

有限フーリエ級数の構造格子形成への応用

Application of Finite Fourier Series to Structured Grid Generation

後藤真吾*・大上俊之**

Shingo GOTO and Toshiyuki OHKAMI

*工修 応用技術(株) (〒530-0054 大阪府大阪市北区南森町1-2-23)

**正会員 工博 信州大学工学部 社会開発工学科 (〒380-8553 長野県長野市若里4-17-1)

The interpolation functions using the finite Fourier series fit the curved boundary shapes accurately, and also have features that the shapes of equations are almost the same without relating for the order of differentiation. This paper presents a structured grid generation method using finite Fourier series. The region defined in physical domain is mapped into computational domain of rectangular grid, and partial differential equations are calculated numerically in the transformed computational domain. The validity of the proposed method is examined for some numerical problems.

Key Words : finite fourier series, structured grid generation, FDM, FEM

1. はじめに

格子形成法は解析空間の離散化手法・要素生成法として有力な手法であり、これまでにさまざまな方法が提案されている^{1),2)}。格子の形成に規則性を持たせる構造格子に対する格子形成法は補間関数を用いて空間を離散化していく代数的方法と偏微分方程式を用いる方法とに大別される。

本研究は代数的方法の1手法として有限フーリエ級数を用いた内挿関数による方法を提案するもので、2次元問題を対象に解析を行う。本手法は、実平面における解析対象の形状を等間隔の直交矩形格子となるように写像変換し、同時に支配方程式についても変数変換を行って写像平面上において数値解析を行うものである。

有限フーリエ級数を用いた内挿関数^{3),4)}は曲線境界に対する適合性が良く、三角関数を基本としているので微分の階数に関わらず式形がほとんど変化しないという性質を有している。この性質を利用することにより微分方程式の変数変換ならびに実平面の曲線格子とこれに対応した写像平面上の矩形格子の生成を容易に行うことが可能となる。さらに、本手法では境界線の節点座標値を入力するだけで領域内部の格子が自動的に作成され、格子の再生成も節点間の分割数を変えることで容易に行うことができるので、データの入力が簡素化できるという利点を有している。

本手法の妥当性を検証するため、まず、正解値が明らかな曲線境界を有する問題を写像平面上の差分法によって解析し、精度の検討を行う。次にその拡張としてポテンシャル流れの問題を対象に写像平面上における有限要素解析、L型格子の要素生成を試みる。

2. 有限フーリエ近似による内挿関数

2.1 基礎式

パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$ 、内挿関数を $\Psi_j(t)$ とすると、 $j=0 \sim n$ の $n+1$ 個の u_j を通る近似関数 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(t) u_j \quad (1)$$

と表すことができる。ここで、内挿関数 $\Psi_j(t)$ は節点間ベクトルを有限フーリエ級数によって表現すると、一般開曲線の場合、次のように表現される⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0(t) &= 1 - \frac{t}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cot(\lambda_k/2) \sin(\lambda_k t) \\ \Psi_j(t) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\lambda_k j) \sin(\lambda_k t) \\ \Psi_n(t) &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \Psi_k(t) \\ \lambda_k &= \pi \frac{k}{n} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

多次元の内挿式は式(2)の内挿式を用いて求めることができる。

例えば、2次元の場合には、パラメータ t_1, t_2 を導入すれば空間内に与えられた $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 個の点をとる平面 (x, y) は次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(t_1) \Psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(t_1) \Psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに $x_{ij} = x(i, j)$ 、 $y_{ij} = y(i, j)$ であり、 t_1, t_2 は、そ

れぞれ, $0 \leq t_1 \leq n_1$, $0 \leq t_2 \leq n_2$ を満たす実数である。式(3)を用いてモデルの形状を内挿するには領域内部の節点座標値 $x(i, j)$, $y(i, j)$ を必要とするが, ここでは境界上の節点のみを入力データとし, 境界上の座標値から内部節点の座標値を次式により決定する。

$$\left. \begin{aligned} x(i, j) &= \left\{ \left(1 - \frac{i}{n_1}\right)x_{0j} + \frac{i}{n_1}x_{n_1j} \right\} \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right) \\ &\quad + \left\{ \left(1 - \frac{j}{n_2}\right)x_{i0} + \frac{j}{n_2}x_{in_2} \right\} \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right) \\ y(i, j) &= \left\{ \left(1 - \frac{i}{n_1}\right)y_{0j} + \frac{i}{n_1}y_{n_1j} \right\} \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right) \\ &\quad + \left\{ \left(1 - \frac{j}{n_2}\right)y_{i0} + \frac{j}{n_2}y_{in_2} \right\} \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

本研究では実平面上のデカルト座標で書かれた微分方程式を写像平面上の座標に変換して数値計算を行う。そのために内挿関数の微分が必要となるが, ここで用いる内挿関数は, 三角関数を基本とした有限フーリエ級数によるものであるので, 微分の階数に関わらず式形がほとんど変化しないという特徴を有する。式(2)の1階微分は

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_0(t) &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cot(\lambda_k/2) \lambda_k \cos(\lambda_k t) \\ \Psi'_j(t) &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin(\lambda_k j) \lambda_t \sin(\lambda_t t) \\ \Psi'_n(t) &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \Psi'_k(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となり, 2階微分, 3階微分等についても同様の計算で容易に求めることができる。

2.2 微分変換式

実平面 (x, y) 座標と写像平面 (ξ, η) 座標との微分の間には以下のような関係式が成り立つ。1階微分は,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (6)$$

これより

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = [A]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (7)$$

を得る。ここに

$$[A]^{-1} = \frac{1}{J_D} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{J_D} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad (9)$$

である。2階微分は

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{array} \right\} = [B_1] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{array} \right\} + [B_2] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$[B_1] = \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \end{array} \right] \quad (11)$$

$$[B_2] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{array} \right] \quad (12)$$

となり, 上式に式(7)を代入して整理すると

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{array} \right\} = [B_1]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{array} \right\} - [B_1]^{-1} [B_2] [A]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (13)$$

を得る。ここに

$$[B_1]^{-1} = \frac{1}{J_D^2} \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & -2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & -2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \end{array} \right] \quad (14)$$

である。

以下, 同様の手順で3階微分, 4階微分についても微分変換マトリクスを求めることができる。

3. 差分法への適用

3.1 楕円形断面の一樣な棒のねじり問題

実平面 (x, y) 座標における曲線境界を有する問題を矩形格子の (ξ, η) に写像変換し、写像平面上において差分解析を行う。曲線境界を有するモデルの正解値が明らかな問題として、図-1に示すような楕円形断面の一樣な棒のねじり定数を算定する。

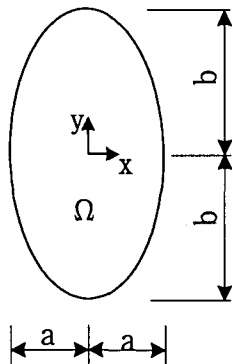


図-1 楕円形断面

いま、せん断弾性係数 G 、長さ L の一樣な断面の棒がねじりをうけているものとする。このときの基礎方程式は、棒の長さ方向に z 軸を、断面内の2方向に x, y 軸をとり、棒の単位長さ当たりのねじれ角を θ 、応力関数を ψ とすると、 ψ は断面内で

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

なるポアソン方程式を満足し、断面境界上では

$$\psi = 0 \quad (16)$$

が成立する。ねじり定数 J は ψ から

$$J = 2 \iint_{\Omega} \psi dx dy \quad (17)$$

と決定される。

基礎方程式 (15) を写像平面 (ξ, η) 座標に変換すると次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + E_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + E_4 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ + E_5 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -2G\theta \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{J_D^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ E_2 &= -\frac{2}{J_D^2} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \\ E_3 &= \frac{1}{J_D^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \\ E_4 &= \frac{1}{J_D^3} \left[\left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \right] \\ E_5 &= \frac{1}{J_D^3} \left[\left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、係数 $E_1 \sim E_5$ は微分変換式 (7), (10) から計算することができる。

前節で示した内挿関数を用いて楕円形断面の形状を内挿すると、実平面、写像平面について図-2のような内挿形状が得られる。本論文では境界上の入力点に対応する領域内部の代表点を式 (4) によって計算し、分割数を指定することによって内挿式から領域内部と境界上の点を作成している。図中、●印は入力データとして座標値を与えた境界上の点であり、実線はこれら入力点を通る分割線を、破線は内挿関数によって求まる分割線を示している。ここでは入力節点を図-2(a)に示す16点のままとし、これら既知節点間の分割の数を変化させて差分計算を行い、精度の比較検討を行った。

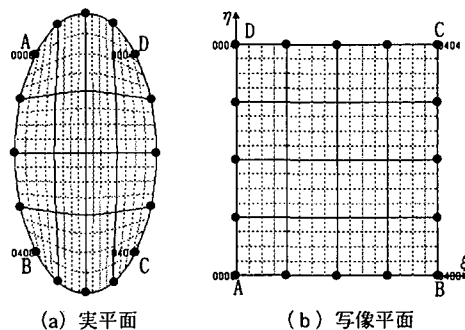


図-2 内挿結果(節点間分割数=4)

$b/a = 2$, $G\theta = 1$ とした場合の応力関数の分布を図-3に、各分割数に対するねじり定数の計算値を図-4、表-1に示す。節点間の分割数が増大するにしたがっ

てねじり定数の値が正解値に近づいており、分割が2の場合で正解値に対する相対誤差が1%以下となっている。このことから解析方法の妥当性が検証されたといえる。

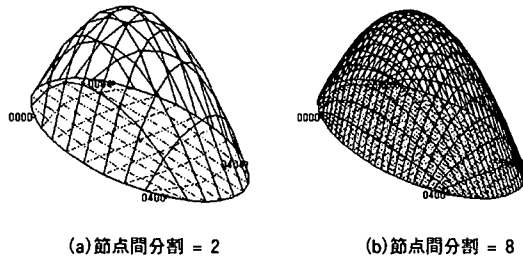


図-3 応力関数の分布

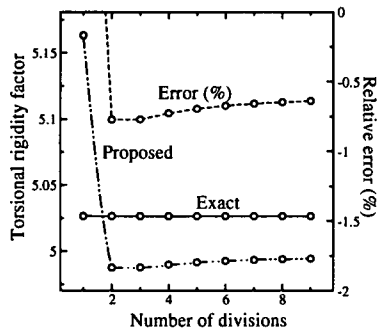


図-4 計算結果(楕円形断面のねじり定数)

表-1 楕円形断面ねじり定数の計算結果

分割数	1	2	4	8	10
計算値	5.163	4.988	4.990	4.994	4.995
正解値	5.027				
誤差(%)	2.71	-0.78	-0.74	-0.66	-0.64

3.2 円形膜の固有値問題

次に膜の固有振動について考える。この場合の支配方程式は膜の垂直変位 $u(x, y)$ に対する次のヘルムホルツ方程式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (20)$$

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{T} \quad (21)$$

ここに、 ρ 、 T 、 ω は膜の質量、張力、振動数であり、境界条件は膜の周囲において次式で与えられる。

$$u = 0 \quad (22)$$

解析例として直径 $2m$ の円形膜を対象とした。本法の曲線境界に対する適合性を確認するために、入力データである境界節点の数を16点、32点とした2種類のモデルを設定し(図-5)、それぞれについて写像平面上の1辺の分割数を変化させて計算を行い精度を比較した。

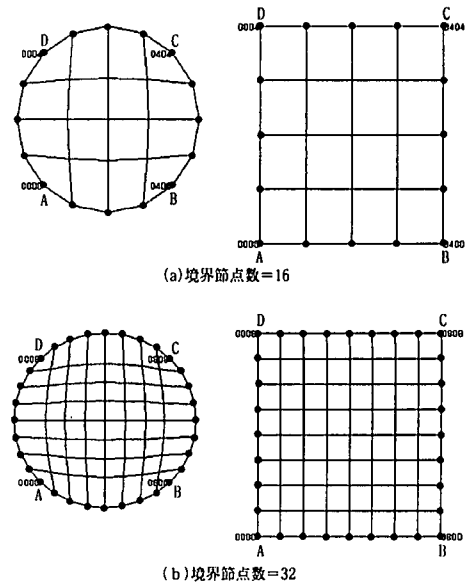


図-5 各モデルの内挿結果

結果を図-6、表-2に示すが、これらより、写像平面上の1辺の分割数が16(節点数16で節点間分割=4, 32で節点間分割=2)で両モデルとも相対誤差が1%以下となっており、精度良い結果が得られていることがわかる。入力節点数が32の場合は節点間の分割数を増やすに従って正解値に近づいていくのに対し、節点数が16の場合は正解値とは異なる値に収束していくが、これは16点の境界座標値だけで円形を表現したためと考えられる。固有モードを図-7に示す。

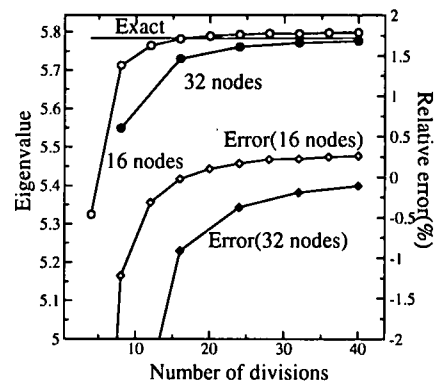
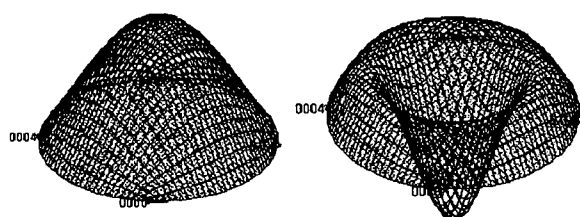


図-6 計算結果(円形膜の1次振動固有値)

表-2 円形膜の1次振動固有値(正解値=5.783)

分割数	4	8	12	16	20
節点数16	5.325	5.713	5.765	5.782	5.789
誤差(%)	-7.92	-1.21	-0.31	-0.02	0.10
節点数32		5.550		5.731	
誤差(%)		-4.02		-0.90	
分割数	24	28	32	36	40
節点数16	5.793	5.796	5.796	5.798	5.798
誤差(%)	0.17	0.22	0.22	0.25	0.26
節点数32	5.762		5.772		5.777
誤差(%)	-0.36		-0.19		-0.10



(a) 1次モード固有値=5.793 (b) 2次モード固有値=30.194

図-7 円形膜の固有モード(節点数=16, 分割数=24)

3.3 諏訪湖形状モデルの固有値問題

ここでは、複雑な境界形状を有するモデルへの適用例として諏訪湖の形状に本解析を適用し、固有値計算を行う。図-8より、諏訪湖の境界上の座標値を入力データ数98点で与え、節点間の分割を2として前項と同様の計算を行った。内挿および計算の結果を図-9、図-10に示す。



図-8 諏訪湖モデル

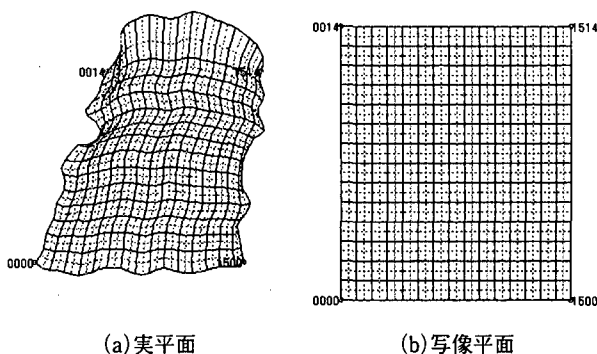


図-9 諏訪湖モデルの内挿結果

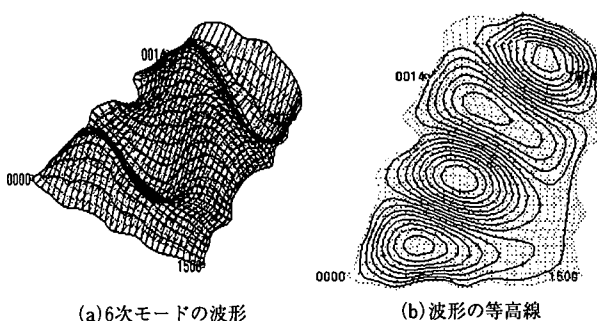


図-10 諏訪湖モデルの計算結果(固有値=8.817×10⁻⁶)

4. 有限要素法への適用

差分法は自然境界条件を有する問題やたわみ問題のような高階の微分方程式に対して格子点間や境界周辺の差分表示に難点がある。

本方法によれば写像変換後に生成される格子はすべて同じ大きさの矩形であり規則的に配列されている。すなわち、写像平面上の要素形状は長方形であるので数値積分を必要とせず、要素の作成を自動的に行うことができる。また、要素の再分割も境界上の分割数を指定するだけで良いという特徴を有する。本節ではこれらの特徴を利用して写像平面上における有限要素解析を行うことを考える。

非圧縮性・非粘性のポテンシャル流れの問題を対象として図-11の様なモデルを考えると、速度ポテンシャル $\phi(x,y)$ に関する偏微分方程式および境界条件が次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - f(x,y) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_n &= u_x n_x + u_y n_y \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = \bar{u}_n \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (25)$$

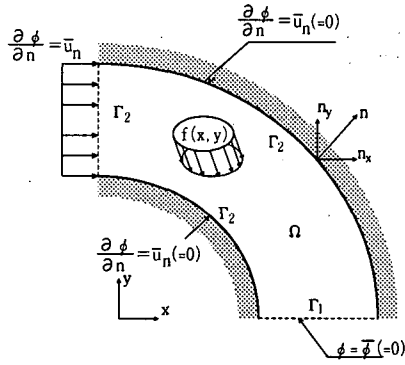


図-11 ポテンシャル流れの問題⁵⁾

ここに、 $f(x, y)$ は領域 Ω への流入量、 u は流速、 n は境界上の外向き単位法線ベクトルであり、下添え字はそれぞれの方向成分を示す。

重み関数を ϕ^* とすると式(23)に対する弱形式が次のように得られるので

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega} \phi^* f dx dy - \int_{\Gamma_2} \phi^* \bar{u}_n d\Gamma = 0 \quad (26)$$

式(7)を用いて弱形式(26)を変数変換する。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{J_D^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right. \\ & + \frac{1}{J_D^2} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} \right) \\ & \left. \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] J_D d\xi d\eta \\ & - \int_{\Gamma_2} \phi^* \bar{u}_n d\Gamma + \iint_{\Omega} \phi^* f J_D d\xi d\eta = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

式(27)をさらに整理すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[E_1 \frac{\partial \phi^*}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right. \\ & - E_3 \frac{\partial \phi^*}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - E_4 \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left. \right] d\xi d\eta \\ & - \int_{\Gamma_2} \phi^* \bar{u}_n d\Gamma + \iint_{\Omega} \phi^* f J_D d\xi d\eta = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

となる。上式を基本式として写像平面上において4節点アイソパラメトリックの有限要素解析を行う。微分係数 $E_1 \sim E_4$ は離散化を行った時点で各節点に割り当てられた係数として取り扱う。

ここで、各要素の速度ポテンシャル ϕ 、重み関数 ϕ^* 、微分係数 $E_1 \sim E_4$ について次の様に線形補間する。

$$\begin{aligned} \phi_e &= N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 + N_4 \phi_4 \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2\xi}{h_1} \right) \left(1 - \frac{2\eta}{h_2} \right) \phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\xi}{h_1} \right) \left(1 - \frac{2\eta}{h_2} \right) \phi_2 \\ & + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\xi}{h_1} \right) \left(1 + \frac{2\eta}{h_2} \right) \phi_3 \\ & + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2\xi}{h_1} \right) \left(1 + \frac{2\eta}{h_2} \right) \phi_4 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \phi_e^* &= \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i^* \\ E_j &= \sum_{i=1}^4 N_i E_i \quad (j = 1 \sim 4) \end{aligned} \quad (30)$$

ここに、 h_1, h_2 はそれぞれ ξ, η 方向の要素長である。本手法での各要素は全て同じ大きさの長方形であり、 ξ, η 軸は互いに直交しているので実際の計算では定積分を施すだけでよい。式(28)の第1項についてマトリクス表示すると、各要素について

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} E_1 \frac{\partial \phi^*}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ & = \langle \phi_1^* \phi_2^* \phi_3^* \phi_4^* \rangle \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \\ & = \langle \phi^* \rangle_e [k_{E1}]_e \{ \phi \}_e \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[\left(N_1 E_1^{(1)} + N_2 E_1^{(2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + N_3 E_1^{(3)} + N_4 E_1^{(4)} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (32) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $E_1^{(i)}$ は節点 i における微分係数の値を示す。第2項の境界積分については、図-12に示すように実平面上の境界線と写像平面上の ξ 軸方向が一致するために変数変換を行わないで積分することとする。

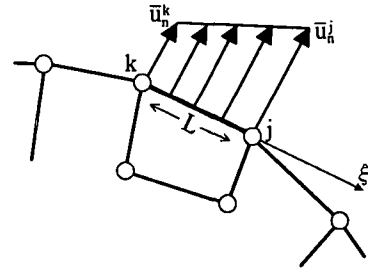


図-12 要素辺上の流速分布

第3項についても f, J_D を同様に線形補間し、第1項目と同様の定式化を行うことによって次式を得る。

$$\iint_{\Omega_e} \phi^* f J_D d\xi d\eta$$

$$= \langle \phi_1^* \phi_2^* \phi_3^* \phi_4^* \rangle \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \\ = \langle \phi^* \rangle_e \{F\}_e \quad (33)$$

$$m_{ij} = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[(N_1 J_D^{(1)} + N_2 J_D^{(2)} + N_3 J_D^{(3)} + N_4 J_D^{(4)}) N_i N_j \right] d\xi d\eta \quad (34)$$

以上を整理すると、式(28)に対する有限要素式は最終的に次のように書くことができる。

$$\sum_e \langle \phi^* \rangle_e ([k_{E1}]_e + [k_{E2}]_e + [k_{E3}]_e + [k_{E4}]_e) \{ \phi \}_e + \{ F \}_e - \sum_m \langle \phi^* \rangle_m \{ U_n \}_m = 0 \quad (35)$$

解析例として図-13に示すモデルを考える。周囲10点の節点座標値を入力データとして内挿し(図-14)、境界節点間の分割を8として有限要素解析を行う。

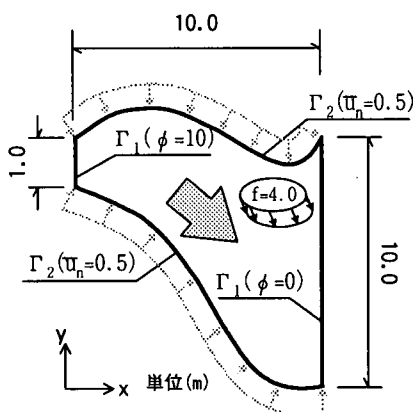


図-13 解析モデル

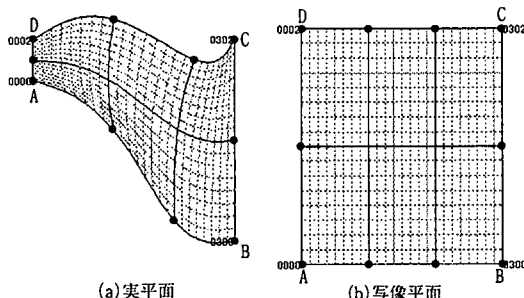


図-14 ポテンシャル流れモデルの内挿結果

図-15は計算結果から等ポテンシャル線を図示したものである。この問題では正解値が存在しないため、写像変換前の内挿モデルと同一のモデルについて通常

の4角形アイソパラメトリック要素の有限要素解析(要素数384、節点数425)を行い、結果を比較する。通常の有限要素解析では数値積分を3×3点積分とした。

図-15に示す中央線に沿うポテンシャル値の比較を図-16に示す。通常の有限要素解析による結果と本手法による結果との差異は最大でも0.78%であった。

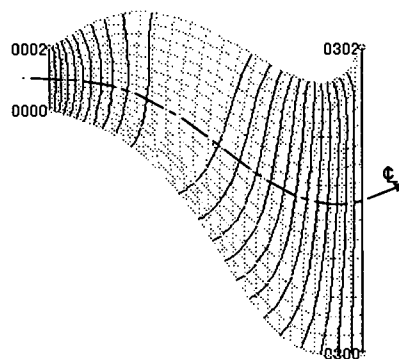


図-15 等ポテンシャル線

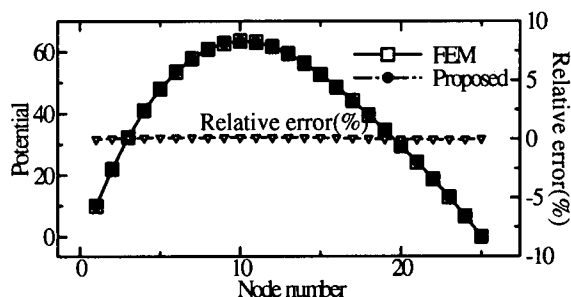


図-16 ポテンシャル値の比較

5. 要素生成への応用

本論文における写像変換では、実平面上の格子点が移動し格子形状が変わっても写像平面上の格子配列には影響を及ぼさず、格子は規則的に整列されたままであるという特徴を有する。この特徴を利用して内部境界を有するようなL型格子の解析を試みる。

図-17は幅6.0m、長さ6.0mの正方形の水路で、その中心部に直径2.0mの円柱がなっている場合を想定したモデルである。正方形領域に対して内挿計算により格子を作成した後、内部境界である円柱に沿って内部点を移動させると図-18のような内挿結果が得られる。

図-19は前節と同様、計算によって得られた等ポテンシャル線であり、図中のLINE-1、LINE-2に沿うポテンシャル値について通常の有限要素法による結果

との比較を図-20に示す。この場合、両者の差異は最大4.1%であった。

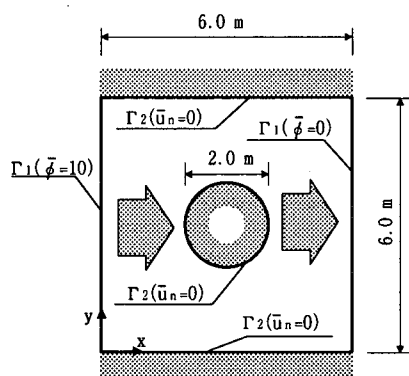


図-17 解析モデル(円柱を過ぎる流れ)

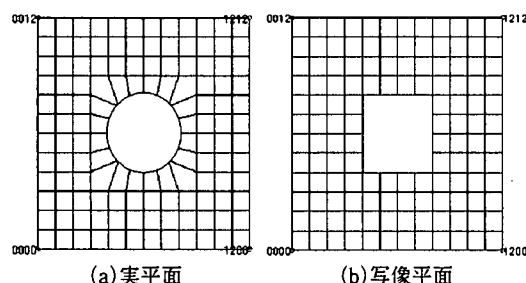


図-18 L型格子の内挿結果

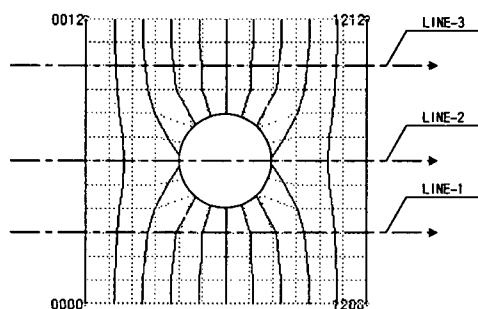


図-19 等ポテンシャル線

6. おわりに

本研究では、曲線境界を有する2次元問題を有限フーリエ級数による内挿関数を用いることによって矩形格子に写像し、写像平面上において境界値問題として解析した。本手法の有効性を調べるために簡単なモ

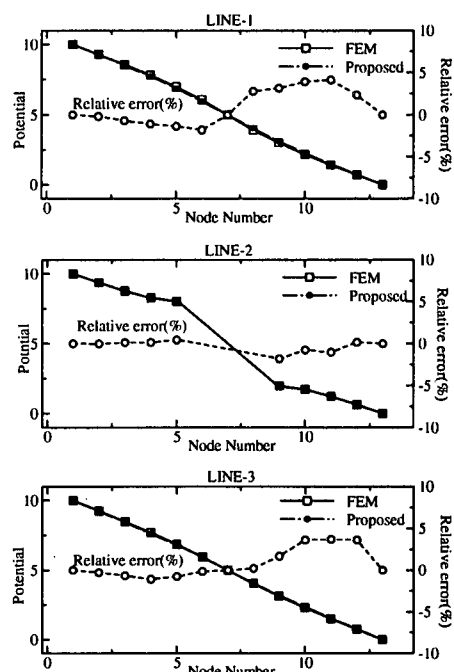


図-20 ポテンシャル値の比較

デルの解析だけであったが、数値計算例の結果、差分法、有限要素法による解析とも少ない入力データ数で精度良い結果が得られた。

本文での内挿関数はフーリエ級数のリンク効果を除去したもので曲線に対する適合性が良いと考えられるので、今後より複雑な曲線形状や穴部・凹部を有する複雑形状への適用を試みたい。本文では、領域内部の点は計算によって求めているが、計算だけでなくある特定の点を必ず通過するように指定することにより穴部を有する形状のモデル作成が比較的容易になること、また、複合領域に対しても隣接境界上の点を指定点とすることで作成可能になるのではないかとと思われる。式(3)を拡張することで3次元空間の曲面を表現できることになるが、一般的な3次元領域への適用についてはさらに検討が必要である。以上の項目については今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) Thompson, J.E., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W.: *Numerical Grid Generation*, North-Holland, 1985.
- 2) 数値流体力学編集委員会編：格子形成法とコンピュータグラフィックス，東京大学出版会，1995.
- 3) 草間孝志・大上俊之・三井康司：有限フーリエ級数を用いた内挿関数と二次元境界要素への応用，土木学会論文集，第416号/I-13，pp.205-213，1990.
- 4) 草間孝志・大上俊之：有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良，土木学会論文集，第446号/I-19，pp.167-175，1992.
- 5) 日本数値流体力学会編：有限要素法による流れのシミュレーション，シュプリンガーフェアラーク東京，1998

(2001年4月20日受付)