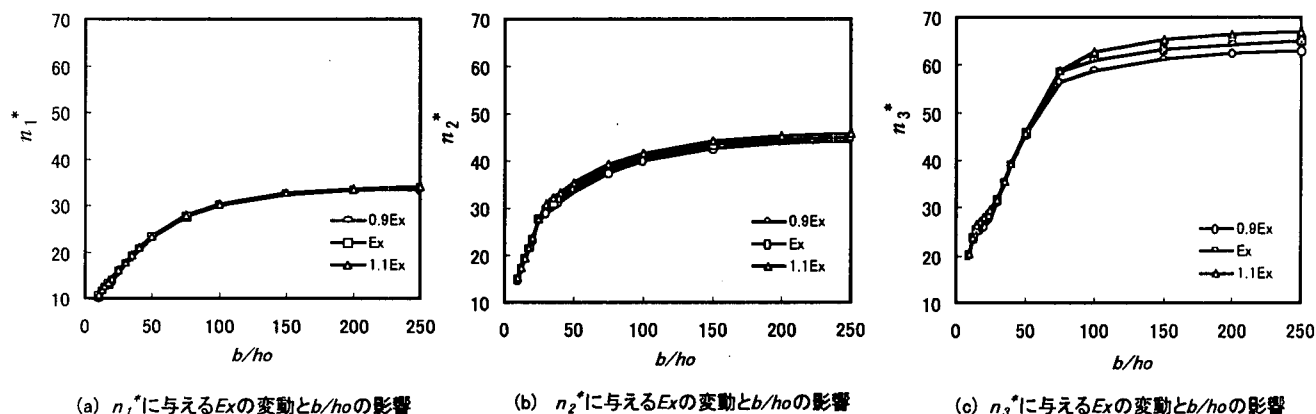
図-8a), b), c) には、それぞれ繊維方向の弾性係数 E_y (E_L)、放射方向の弾性係数 E_x (E_R)、およびせん断弾性係数 G_{xz} (G_{RT}) が $\pm 10\%$ で変動した場合、周辺固定されたスプルー変厚柱目板 ($h_1/h_0=2.0$, $a/b=1.0$,



(a) n_1^* に与える E_y の変動と b/h_0 の影響

(b) n_2^* に与える E_y の変動と b/h_0 の影響

図-8a) 振動数パラメータ n^* に与える E_y の変動と b/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $h_1/h_0=2.0$, $r=1$, CC-CC

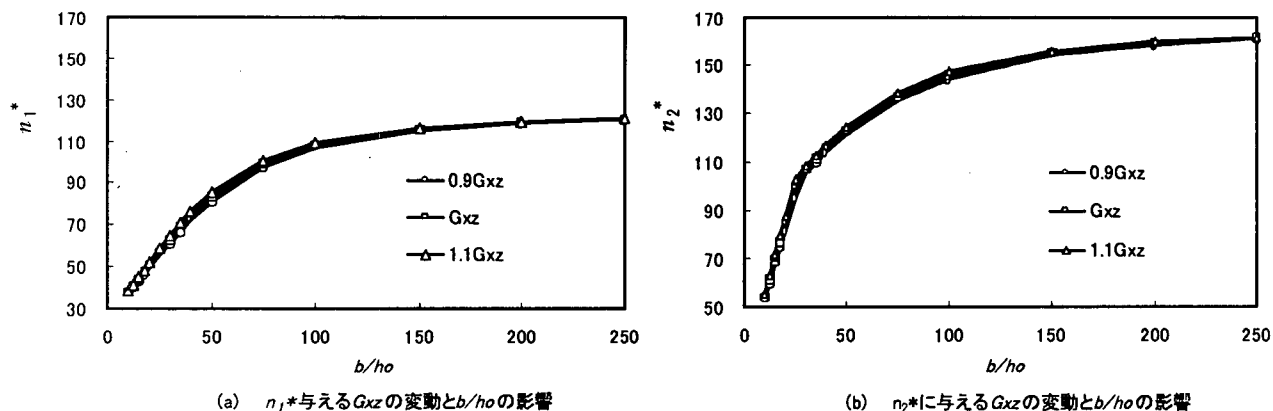


(a) n_1^* に与える E_x の変動と b/h_0 の影響

(b) n_2^* に与える E_x の変動と b/h_0 の影響

(c) n_3^* に与える E_x の変動と b/h_0 の影響

図-8b) 振動数パラメータ n^* に与える E_x の変動と b/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $h_1/h_0=2.0$, $r=1$, CC-CC



(a) n_1^* に与える G_{xz} の変動と b/h_0 の影響

(b) n_2^* に与える G_{xz} の変動と b/h_0 の影響

図-8c) 振動数パラメータ n^* に与える G_{xz} の変動と b/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $h_1/h_0=2.0$, $r=1$, CC-CC

$n=1$)の振動数パラメータに与えるこれらの弾性係数の変動の影響が示してある。ここで、 b/h_o は10から250まで変化させている。これより、振動数パラメータに与える E_L の変動の影響は、振動次数に関係なく、幅厚比が大きくなるほど、顕著に見られる。また、 E_R の変動の影響は、振動次数により異なり、高次の振動数パラメータに大きく見られる。一方、振動数パラメータに与える他のせん断弾性係数の変動の影響は非常に小さいが、 E_L と比較して非常に小さな値になる G_{RT} の変動が振動数パラメータに与える影響は、幅厚比が40から100の範囲で大きく現れてくる。

次に、振動数パラメータの値に最も大きな影響を与える E_L の変動と幅厚比や変厚比の関係について検討する。図-9は、周辺固定されたスプルーす柱目板の $E_y(E_L)$ を $\pm 50\%$ で変動させた場合の1次から10次までの動数パラメータを示している。ここで、 h_1/h_o は2.0、また b/h_o は10から100まで変化させている。これより、幅厚比が増大すると、高次の振動数パラメータには、 E_L の変動により、モードの遷移現象が顕著に現れてくる。しかしながら、幅厚比が小さな厚板では、このようなモードの遷移が現れない。

木材の振動数パラメータの遷移現象は、幅厚比、変厚比、辺長比や弾性係数の変動に関係するので、木造構造物や木製楽器の動的応答や音響特性に大きな影響を与えるものと考えられる。

図-10には、それぞれ2つの固定辺と2つの自由辺を持つスプルーす柱目板($a/b=1.0, h_1/h_o=2.0, n=1$)の振動数パラメータが示してある。ここで、 b/h_o は10から250まで変化させている。これより、木材の繊維方向に垂直な二辺を固定するれば、振動数パラメータがかなり大きな値になる。また、図-11は、FF-CCとCC-FFの2つの境界条件を持つ柱目板($a/b=1.0, n=1$)の振動数パラメータに与える変厚比の影響が示してある。ここで、 h_1/h_o は1.0, 1.5, 2.0に仮定し、 b/h_o は10から250まで変化させている。これより、 h_1/h_o を大きくすると、振動数パラメータが増大するが、その値の大きさは、境界条件と b/h_o に関係している。

通常用いられる木板は、木材の加工方法により、柱目板と板目板になる。異方性材料で特徴づけられるこれらの板の振動特性について考察する。

図-12は、周辺固定された柱目板と板目板($a/b=1.0, n=1, CC-CC$)の振動数パラメータを示している。ここで、スプルーす柱目板の面内主軸方向は $L-R$ になり、また板目板の主軸は $L-T$ である。 E_L が共通であるので、振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_o / D_y}$ で表している。また、 b/h_o は10から200に変化させ、 h_1/h_o は1.0, 1.5, 2.0に仮定している。これより、柱目板の振動数パラメータは板目板の値より大きくなり、また h_1/h_o の影響は、柱目板の方が大きく現れている。

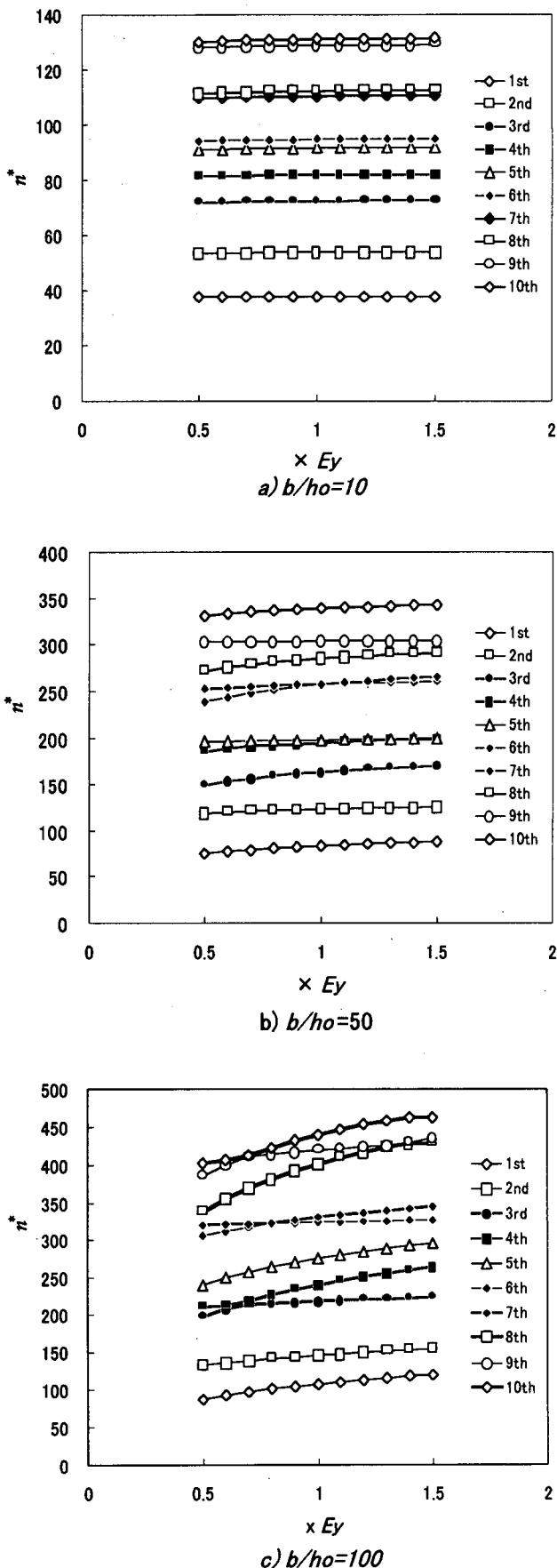
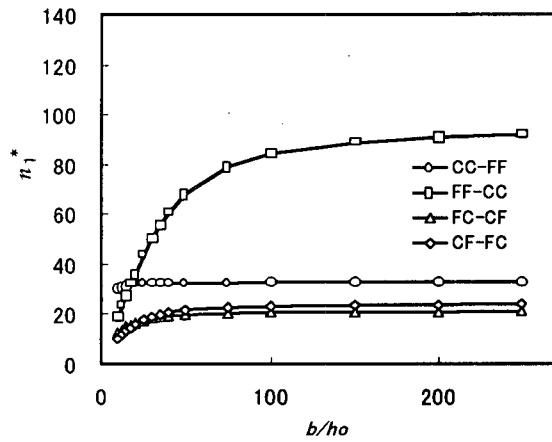
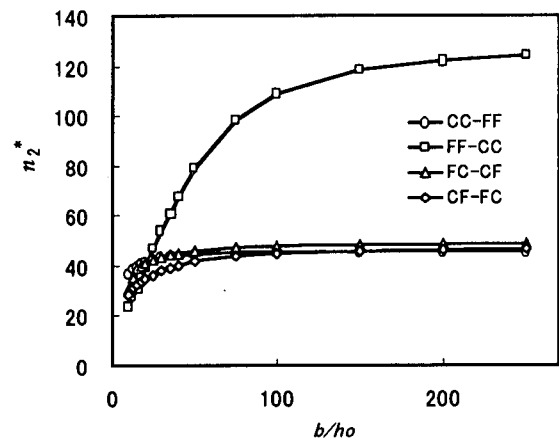


図-9 スプルーす柱目板の振動数パラメータに与える繊維方向の弾性係数 E_y の変動と b/h_o の影響
; $a/b=1.0, h_1/h_o=2.0, n=1, CC-CC$

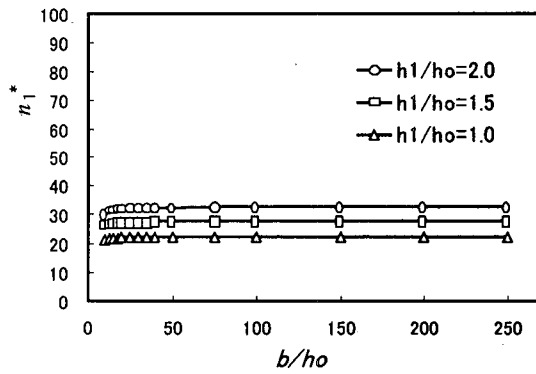


a) n_1^* に与える境界条件と b/h_0 の影響

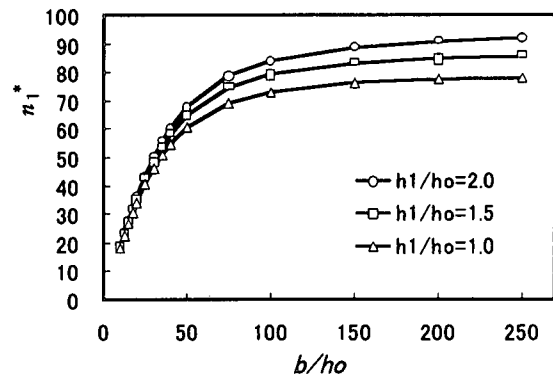


b) n_2^* に与える境界条件と b/h_0 の影響

図一10 固定辺と自由辺を有するスプルス柱目板の振動数パラメータ n^* に与える b/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $h_1/h_0=2.0$, $r=1$

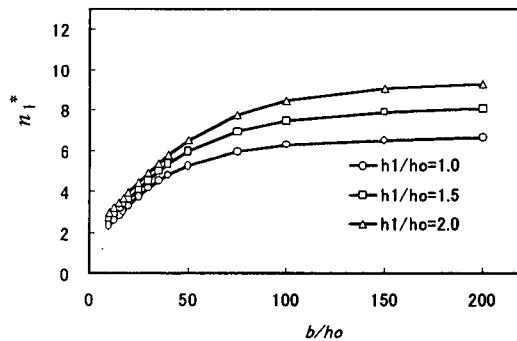


a) CC-FF

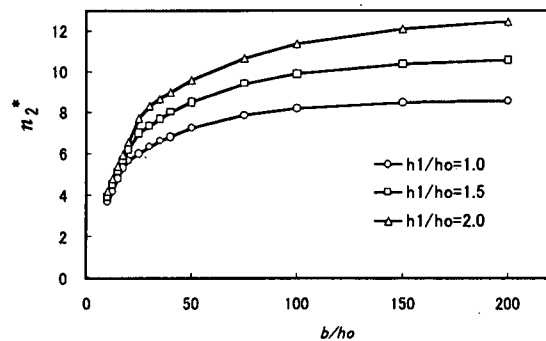


b) FF-CC

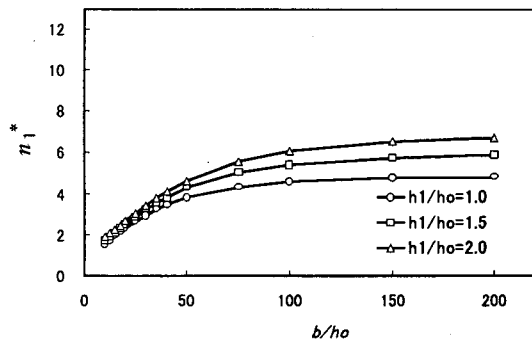
図一11 相対する2つの辺が自由辺であるスプルス柱目板の基本振動数パラメータ n_1^* に与える h_1/h_0 と b/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $r=1$



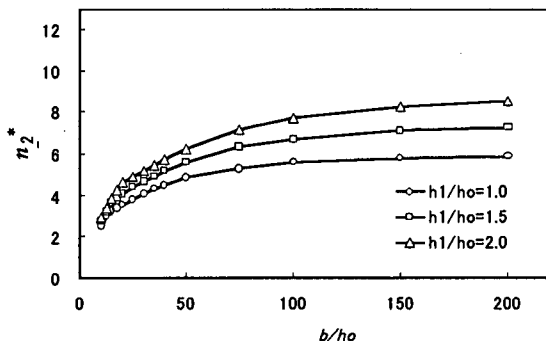
a) 柱目板の n_1^* に与える h_1/h_0 と b/h_0 の影響



b) 柱目板の n_2^* に与える h_1/h_0 と b/h_0 の影響



c) 板目板の n_1^* に与える h_1/h_0 と b/h_0 の影響



d) 板目板の n_2^* に与える h_1/h_0 と b/h_0 の影響

図一12 スプルス柱目板と板目板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_s}$ に与える b/h_0 と h_1/h_0 の影響 ; $a/b=1.0$, $r=1$, CC-CC

このように、繊維方向の弾性係数の値が同じであっても、木材の振動数は繊維方向と直角な方向の弾性係数 (E_R または E_T) の大きさに関係していることがわかる。

最後に、幾何寸法を同一とした場合の樹種による振動数の相違について検討する。

表-4 には、剛性の大きな桁目板を対象とし、シトカスプルス材、ヒノキ材と杉材から成る木板 (CC-CC, $a/b=1.0, n=1$) の振動数 (Hz) が示してある。ここで、辺長の長さ $a=b=100\text{cm}$ 、幅厚比 b/h_0 は 10 から 100 まで変化させ、変厚比 h_1/h_0 は、1.0, 1.5, 2.0 に仮定している。また密度や弾性係数などの材料値は、表-1 の値を用いて計算している。また、図-13 は、表-4 で用いたスプルス、ヒノキと杉の桁目板の基本振動数 (Hz) に与える変厚比と幅厚比を示している。これらの図と表より、 b/h_0 が増大すると、振動数は指数関数のように減少する。弾性係数の小さな杉の振動数が 1 番小さな値を示し、また弾性係数の大きなヒノキが 1 番大きな値を示しているが、 b/h_0 がある程度大きくなると、両者の差が小さくなる。また、振動数に与える h_1/h_0 の影響は幅厚比が小さいほど大きく現れているが、これはせん断弾性係数 G_{RT} と G_{LT} とに関係する横せん断変形によるものと考えられる。

4. あとがき

本文では、直交異方性理論と Mindlin 板理論に基づく spline 要素法を用いて、木構造物や木製楽器などに用いられる変厚木板の振動解析を行い、また木板の振動特性に与える変厚比、幅厚比や弾性係数の変動などの影響について検討を行った。得られた主な結果をまとめると、以下の通りである。

- 1. 従来あまり研究されていない変断面性状を有する直交異方性 Mindlin 板の振動解析を行うために定式化した spline 要素法は、変厚木板の振動数パラメータの安定した収束性と精度を示す。
- 2. スプルス桁目板の振動数パラメータは、変厚比や幅厚比に依存し、また幅厚比や変厚比を変化させると、横せん断変形の影響により、比較的高次の振動数パラメータにモードの遷移現象が生じてくる。
- 3. 木材特有の湿度や含水量による弾性係数の変動が振動数特性に与える影響は、繊維方向の弾性係数 E_L 、放射方向の弾性係数 E_R 、せん断弾性係数 G_{RT} の順に大きく現れるが、他のせん断弾性係数の影響は非常に小さい。また、弾性係数の変動により、比較的高次の振動に、モードの遷移現象が生じてくる。
- 4. 桁目板と板目板の振動数パラメータを比較すると、桁目板の振動数が板目板より大きくなり、また変厚比の影響は、桁目板の振動数パラメータに大きく生じてくる。

表-4 種々の桁目板の振動数 (Hz) に与える b/h_0 と h_1/h_0 の影響 ; $a/b=1.0, a=100\text{cm}, n=1, \text{CC-CC}$

樹種	b/h_0	h_1/h_0	1st	2nd	3rd	4th	5th
ヒノキ	100	1.0	60.73	79.11	114.5	153.7	166.5
		1.5	73.79	97.29	140.8	181.0	204.9
		2.0	84.99	114.0	164.9	201.4	236.7
	50	1.0	113.5	149.9	219.8	268.3	297.0
		1.5	134.3	179.9	265.9	304.4	343.5
		2.0	151.0	205.6	306.3	329.9	379.3
	20	1.0	210.7	303.7	419.1	475.2	493.1
		1.5	233.0	350.4	445.8	540.6	559.6
		2.0	249.9	390.2	465.1	579.3	631.5
	10	1.0	283.9	479.1	501.8	663.0	749.1
		1.5	309.6	527.3	547.1	725.3	772.3
		2.0	331.8	547.8	602.3	775.1	789.8
杉	100	1.0	15.09	20.22	29.95	35.08	39.24
		1.5	17.76	24.18	36.23	39.57	45.08
		2.0	19.89	27.57	41.78	42.74	49.56
	50	1.0	24.33	34.87	49.52	54.69	58.19
		1.5	27.19	40.64	53.12	64.40	65.47
		2.0	29.37	45.69	55.72	69.59	75.20
	20	1.0	37.35	64.67	68.30	92.04	95.54
		1.5	41.49	68.97	80.70	99.87	104.3
		2.0	45.39	72.93	91.85	103.8	115.3
	10	1.0	54.69	81.89	112.7	117.2	140.5
		1.5	62.82	89.69	120.2	136.8	150.9
		2.0	70.04	96.54	126.5	152.6	156.2
シトカスプルス	100	1.0	56.39	73.89	108.4	135.4	148.8
		1.5	67.07	89.24	132.0	154.6	173.7
		2.0	75.77	102.6	153	168.3	193.2
	50	1.0	95.04	131.0	201.3	201.5	229.0
		1.5	107.6	153.4	218.2	241.5	254.2
		2.0	117.0	172.6	229.8	274.2	277.4
	20	1.0	149.1	255.4	266.8	355.4	401.6
		1.5	164.0	282.2	300.4	398.6	416.9
		2.0	177.5	295.8	341.2	430.2	437.8
	10	1.0	210.1	326.4	435.9	459.8	529.4
		1.5	239.0	353.5	485.7	511.4	603.2
		2.0	265.4	378.2	509.0	574.0	642.3

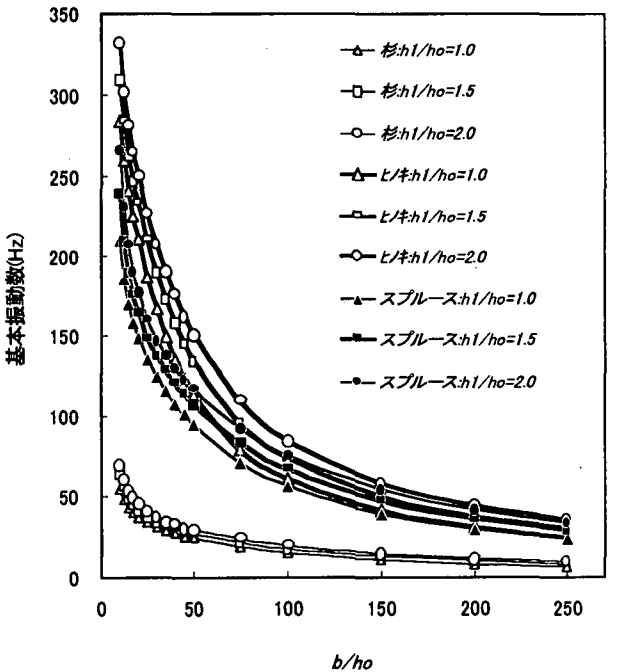


図-1 3 種々の桁目板の基本振動数 (Hz) に与える h_1/h_0 の影響 ; $a/b=1.0, a=100\text{cm}, n=1, \text{CC-CC}$

5. 繊維方向に直角の2辺を拘束すれば、他の境界条件を持つ場合と比較して木板の振動数がかなり大きな値を示す。
6. 木板の振動数は、樹種により大きく変化するが、繊維方向の弾性係数が支配的である。しかしながら、板厚が大きくなるとせん断弾性係数の影響により、振動数に与える変厚比の影響が大きく現れてくる。

Appendix

式(22)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M\theta_x\theta_x &= I_{mr}^{001}J_{ns}^{00} \\ M\theta_y\theta_y &= (1/12)(h_o/b)^2 I_{mr}^{003}J_{ns}^{00} \\ MW'W' &= (1/12)(h_o/b)^2 I_{mr}^{003}J_{ns}^{00} \end{aligned}$$

また、式(22)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K\theta_x\theta_x &= (b/a)^2 I_{mr}^{113}J_{ns}^{00} + (1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xy}/E_x)I_{mr}^{003}J_{ns}^{11} \\ &+ 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xz}/E_x)(b/h_o)^2 I_{mr}^{001}J_{ns}^{00} \\ K\theta_x\theta_y &= \kappa_{yx}(b/a)I_{mr}^{103}J_{ns}^{01} + (1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xy}/E_x)(b/a)I_{mr}^{013}J_{ns}^{10} \\ K\theta_xW' &= 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xz}/E_x)(b/a)(b/h_o)^2 I_{mr}^{011}J_{ns}^{00} \\ K\theta_y\theta_x &= \nu_{yx}(b/a)I_{mr}^{013}J_{ns}^{10} + (1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xy}/E_x)(b/a)I_{mr}^{103}J_{ns}^{01} \\ K\theta_y\theta_y &= (E_y/E_x)I_{mr}^{003}J_{ns}^{11} + (1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xy}/E_x)(b/a)^2 I_{mr}^{113}J_{ns}^{00} \\ &+ 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{yz}/E_x)(b/h_o)^2 I_{mr}^{001}J_{ns}^{00} \\ K\theta_yW' &= 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{yz}/E_x)(b/h_o)^2 I_{mr}^{001}J_{ns}^{01} \\ KW'\theta_x &= 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xz}/E_x)(b/a)(b/h_o)^2 I_{mr}^{101}J_{ns}^{00} \\ KW'\theta_y &= 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{yz}/E_x)(b/h_o)^2 I_{mr}^{001}J_{ns}^{10} \\ KW'W' &= 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{xz}/E_x)(b/a)^2(b/h_o)^2 I_{mr}^{111}J_{ns}^{00} \\ &+ 12\kappa(1-\nu_{xy}\nu_{yx})(G_{yz}/E_x)(b/h_o)^2 I_{mr}^{001}J_{ns}^{11} \end{aligned}$$

ここで、 I_{mr}^{ijl} と J_{ns}^{ij} は次式で表され、また数値積分には、Gauss の数値積分公式を用いている。

$$\begin{aligned} I_{mr}^{ijk} &= \int_0^1 [dN_{m,k}(\xi)/d\xi dN_{r,k}(\xi)/d\xi^j] H(\xi)^i d\xi \\ J_{ns}^{ij} &= \int_0^1 [dN_{n,k}(\eta)/d\eta dN_{s,k}(\eta)/d\eta^j] d\eta \end{aligned}$$

ただし、 i, j は導関数の次数であり、また l はベキ乗数を示す。

参考文献

- 1) Breyer, D. E, Fridley, K. J. and Cobeen, K. E. : Design of wood structures, 4th Edition, McGraw Hill, 1999.
- 2) 伏谷他：木材の物理，文永堂出版，1995.
- 3) 近藤八重，古田裕三，小畑良洋，金山公三，水澤富作：楽器響板の音響特性 - 直交異方性板の振動解析 -，2000年度日本木材学会中部支部大会講演要旨集，第10号，pp. 22-23，2000.
- 4) 外崎真理雄，岡野 健，浅野猪久夫：楽器用木材の試験法としての板振動の測定，木材学会誌，Vol. 31, No. 3, pp. 152-156，1985.
- 5) Agren, C. H. and Stetson, K. A. : Measuring the resonances of treble viol plates by hologram interferometry and designing and improved instrument, The Journal of the Acoustical Society and America, Vol. 51, pp. 1971-1983，1969.
- 6) Sakata, T. : Natural frequencies of clamped orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness. Jouranl of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 871-876，1978.
- 7) Tomar, J. S., Sharma, R. K. and Gupta, D. C. : Transverse vibrations of nonuniform rectangular orthotropic plates. AIAA J., Vol. 21, pp. 1050-1053，1983.
- 8) Bert, C. W. and Malik, M. : Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: A semi-analytical approach. J. Sound and Vibr., Vol. 190, pp. 41-62，1996.
- 9) Lal, R., Gupta, U. S. and Reena: Quintic splines in the study of transverse vibrations of non-uniform orthotropic rectangular plates. J. Sound and Vibr., Vol. 207, pp. 1-13，1997.
- 10) 水澤富作，近藤八重：Spline要素法を用いた変厚Mindlin斜板の振動解析，構造工学論文集，Vol. 46A, pp. 25-32，2000.
- 11) 木材工業ハンドブック（改訂3版），丸善，1982.
- 12) 滝沢宣人，近藤八重，水澤富作：Differential Quadrature法を用いた変厚直交異方性板の振動解析，平成12年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集，I-9, pp. 31-32，2001.
- 13) 中戸莞二，左道 健：新編木材工学，養賢堂，1985.

(2001年4月20日受付)