

周期構造を有する散乱体による波動場の伝播特性の解析

Propagation Characteristics for Wave Fields in Periodic Configuration of Scatterers

山田将紀*・北原道弘**

Masanori YAMADA and Michihiro KITAHARA

*正会員 工修 東海旅客鉄道株式会社 (〒103-8288 東京都中央区八重洲一丁目6-6)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

The scattering problems for periodic array of scatterers are formulated by taking advantages of the geometrical periodicity. For planar array of scatterers, reflection and transmission coefficients are derived as integrals over a surface of the single scatterer in the reference unit cell. In order to determine the physical quantity on the surface of scatterer, the boundary integral equation is used. The fundamental solution in a form of integral with rapidly convergent integrand is adopted for the numerical analysis. The accuracy of the reflection and transmission coefficients is confirmed by the energy balance. The reflection and transmission coefficients are applied to determine the dispersion relation for the triply periodic scatterers.

Key Words : periodic structures, reflection, transmission, dispersion

1. はじめに

材料内の損傷が平面的な広がりをも有して存在している場合、損傷の程度を推定するための一つの方法として、超音波の反射率と透過率の利用が考えられる。この観点から、損傷面を周期的に分布した直線アレー状クラックにより二次元問題としてモデル化し、これらクラック群による超音波の反射率と透過率を解析したものに Achenbach 等の研究^{1,2)}がある。これらの研究は、薄い界面層内にクラックが分布して存在する場合に拡張され、薄層の損傷状態の定量化³⁻⁵⁾が試みられている。また、損傷面を周期的に分布した平面アレー状ボイドにより三次元問題としてモデル化し、ボイド群による超音波の反射率と透過率を解析したものに Achenbach 等の研究^{6,7)}がある。実験的な試みとして、Kinra 等は^{8,9)}インクルージョンが平面アレー的に存在する場合について、反射率と透過率の計測を進めている。一方、クラック^{10,11)}あるいはボイド¹²⁾が材料内全体に周期的に分布した場合については、波動の分散特性の解析という観点から研究が進められている。

著者等は平面的に二重周期分布した散乱体による反射率と透過率をより効率的に数値解析するためには、二重級数和として表現される基本解の収束を高速化する必要があるとの観点から、Ewald¹³⁾による三次元ヘルムホルツ方程式の基本解の積分表現を基に、Ewald の積分表現がガウス積分により簡単かつ高精度に評価可能であることを示し¹⁴⁾、この積分型基本解の二重周期構造系に対する反射率と透過率解析への適用に関する一連の研究^{15,16)}を行ってきた。なお、著者らは Ewald の積分表現を直接、数値解析に組み込んでいる

が、Ewald の積分表現をより解析的に評価する試みが Jordan 等¹⁷⁾によってなされている。

Ewald の基本解表現を利用して平面的に二重周期分布した球形散乱体による反射率と透過率を解析したこれまでの論文^{15,16)}では、波数が小さい場合に生じる零次モードの波動場についてのみ解析を行ってきた。本論文では、高次の波動モードを含む波数域において、フーリエ級数表現された散乱場の表現に相反定理を適用することにより、全ての波動モードに適用可能な反射率と透過率の表現を導出する。この表現によると、ユニットセル内に存在する一つの散乱体上の実波動場が決まれば、散乱体上の実波動場と仮想系の波動場の積の積分として反射率と透過率が決定できる。ここでは、散乱体上の実波動場は Ewald の基本解表現を基にした境界要素法により計算し、数値解析的に求めた反射率と透過率の精度はエネルギーバランスによって確認する。さらに、全空間に三重周期分布した球形散乱体を二重周期構造が積み重なった構造と捉えることにより、二重周期分布した球形散乱体による反射率と透過率を利用して、三重周期分布した球形散乱体による波動の分散解析を行い、三重周期構造の配置間隔に応じて波動の伝播が停止するストップング周波数域が存在することを示す。

2. 平面アレー状散乱体による散乱波の表現

平面アレー状球形散乱体の配置を図-1に示す。ここでは、 x_1-x_2 平面上に中心を有する無限個の球形散乱体が x_1 軸と x_2 軸に沿って周期的に存在しており、 x_1 軸に沿う各球の中心間距離が b 、 x_2 軸に沿う中心間距

離が c である。また、これら全ての球の半径は等しく a とする。入射波 u^I が与えられたとき、反射波と透過波の振幅、即ち反射率と透過率を決定することが当面の問題となる。

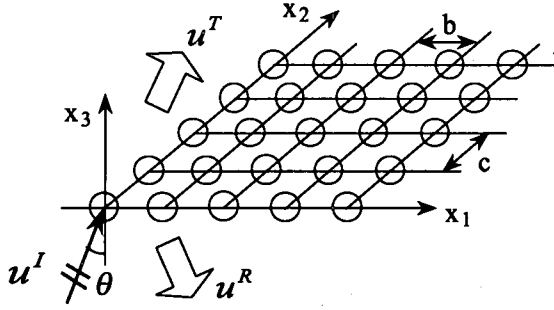


図-1 平面アレー状球形散乱体

本論文では、スカラー場に関する三次元波動問題を考える。このとき、波動場 u は次のヘルムホルツ方程式を満足する。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

ここに、 k は波数である。入射波は $x_1 - x_3$ 平面内に伝播ベクトル $\mathbf{p}$ をもつ平面波とする。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2)$$

伝播ベクトル $\mathbf{p}$ は x_3 軸との角度を θ とすると (図-1 参照)、次のようになる。

$$\mathbf{p} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (3)$$

境界条件として、全ての球面上でノイマン条件が与えられている場合を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

いま、全波動場 u を入射波 u^I と散乱波 u^S の和として次のように定義する。

$$u = u^I + u^S \quad (5)$$

入射波の伝播ベクトルは $x_1 - x_3$ 平面内にあり、球形散乱体は x_1 軸に沿って無限個配置されているため、散乱波 u^S は入射波の位相 $\exp(ikp_1x_1) = \exp(ikx_1 \sin \theta)$ と同じ位相構造を有し、 u^S は次のように書ける。

$$u^S(\mathbf{x}) = \bar{u}^S(\mathbf{x}) e^{ikx_1 \sin \theta} \quad (6)$$

式 (4) に示した境界条件と散乱体の二重周期性より、上式 (6) 中の $\bar{u}^S(\mathbf{x})$ も $x_1 - x_2$ 座標に関して周期構造を有することがわかる。これより、散乱波 u^S をフーリエ級数で表現すると次のようになる。

$$u^S(\mathbf{x}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Phi_{\pm}^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 \pm \gamma_{pq} x_3)} \quad (7)$$

ここで、 Φ_{+}^{pq} と Φ_{-}^{pq} はそれぞれ $x_3 > 0$ と $x_3 < 0$ に対応した係数である。また p, q は整数として、 $\alpha_p, \beta_q, \gamma_{pq}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_p &= k \sin \theta + 2p\pi/b, & \beta_q &= 2q\pi/c \\ \gamma_{pq} &= [k^2 - (\alpha_p)^2 - (\beta_q)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (7) の各項が波の各波動モードに対応しており、 $+\gamma_{pq}$ は透過波を、 $-\gamma_{pq}$ は反射波を表している。 $p = q = 0$ のときは γ_{00} が実数値となり、式 (7) の $p = q = 0$ に対応する項は k によらず伝播する波を表す。また $p = q = 0$ 以外のときは、波数 k が

$$k = \omega/c = \min[(\alpha_p)^2 + (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (9)$$

より小さい場合は、 $(p, q) = (0, 0)$ モードの波動だけが伝播波となり、それ以外の波は γ_{pq} が虚数になり、 $|x_3|$ の値が大きくなるに従って減衰する。また、式 (9) において、 ω は角振動数、 c は波速である。それぞれの波動モードは伝播波として存在し得る限界のカットオフ波数を有しており、波数 k が式 (9) よりも増加すると、 $(0, \pm 1)$ モードもしくは $(\pm 1, 0)$ モードの波が伝播波となる。さらに波数 k が増加するにつれて、次々と伝播モードの波動が生成される。 (p, q) モードのカットオフ波数 k_c^{pq} は次式で表すことができる。

$$k_c^{pq} = [(\alpha_p)^2 + (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (10)$$

3. 反射率と透過率

式 (5) と式 (7) から $x_3 > 0$ における全波動場 u_{+} と $x_3 < 0$ における全波動場 u_{-} は次のように書ける。

$$u_{+} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \sum_p \sum_q \Phi_{+}^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 + \gamma_{pq} x_3)} \quad (11)$$

$$u_{-} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \sum_p \sum_q \Phi_{-}^{pq} e^{i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 - \gamma_{pq} x_3)} \quad (12)$$

ここで、 u_{+} は透過波、 u_{-} の右辺第 2 項は反射波を表している。また、 Φ_{+}^{pq} と Φ_{-}^{pq} が (p, q) 次の波動モードの透過率と反射率に対応する。

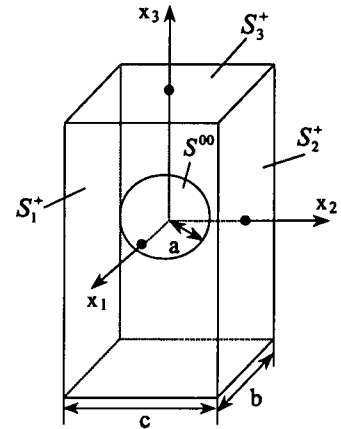


図-2 ユニットセル

いま、図-2 のような内部に欠陥を 1 つだけ含むユニットセルを考え、式 (11) と (12) 中の係数 Φ_{+}^{pq} と Φ_{-}^{pq} を決めるために相反定理を活用する。物体力が作用しない場を考えると、相反定理は次のようになる。

$$\int_S (u^B \frac{\partial u^A}{\partial n} - u^A \frac{\partial u^B}{\partial n}) dS = 0 \quad (13)$$

上式中の S は、球形散乱体の表面とユニットセルの直方体の表面である。

$$S = S_1^\pm + S_2^\pm + S_3^\pm + S^{00} \quad (14)$$

ここに、 $S_i^\pm$ ($i = 1, 2, 3$) はユニットセルの x_i -座標に関する正と負の表面を表しており、 S^{00} はユニットセル内の球形散乱体の表面である。

相反定理 (13) 中の状態 A として式 (11), (12) に示した実際の波動場を考え、状態 B として、次の仮想系を考える。

$$u_\pm^{Bpq} = -e^{-i(\alpha_p x_1 + \beta_q x_2 + \gamma_{pq} x_3)} \quad (15)$$

この仮想系は (p, q) モードの透過・反射波と逆位相を有し、かつ逆方向に伝播する波となるように選ばれている。この2つの系を式 (13) の相反定理に適用すると、 $S_1^\pm$ および $S_2^\pm$ 上の積分は零となり、 $S_3^\pm$ と S^{00} 上の積分が残る。ノイマン条件より S^{00} 上では $\partial u / \partial n$ が零であることを考慮すると、相反定理は次のようになる。

$$\int_{S_3^\pm} (-2i\gamma_{pq}\Phi_\pm^{pq})dS - \int_{S^{00}} u^A \frac{\partial u_\pm^{Bpq}}{\partial n} dS = 0 \quad (16)$$

よって、 $\Phi_\pm^{pq}$ は次のようになる。

$$\Phi_\pm^{pq} = -\frac{1}{2ibc\gamma_{pq}} \int_{S^{00}} u^A \frac{\partial u_\pm^{Bpq}}{\partial n} dS \quad (17)$$

第 (p, q) モードの透過率 T_{pq} と反射率 R_{pq} はそれぞれの波動モードの振幅で表され、次のように書ける。

$$\begin{aligned} T_{00} &= 1 + \Phi_+^{00}, \quad R_{00} = \Phi_-^{00}, \quad (p, q) = (0, 0) \\ T_{pq} &= \Phi_+^{pq}, \quad R_{pq} = \Phi_-^{pq}, \\ (p, q) &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, (p, q) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (18)$$

透過率と反射率を表す式 (17) において、係数は解析条件によって決まり、 $\partial u_\pm^{Bpq} / \partial n$ の S^{00} 上の値は式 (15) を法線方向微分することによって得られる。すなわち、球形散乱体上の全波動場 u^A を求めれば、透過・反射率をユニットセル内に存在する散乱体表面上の積分として決めることができる。

4. エネルギー関係式

ユニットセル内におけるエネルギーバランスを考える。単位面積、単位時間あたりのエネルギー $\mathcal{E}$ は、 $s = \partial u / \partial n, v = \dot{u}$ として、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{Re}[se^{-i\omega t}]\text{Re}[ve^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4}(sv^* + s^*v) + \frac{1}{4}(sve^{-2i\omega t} + s^*v^*e^{2i\omega t}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $*$ は共役複素数を表す。式 (19) を周期 $T = 2\pi/\omega$ で時間平均をとると次の式のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{E} dt = \frac{1}{4}(sv^* + s^*v) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Im}[su^*] \end{aligned} \quad (20)$$

上式 (20) をユニットセル内に当てはめる。周期 T で平均化したユニットセル内の総エネルギーはバランスして零となるので、最終的に次式を得る。

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{\text{unit}} = -\frac{1}{2} \omega \text{Im} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS \equiv 0 \quad (21)$$

ここで $S = S_1^\pm + S_2^\pm + S_3^\pm$ である。式 (21) は入射波、反射波、透過波のエネルギーの和である。式 (21) に式 (2), (11), (12) を代入し、反射率・透過率の表現式 (18) を考慮すると、最終的に次のような反射率と透過率に対する関係式が導かれる。

$$\sum_p \sum_q \frac{\gamma_{pq}}{\gamma_{00}} (|T_{pq}|^2 + |R_{pq}|^2) = 1 \quad (22)$$

上式の (p, q) は、式 (10) のカットオフ波数から、そのモードの波が伝播モードになる組み合わせを選ぶ。上記関係式は後に数値解析により求める反射率・透過率の精度について検討する際に利用する。

5. 境界積分方程式

5.1 二重級数に適した基本解の積分表現

球形散乱体上の全波動場を境界要素法を用いて求める。まず、散乱体が一の場合に対する境界積分方程式を考える。

$$\begin{aligned} c(x)u(x) &= \int_S U(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y \\ &\quad - \int_S \frac{\partial U(x, y)}{\partial n_y} u(y) dS_y + u^I(x) \end{aligned} \quad (23)$$

上式において、 $c(x)$ は散乱体の幾何形状により決まる自由項、 $U(x, y)$ は次のような基本解である。

$$U(x, y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x - y| \quad (24)$$

この基本解 $U(x, y)$ は二点間の距離に関する基本因子 $1/r$ のため、図-1 に示したような二重無限周期構造系に積分方程式 (23) をそのまま適用した場合、二重無限和の収束性が問題になることが予想される。このため、二重無限和に適した基本解の表現に変換する。

いま、 $1/r$ に関する Ewald の恒等式¹³⁾に着目する。

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2 \rho^2} d\rho \quad (25)$$

上式を r で微分することにより、 $1/r^2$ の表現を得る。

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r} (r^{-1}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r \rho^2 e^{-r^2 \rho^2} d\rho \quad (26)$$

これより式 (24) に示した基本解 $U(x, y)$ は次のように積分表現できる。

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ikr} e^{-r^2 \rho^2} d\rho \quad (27)$$

このとき、基本解の法線方向微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial n_y} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ikr} e^{-r^2 \rho^2} \{ik - 2r\rho^2\} \end{aligned}$$

$$\times \{\hat{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})\} d\rho \quad (28)$$

ここで、 $\hat{r}$ は点 $\mathbf{x}$ から点 $\mathbf{y}$ の方向を向く単位ベクトルである。

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (29)$$

5.2 二重周期構造系に対する境界積分方程式

前節の結果を図-1 に示した二重周期構造系による散乱問題の場合に拡張する。図-2 に示す基本ユニットセルを考えると、セル (m, n) 内の点 $\mathbf{x}$ と基本セル $(0, 0)$ 内の点 $\mathbf{x}^0$ との関係は、

$$x_1 = x_1^0 + mb, \quad x_2 = x_2^0 + nc, \quad x_3 = x_3^0 \quad (30)$$

と書けること、及び式 (3) に示した入射波の伝播方向に注意すれば、任意のセル (m, n) 内の変位場は基本セル $(0, 0)$ 内の変位 $u(\mathbf{x}^0)$ に入射波の位相項を考慮することにより、次のように表すことができる。

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^0) e^{ikmb \sin \theta} \quad (31)$$

上記変位場の表現 (31) を考慮すると、図-1 に示した散乱問題に対する積分方程式を次のように定式化できる。

$$c(\mathbf{x}^0)u(\mathbf{x}^0) = \int_{S^{00}} \tilde{U}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \frac{\partial u(\mathbf{y}^0)}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} dS_{\mathbf{y}^0} - \int_{S^{00}} \tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) u(\mathbf{y}^0) dS_{\mathbf{y}^0} + u^I(\mathbf{x}^0) \quad (32)$$

ここで、 $\mathbf{x}^0$ は基本セル内の球表面 S^{00} 上の点である。境界条件 (4) より、実際には上式の右辺第一項は零である。また、上式中の $\tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= \int_{S^{00}} \sum_m \sum_n \frac{\partial U(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0; m, n)}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} e^{ikmb \sin \theta} dS_{\mathbf{y}^0} \\ &= \int_{S^{00}} \sum_l \frac{\partial U(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 + \mathbf{l})}{\partial n_{\mathbf{y}^0}} e^{ikmb \sin \theta} dS_{\mathbf{y}^0} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $\mathbf{l} = (mb, nc, 0)$ であり、 $\mathbf{l}$ に関する総和は二重級数を意味する。上式 (33) に基本解の積分表現 (28) を代入して、 $\tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ の具体的表現を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{ikmb \sin \theta} \int_0^\infty d\rho \\ &\int_{S^{00}} \sum_l e^{ikr} e^{-r^2 \rho^2} \{ik - 2r\rho^2\} \{\hat{r} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}^0)\} dS_{\mathbf{y}^0} \end{aligned} \quad (34)$$

この場合の $\hat{r}$ は次のような単位ベクトルである。

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{y}^0 + \mathbf{l} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{y}^0 + \mathbf{l} - \mathbf{x}^0|} \quad (35)$$

6. 基本解の基本因子の数値的評価

6.1 被積分関数の性質

式 (25) と式 (26) に示した基本解中の基本因子 $1/r$ と $1/r^2$ の積分表現を次のように近似する。

$$\frac{1}{r} \approx \int_0^d \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2 \rho^2} d\rho = \int_{-1}^1 f_1\{\rho(\xi)\} \frac{d}{2} d\xi \quad (36)$$

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_0^d \frac{4}{\sqrt{\pi}} r \rho^2 e^{-r^2 \rho^2} d\rho = \int_{-1}^1 f_2\{\rho(\xi)\} \frac{d}{2} d\xi \quad (37)$$

上式右辺の被積分関数 $F1 = f_1\{\rho(\xi)\}d/2$ と $F2 = f_2\{\rho(\xi)\}d/2$ のグラフを図-3 と図-4 に示す。

$1/r$ と $1/r^2$ の積分表現における積分区間 $[0, d]$ は、変数変換 $\rho = (d/2)\xi + (d/2)$ により、共に区間 $[-1, 1]$ に変換されており、被積分関数 $F1$ と $F2$ は共に滑らかで性質の良い関数であることがわかる。ここで、積分の上限を表す d の選び方が問題となるが、次節で行う数値解析では、 d を $r^2 d^2 = 10$ となるように決めている。このとき、 $e^{-r^2 d^2} = e^{-10} = 4.540 \times 10^{-5}$ となり、被積分関数の値が十分に無視し得る量となるためである。

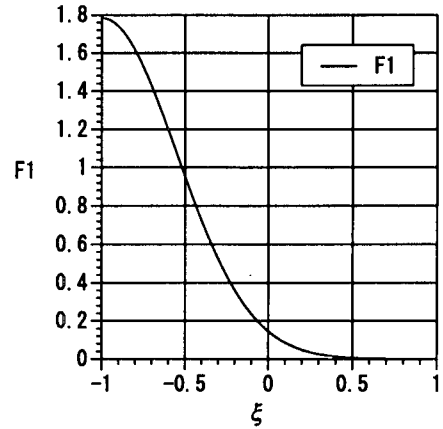


図-3 $1/r$ の積分表現中の被積分関数 ($r = 1.0, d = 3.162$)

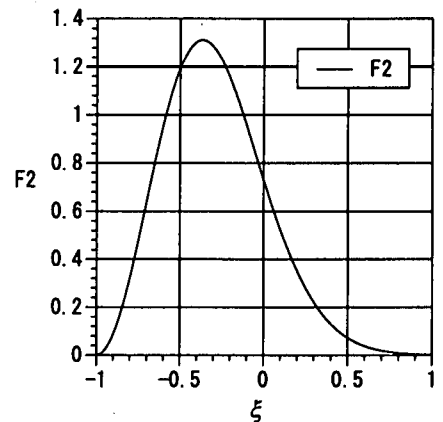


図-4 $1/r^2$ の積分表現中の被積分関数 ($r = 1.0, d = 3.162$)

6.2 ガウス積分による数値的評価

$1/r$ の積分表現 (36) と $1/r^2$ の積分表現 (37) をガウス 10 点積分を用いて数値的に評価した結果を表-1 に示す。これらの表は、距離 r が 1 に比べて小さい場合と大きい場合を考え、3 つの異なる距離 $r = 10^{-5}, 1.0, 10^5$ について、 $1/r$ と $1/r^2$ の積分表現に基づいた積分値をまとめている。誤差は非常に小さく、実質的な差は無いことがわかる。

表-1 基本因子 $1/r$ と $1/r^2$ の積分表現のガウス 10 点積分

距離 r	積分区間 [0, d]	関数 $1/r$	$1/r$ の積分表現
1.0E-5	[0, 3.1623 E+5]	1.0E+5	9.9999E+4
1.0E+0	[0, 3.1623 E+0]	1.0E+0	9.9999E-1
1.0E+5	[0, 3.1623 E-5]	1.0E-5	9.9999E-6
距離 r	積分区間 [0, d]	関数 $1/r^2$	$1/r^2$ の積分表現
1.0E-5	[0, 3.1623 E+5]	1.0E+10	9.9983E+9
1.0E+0	[0, 3.1623 E+0]	1.0E+0	9.9983E-1
1.0E+5	[0, 3.1623 E-5]	1.0E-10	9.9983E-11

7. 数値解析例

7.1 解析条件

球形散乱体表面上の境界要素分割を図-5 に示す。ここでは、形状を平面四角形要素で近似し、要素上の未知量は一定近似を採用している。球の半径は a であり、球面上の θ 方向分割数は 15、 φ 方向分割数は 12 である。ここでは、入射波の進行方向を考慮して θ 方向の分割数を φ 方向の分割数よりも多くしている。以下の解析において、アレー状散乱体は x_1 軸と x_2 軸に沿う球の中心間距離が共に同じで、その間隔 b を球の半径 a で割って無次元化した b/a の値が 3.0 と 4.0 の場合を考える。また、入射波は x_3 軸方向 ($\theta = 0^\circ$) に伝播する平面波とする。

7.2 反射率と透過率

3 節における結果を基に、反射率 R_{pq} と透過率 T_{pq} の計算を行う。波数が大きくなると高次モードの波動が伝播波となるが、新たな波動モードが出現するカットオフ波数は式 (10) から求められる。表-2 にアレー状散乱体の周期構造間隔 $b/a = 3.0$ と 4.0 の場合について、波動モード (p, q) が出現するカットオフ波数を示す。

図-6 に $b/a = 3.0$ の場合、図-7 に $b/a = 4.0$ の場合の反射率 R_{pq} と透過率 T_{pq} の計算結果を示す。図の横軸が無次元化波数 ak であり、縦軸が反射率と透過率である。反射率と透過率は波数に依存しており、波数が

大きくなるにつれて高次モードの波動に対する反射率と透過率が計算されている。

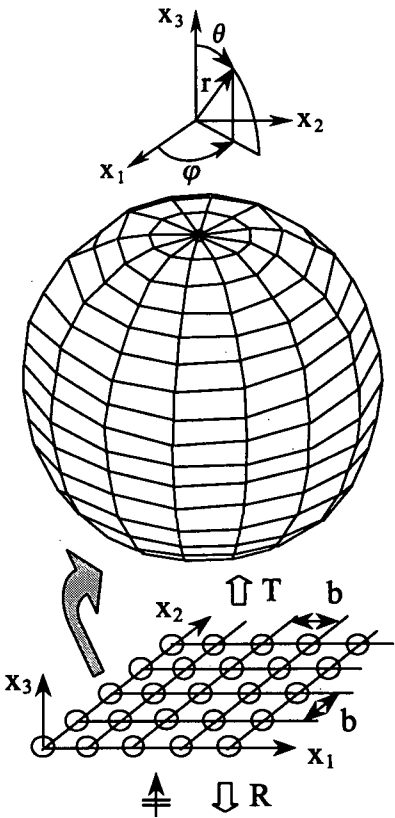


図-5 平面四角形境界要素

表-2 それぞれのモードのカットオフ波数

波動モード (p,q)	カットオフ波数	
	b/a=3.0	b/a=4.0
(0,±1),(±1,0)	2.094	1.570
(±1,±1)	2.962	2.221
(0,±2),(±2,0)	4.189	3.142

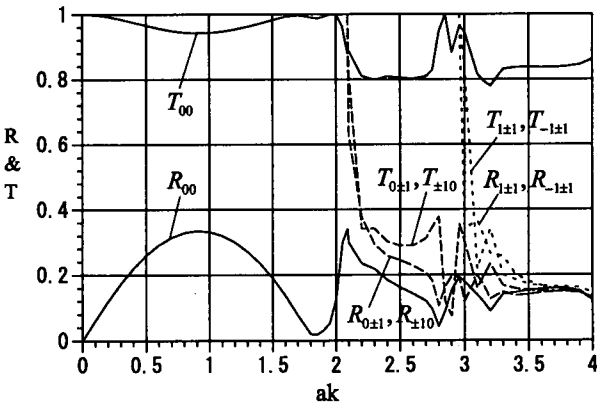


図-6 反射率と透過率 ($b/a = 3.0$)

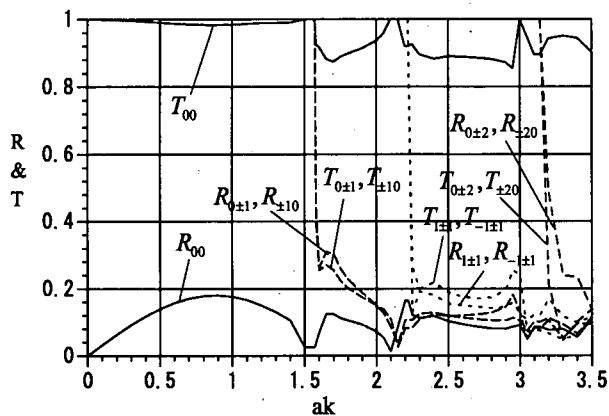


図-7 反射率と透過率 ($b/a = 4.0$)

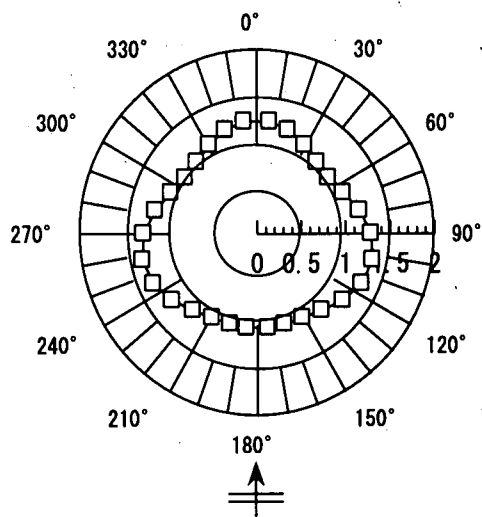


図-8 球形散乱体表面上の波動場 u
($ak=1.5$, $b/a=3.0$)

7.3 反射率と透過率の精度

エネルギー関係式 (22) を用いて、図-6 と図-7 に示した反射率と透過率の精度を確認する。ここで計算した反射率と透過率を式 (22) に代入し、式 (22) 右辺の値との誤差をまとめた結果を表-3 に示す。エネルギー関係 (22) という観点から、反射率と透過率の誤差が大きい波数は表-2 に示したカットオフ波数の近傍であることがわかる。カットオフ波数近傍以外の波数では、誤差は非常に小さい値となっており、カットオフ波数の近傍以外ではここで計算した反射率と透過率の精度は高いことが確認できる。

表-3 反射率と透過率の精度

ak	誤差(%)		ak	誤差(%)	
	b/a=3.0	b/a=4.0		b/a=3.0	b/a=4.0
0.4	0.004	0.012	2.0	11.84	0.582
0.8	0.013	0.027	2.4	0.415	1.055
1.2	0.027	0.143	2.8	30.59	0.224
1.6	0.397	5.147	3.2	11.03	29.22

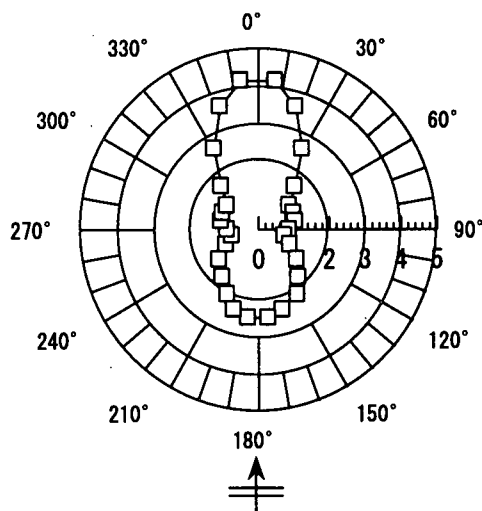


図-9 球形散乱体表面上の波動場 u
($ak=2.1$, $b/a=3.0$)

7.4 散乱体表面上の波動場

参考のため、 $b/a = 3.0$ の場合について、境界積分方程式 (32) を数値解析した結果を図-8 から図-12 に示す。図中の四角が球形散乱体表面上の波動場 u の値を表している。カットオフ波数近傍の波数 $ak = 2.1$ (図-9) と $ak = 3.0$ (図-11) において、境界上の波動場 u の値が大きくなっており、また波動の進行方向に卓越した波動場の形態となっていることがわかる。

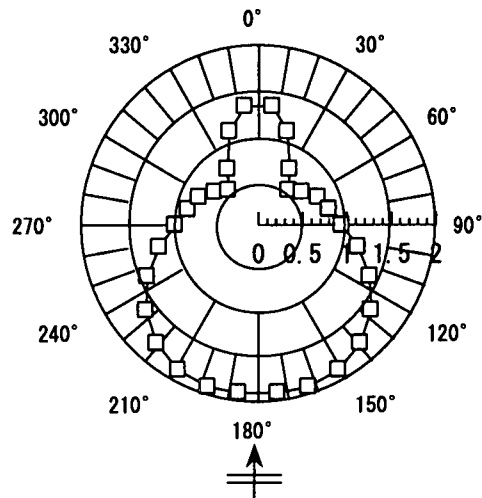


図-10 球形散乱体表面上の波動場 u
($ak=2.4$, $b/a=3.0$)

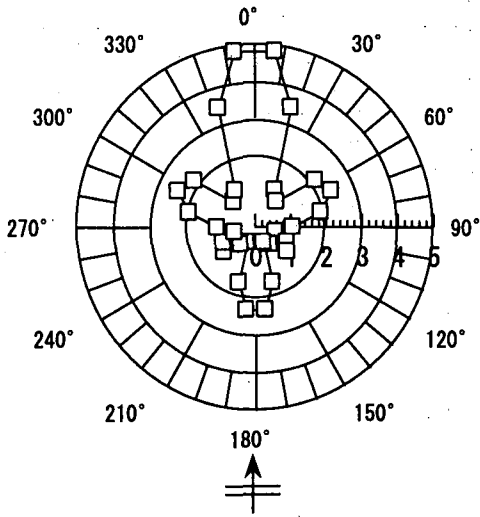


図-11 球形散乱体表面上の波動場 u
($ak=3.0$, $b/a=3.0$)

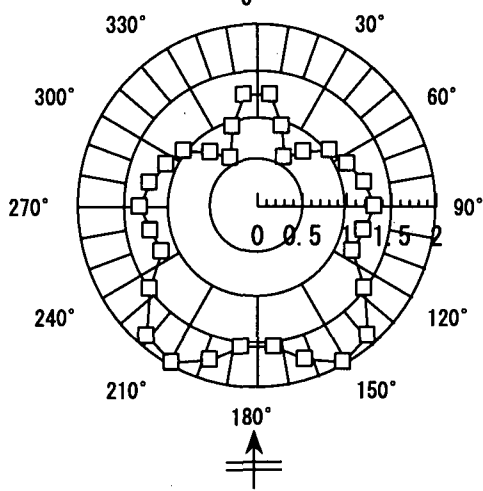


図-12 球形散乱体表面上の波動場 u
($ak=3.6$, $b/a=3.0$)

8. 三重周期構造系における波動の分散特性

8.1 分散方程式

図-13 に示すように、平面アレー状散乱体 (図-1 参照) が x_3 軸方向に一定間隔 h で積み重なった三重周期構造を考える。

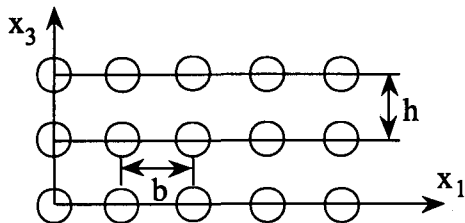


図-13 三重周期構造系

入射波は x_3 軸方向 ($\theta = 0^\circ$) に伝播する平面波とする。この三重周期分布した散乱体による波動場の特性

を解析する過程において、二重周期構造系の結果が利用できる。

以下、 $(p, q) = (0, 0)$ モードの波動のみを考える。二重周期構造に対する $(0, 0)$ モードの反射率 R と透過率 T は式 (18) の最初の 2 つの式から求まる。一次元の Floquet または三次元に関する Bloch の理論¹⁸⁾ から、波動の伝播方向 (x_3 軸方向) に周期的に配置された散乱体による波動場は次のように書ける。

$$u(x_3) = U(x_3)e^{iqx_3} \quad (38)$$

ここで、 q は Floquet の波数である。ここで、 $U(x_3)$ は次のような周期性を持つ。

$$U(x_3 + h) = U(x_3) \quad (39)$$

いま、図-14 に示すように、一つの平面アレー構造を含むユニット層を考える。このユニット層は x_3 軸上に原点を持つ座標 ξ を導入すると $|\xi| \leq \frac{1}{2}h$ で定義できる。式 (38) と (39) から次式を得る。

$$u(h/2) = u(-h/2)e^{iqh} \quad (40)$$

さらに、法線方向微分量も連続していることから次式が成立する。

$$\frac{\partial u(h/2)}{\partial x_3} = \frac{\partial u(-h/2)}{\partial x_3} e^{iqh} \quad (41)$$

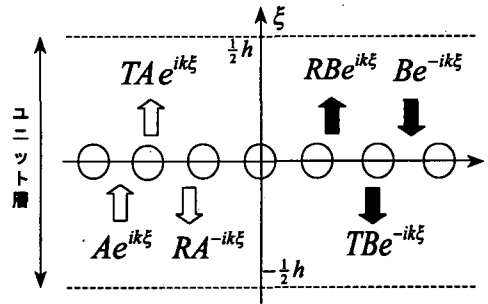


図-14 ユニット層内の波動場

図-14 のように、ユニット層を $-\frac{1}{2}h \leq \xi \leq 0$ と $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}h$ の 2 つの領域に分解する。2 つの領域において $u(\xi) = A \exp(ik\xi)$ と $u(\xi) = B \exp(-ik\xi)$ の入射波がそれぞれ存在していると考え、これら 2 つの入射波それぞれについて $\xi = 0$ で反射波と透過波が発生する。即ち、ユニット層内の波動場は次のように書ける。

$$u = TAe^{ik\xi} + Be^{-ik\xi} + RBe^{ik\xi}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}h \quad (42)$$

$$u = Ae^{ik\xi} + RAe^{-ik\xi} + TBe^{-ik\xi}, \quad -\frac{1}{2}h \leq \xi \leq 0 \quad (43)$$

式 (42) と (43) を連続条件式 (40) と (41) に代入すると、振幅 A, B に関する連立方程式を得る。

$$[T - (e^{-ikh} + R)e^{iqh}]A + (e^{-ikh} + R - Te^{iqh})B = 0 \quad (44)$$

$$[T - (e^{-ikh} - R)e^{iqh}]A - (e^{-ikh} - R - Te^{iqh})B = 0 \quad (45)$$

この連立方程式の解は、行列式が零になるときのみ存在する。

$$Te^{-iqh} - (T^2 - R^2)e^{ikh} - e^{-ikh} + Te^{iqh} = 0 \quad (46)$$

この式は次のように整理できる。

$$\cos(qh) = \frac{1}{2T}[(T^2 - R^2 - 1)e^{ikh} + 2\cos(kh)] \quad (47)$$

上式が qh と kh を関係付ける分散関係式となり、式 (47) に kh を与えることにより Floquet の波数 qh が求まる。

8.2 分散関係

分散関係式 (47) の右辺は複素数であるから qh も複素数となる。

$$qh = q_1h + iq_2h \quad (48)$$

上式 (48) を式 (47) に代入し、反射率と透過率の実部と虚部を利用して kh と qh の関係を求めた結果を図-15 に分散曲線として示す。ここで $\kappa = b/a = c/a = h/a = 3.0, \kappa = 4.0, \kappa = 5.0$ の3つの場合について kh と qh の関係を表している。 $0 < q_1h < \pi$ では q_2h は非常に小さい値となり、 q_1h の値が π になると実数部である q_1h から虚数部である q_2h に変化する。このとき式 (38) より、 x_3 軸方向の波動が伝播モードから減衰モードに変化する。さらに kh の値が増加すると、 q_2h は再び零となり、2 番目の伝播モードが出現する。 kh が π 付近以外ではほぼ $kh = q_1h$ の関係が成立している。 kh が π 付近になると kh と q_1h の直線関係は崩れ、三重周期構造特有の分散現象が生じることがわかる。

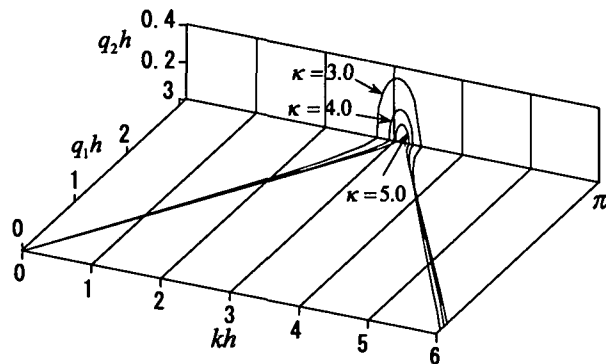


図-15 分散曲線

9. おわりに

ヘルムホルツ方程式に支配される波動場について、平面アレー状に二重周期分布した散乱体に対する反射率と透過率の一般表現を示した。この表現を用いて反射率と透過率を計算するためにはユニットセル内に存在する単一の散乱体上の波動場が必要となるが、ここでは二重級数和を効率良く評価し得る基本解の積分表現を利用した境界要素法により、これを求めた。数値解析により得られた反射率と透過率は、カットオフ波数付近の波数域を除いて十分な精度を有していることをエネルギー関係式により確認した。ここで求めた平面アレー状散乱体による反射率と透過率を利用して、三重周期構造系における波動場の分散解析を行い、幾何学的な周期間隔に依存して波動の進行が停止する周波数帯域が存在することを明らかにした。

参考文献

- 1) Angel, Y.C. and Achenbach, J.D.: Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks, *J. Appl. Mech.*, Vol.52, pp.33-41, 1985.
- 2) Sotiropoulos, D.A. and Achenbach, J.D.: Reflection of elastic waves by a distribution of coplanar cracks, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.84, pp.752-759, 1988.
- 3) Achenbach, J.D. and Zhang, Ch.: Reflection and transmission of ultrasound by a region of damaged material, *J. Nondestruct. Eval.*, Vol.9, pp.71-79, 1990.
- 4) Angel, Y.C. and Koba, Y.K.: Complex-valued wavenumber, reflection and transmission in an elastic solid containing a cracked slab region, *Int. J. Solids Structures*, Vol.35, pp.573-592, 1998.
- 5) Angel, Y.C. and Bolshakov, A.: In-plane waves in an elastic solid containing a cracked slab region, *Wave Motion*, Vol.31, pp.297-315, 2000.
- 6) Achenbach, J.D. and Kitahara, M.: Reflection and transmission of an obliquely incident wave by an array of spherical cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.80, pp.1209-1214, 1986.
- 7) Achenbach, J.D., Kitahara, M., Mikata, Y. and Sotiropoulos, D.A.: Reflection and transmission of plane waves by a layer of compact inhomogeneities, *Pure Appl. Geophys.*, Vol.128, pp.101-118, 1988.
- 8) Kinra, V.K., Maslov, K., Henderson, B.K. and Diderich, G.: Acoustic response of a layer of spherical inclusions with a random or periodic arrangement, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol.17, pp.41-48, 1998.
- 9) Henderson, B.K., Kinra, V.K. and Maslov, K.: Acoustic response of a layer of spherical inclusions with a hexagonal or square periodic arrangement, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol.18, pp.143-150, 1999.
- 10) Achenbach, J.D. and Li, Z.L.: Propagation of horizontally polarized transverse waves in a solid with a periodic distribution of cracks, *Wave Motion*, Vol.8, pp.371-379, 1986.
- 11) Angel, Y.C. and Achenbach, J.D.: Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks, *Wave Motion*, Vol.9, pp.377-385, 1987.
- 12) Achenbach, J.D. and Kitahara, M.: Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.81, pp.595-598, 1987.
- 13) Ewald, P.P.: Die Berechnung optischer und elektrostatischer gitterpotentiale, *Annalen der Physik*, Vol.64, pp.253-287, 1921.
- 14) 中川克也, 北原道弘: 周期構造を有する散乱体解析のための基本解に関する検討, 境界要素法論文集, Vol.15, pp.1-6, 1998.
- 15) 山田将紀, 北原道弘, 中川克也: アレー状散乱体による反射・透過解析への高速収束型基本解の適用, 境界要素法論文集, Vol.16, pp.121-126, 1999.
- 16) 山田将紀, 北原道弘: アレー状球形散乱体による反射と透過に関する考察, 境界要素法論文集, Vol.17, pp.17-22, 2000.
- 17) Jordan, K.E., Richter, G.R. and Sheng, P.: An efficient numerical evaluation of the Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures, *J. Comput. Phys.*, Vol.63, pp.222-235, 1986.
- 18) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.: Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, Vol.45, pp.343-349, 1978.

(2001 年 4 月 20 日 受付)