

気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する Petrov-Galerkin 有限要素法

Petrov-Galerkin Finite Element Method for Incompressible Navier-Stokes Equation
Using Bubble Element

奥村 弘*・川原 睦人**

Hiroshi OKUMURA and Mutsuto KAWAHARA

*学生会員 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻博士後期課程 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

A stable mixed Petrov-Galerkin finite element approximation employing the trilinear element with a scaled bubble function is presented in this paper. It turned out that present approximation prompts stabilized method in certain problems such as steady advection-diffusion and viscous fluid flows. In this paper, we discuss how stabilization of bubbles' effect acts on unsteady problems in incompressible Navier-Stokes flows through a firm theoretical and numerical foundation. Consequently, present approach possesses better stability properties than conventional Bubnov-Galerkin approximation employing MINI element.

Key Words : Bubble element, mixed Petrov-Galerkin approximation, incompressible Navier-Stokes equation, numerical stability

1. はじめに

従来、気泡関数要素では Bubnov-Galerkin 型の定式化により気泡関数の自由度を要素毎に消去する、いわゆる静的縮約 (static condensation) の操作によって得られた有限要素近似式が、ある種の問題において安定化有限要素法^{1)~3)}と等価な近似式となることがわかっている^{4)~7)}。しかしながら、Stokes 方程式に対する MINI 要素⁸⁾において、その数値安定性の不足が指摘されているように⁹⁾、Bubnov-Galerkin 型の定式化において、どのような適合型および非適合型の気泡関数を選んでも、安定化パラメータを任意の大きさとすることはできず^{10)~13)}、安定化作用は必ずしも十分ではない。

一方、MINI 要素における数値安定性の問題点を解消する気泡関数を用いた新しい定式化¹⁴⁾が近年提案されている。この中で、試行気泡関数と重み気泡関数の自由度の補間に異なった気泡関数を用いたある種の Petrov-Galerkin 法^{1), 14)}の考え方にに基づき、定常 Stokes 方程式に対する変分法的定式化が行われている。これにより得られる近似式は、MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の近似^{4), 5), 7)}と同様に、安定化有限要素法と等価になることがわかっており、定常問題における Petrov-Galerkin 型の気泡関数の安定化作用の理論が展開されている。しかし、非定常問題におけるこの気泡関数要素の安定化作用についてはまだ言及されていない。このことから、本研究では、Petrov-Galerkin 型の気泡関数要素¹⁴⁾を非圧縮 Navier-Stokes 方程式に適用し、非定常問題における気泡関数の安定化作用を論ずる。

2. 非圧縮 Navier-Stokes 方程式

空間領域 $\Omega \subset R^d$ ($d = 2$) を考え、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は十分滑らかであるものとする。このとき、非圧縮粘性流れに対する無次元化された Navier-Stokes 方程式の解を $t > 0$ において考える。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

式 (1)–(2) において、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{f}$ はそれぞれ流速と外力を与えるベクトルであり、

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\nu\epsilon(\mathbf{u}) \quad (6)$$

は動粘性係数 ν を持つ応力テンソルである。また、 p は圧力とし、 $\epsilon(\mathbf{u})$ はひずみ速度を与える以下のテンソルである。

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (7)$$

式 (3)–(4) では、境界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ において Dirichlet および Neumann 境界条件を規定している。また、式 (5) において連続条件 $\nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0$ を満たす初期条件を

与える。ここで、 n と 1 はそれぞれ境界 Γ 上の外向き法線ベクトルと単位テンソルを表している。

この問題に対して、混合型の変分法的定式化を適用すると、次の非圧縮 Navier-Stokes 方程式の弱形式を満たす変分問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right\} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{w}) : \{-p\mathbf{1} + 2\nu\epsilon(\mathbf{u})\} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{w}$, q はそれぞれ流速および圧力に対する重み関数である。

3. 時間方向の離散化

次に式 (8)-(9) における変分問題に対し、時間方向の離散化を与える。運動方程式 (8) に対しては、Crank-Nicolson 法を適用する。また、非圧縮性の拘束条件を与える連続式 (9) とそれに対応する圧力に対しては、完全陰的に表現することにより、以下のような $\mathbf{u}^{n+1}$ と p^{n+1} を未知数とする境界値問題の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{w}) : \{-p^{n+1}\mathbf{1} + 2\nu\epsilon(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})\} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} d\mathbf{x} = 0 \quad (11)$$

ここで、

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \quad (12)$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{2} (3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \quad (13)$$

移流速度の線形近似としている $\mathbf{u}^*$ は、2次精度 Adams-Bashforth 公式により得られている。ここで得られた時間積分スキーム¹³⁾は、時間増分量 Δt に対して2次精度を有する線形スキームとなっている。

4. 有限要素近似

前節で得られた境界値問題の弱形式 (10)-(11) に対して有限要素近似を行うにあたり、離散領域 $\Omega^h \simeq \Omega$ の有限要素への分割を考える。要素数を N_e として、要素 $e \in \{1, 2, \dots, N_e\}$ に対する要素領域を Ω_e^h として正則な要素分割 $\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e^h$ を与える。このとき、気泡関数要素を用いた有限要素近似では、流速に対

して1次要素と気泡関数からなる有限要素空間 $S_u^h = \bar{S}_u^h \oplus \tilde{S}_u^h$, $\mathcal{V}_u^h = \bar{\mathcal{V}}_u^h \oplus \tilde{\mathcal{V}}_u^h$ を用い、圧力に対して1次要素の有限要素空間 S_p^h , $\mathcal{V}_p^h$ を用いる。

$$\begin{aligned} \bar{S}_u^h &= \{ \bar{\mathbf{v}}_h \in (C_0^0(\Omega^h))^d, \bar{\mathbf{v}}_h|_{\Omega_e^h} \in (P^1(\Omega_e^h))^d, \\ & \quad \bar{\mathbf{v}}_h|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_h \} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_u^h &= \{ \tilde{\mathbf{v}}_h \in (C_0^0(\Omega_e^h))^d, \tilde{\mathbf{v}}_h|_{\Omega_e^h} = \phi_e \mathbf{b}_e, \mathbf{b}_e \in \mathbf{R}^d, \\ & \quad \phi_e|_{\partial\Omega_e^h} = 0 \} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}_u^h &= \{ \bar{\mathbf{v}}_h \in (C_0^0(\Omega^h))^d, \bar{\mathbf{v}}_h|_{\Omega_e^h} \in (P^1(\Omega_e^h))^d, \\ & \quad \bar{\mathbf{v}}_h|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_u^h &= \{ \tilde{\mathbf{v}}_h \in (C_0^0(\Omega_e^h))^d, \tilde{\mathbf{v}}_h|_{\Omega_e^h} = \varphi_e \mathbf{c}_e, \mathbf{c}_e \in \mathbf{R}^d, \\ & \quad \varphi_e|_{\partial\Omega_e^h} = 0 \} \end{aligned} \quad (17)$$

$$S_p^h = \mathcal{V}_p^h = \{ q_h \in C^0(\Omega^h), q_h|_{\Omega_e^h} \in P^1(\Omega_e^h) \} \quad (18)$$

ここで、 $P^1(\Omega_e^h)$ は1次の多項式を意味している。関数 ϕ_e , φ_e はそれぞれ試行および重み気泡関数である。これらの試行気泡関数および重み気泡関数は要素毎に定義され、要素領域の境界 $\partial\Omega_e^h$ においてその値が0となる C_0 連続性を有する適合型の気泡関数である。また、 $\mathbf{b}_e$, $\mathbf{c}_e$ はそれぞれ試行気泡関数 ϕ_e および重み気泡関数 φ_e に対する自由度である。このとき、節点配置は図-1のようになるが、気泡関数の自由度の補間に関してのみ、試行関数と重み関数が異なっているため、この近似手法はある種の Petrov-Galerkin 法¹⁴⁾と位置付けられる。

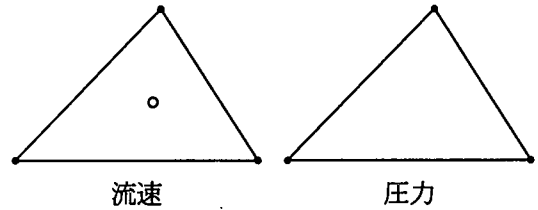


図-1 気泡関数要素における節点配置

以上のことを踏まえ、境界値問題の弱形式 (10)-(11) に対して Petrov-Galerkin 型の気泡関数要素による有限要素近似¹⁴⁾を適用すると、全ての $\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_u^h = \bar{\mathcal{V}}_u^h \oplus \tilde{\mathcal{V}}_u^h$ と $q_h \in \mathcal{V}_p^h$ に対して、 $\mathbf{u}_h^{n+1} \in S_u^h = \bar{S}_u^h \oplus \tilde{S}_u^h$ と $p_h^{n+1} \in S_p^h$ を見出す近似問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u}_h^* \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{w}_h) : \{-p_h^{n+1}\mathbf{1} + 2\nu\epsilon(\mathbf{u}_h^{n+\frac{1}{2}})\} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{h}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} d\mathbf{x} = 0 \quad (20)$$

いま、流速に対する近似解 $u_h^n \in S_u^h$ と近似重み関数 $w_h \in V_u^h$ は一意的に以下のように表すことができる。

$$u_h^n = \bar{u}_h^n + \tilde{u}_h^n \quad (21)$$

$$w_h = \bar{w}_h + \tilde{w}_h \quad (22)$$

ここで、

$$\bar{u}_h^n \in \bar{S}_u^h, \quad \tilde{u}_h^n = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e b_e \in \tilde{S}_u^h \quad (23)$$

$$\bar{w}_h \in \bar{V}_u^h, \quad \tilde{w}_h = \sum_{e=1}^{N_e} \varphi_e c_e \in \tilde{V}_u^h \quad (24)$$

さらに、一次要素の有限要素空間の元と気泡関数の空間の元は、エネルギー内積に関して直行し、次の性質を持つ。

$$\int_{\Omega_e^h} \nabla \bar{u}_h^n : \nabla \bar{w}_h \, dx = 0, \quad (25)$$

$$\int_{\Omega_e^h} \nabla \tilde{u}_h^n : \nabla \tilde{w}_h \, dx = 0 \quad (26)$$

また、要素領域をコンパクトな台とする気泡関数は、要素毎に気泡関数の自由度を消去すること（静的縮約）ができる。ここで述べた気泡関数要素による Petrov-Galerkin 近似は、ある種の定常問題において、従来の Bubnov-Galerkin 近似における MINI 要素の数値安定性の不足を解消する新しい気泡関数要素として証明がされている¹⁴⁾。しかしながら、非定常解析においては、静的縮約の操作が複雑になることから、非定常問題における気泡関数の安定化作用の理論的な証明は現在のところまだ展開されていない。このことから、本研究ではこの気泡関数要素を非定常問題に適用し、気泡関数の安定化作用を期待するものである。

5. 安定化パラメータ

試行気泡関数と重み気泡関数に異なった関数形状を用いたある種の Petrov-Galerkin 近似の考え方に基づき導出される安定化パラメータ τ_e は次式によって気泡関数の安定化作用の大きさが表されることがわかっている¹⁴⁾。

$$\tau_e = \frac{\int_{\Omega_e^h} \phi_e \, dx \int_{\Omega_e^h} \varphi_e \, dx}{\nu \int_{\Omega_e^h} \nabla \phi_e \cdot \nabla \varphi_e \, dx A_e} \quad (27)$$

ここで、 A_e は要素測度（2次元の場合は要素面積）であり、気泡関数 ϕ_e 、 φ_e は要素毎に定義される。安定化パラメータ τ_e はある種の問題（定常の移流拡散および Stokes 方程式）において安定化有限要素法^{1)~3)}で現れる安定化パラメータに等価である¹⁴⁾。

本研究では、試行気泡関数 ϕ_e および重み気泡関数 φ_e の関数形状を適応的に制御するため、以下に定義す

る P 型正規化気泡関数^{10), 11)} (P-scaled bubble) $\bar{\phi}_e^\xi$ の組合せによって、試行気泡関数および重み気泡関数の形状を安定化有限要素 (SUPG)¹⁾ 法に従い、正の実数をとる形状パラメータ $\xi \in \mathbf{R}^+$ で制御していくものとする。図-2に示すように、アイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ における要素領域を重心位置から3つの小三角形 ω_i に分割し、以下のように正規化気泡関数 $\bar{\phi}_e^\xi$ を定義する。

$$\bar{\phi}_e^\xi = \begin{cases} \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3(1-r-s))^\xi\} & \text{in } \omega_1 \\ \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3r)^\xi\} & \text{in } \omega_2 \\ \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3s)^\xi\} & \text{in } \omega_3 \end{cases} \quad (28)$$

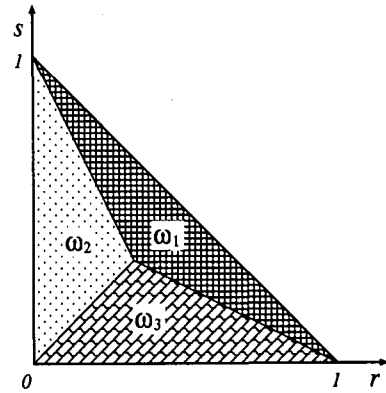


図-2 要素の部分領域

式 (28) を用い、試行気泡関数 ϕ_e には次式で定義する正規化気泡関数を用いる。

$$\phi_e = \begin{cases} \bar{\phi}_e^\xi & (0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}) \\ \bar{\phi}_e^{\frac{1}{2}} & (\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{23}{6}) \end{cases} \quad (29)$$

また、重み気泡関数 φ_e には適切な気泡関数として式 (28) の正規化気泡関数を組み合わせたものを用いる。

$$\varphi_e = \begin{cases} \bar{\phi}_e^\xi & (0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}) \\ (\frac{3}{2} - \xi) \bar{\phi}_e^{\frac{1}{2}} + (\xi - \frac{1}{2}) \bar{\phi}_e^{\frac{3}{2}} & (\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{23}{6}) \end{cases} \quad (30)$$

ここで、これらの正規化気泡関数には次の性質がある。

$$\int_{\Omega_e^h} \phi_e \, dx = \int_{\Omega_e^h} \varphi_e \, dx = A_e \quad (31)$$

$$\int_{\Omega_e^h} \varphi_e \phi_e \, dx = \begin{cases} \frac{\xi+2}{\xi+1} A_e & (0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}) \\ (\frac{7}{4} - \frac{\xi}{6}) A_e & (\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{23}{6}) \end{cases} \quad (32)$$

このとき、安定化パラメータ τ_e は ξ の関数として次式のように表される。

$$\tau_e = \begin{cases} \frac{2A_e^2}{3\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2} & (0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{8A_e^2}{3\nu g} (\frac{115}{2} - 15\xi)^{-1} & (\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{23}{6}) \end{cases} \quad (33)$$

ここで, $g = |\mathbf{x}_{,r}|^2 + |\mathbf{x}_{,s}|^2 - \mathbf{x}_{,r} \cdot \mathbf{x}_{,s}$ である。また, 形状パラメータ ξ は, 次の条件により決定する。

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}\{\beta - 4 - \sqrt{\beta(\beta - 8)}\} & (\beta \geq \frac{25}{2}) \\ \frac{23}{6} - \frac{4}{15}\beta & (\beta < \frac{25}{2}) \end{cases} \quad (34)$$

$$\alpha = \frac{|\bar{\mathbf{u}}_h| h_e}{2\nu}, \quad \beta = \frac{8A_e^2}{gh_e^2} \frac{\alpha}{3\tilde{\xi}(\alpha)}, \quad (35)$$

ここで, $\tilde{\xi}(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}$ である。また, α はセルレイノルズ数, h_e は代表要素長さ, β はセルレイノルズ数 α と同様の性質を持つ無次元パラメータである。

このとき, 形状パラメータ ξ は 0 から $\frac{23}{6}$ までの値をとり得る。移流が卓越するときには $\xi \rightarrow 0$ となり, 拡散が卓越するときには $\xi \rightarrow \frac{23}{6}$ に近づく。この中で, 形状パラメータ ξ が 0 から $\frac{1}{2}$ までの範囲においては, 試行および重み気泡関数ともに同一の関数形状をしながら変化していく (図-3)。一方, ξ が $\frac{1}{2}$ から $\frac{23}{6}$ の範囲においては, 試行気泡関数 ϕ_e は $\xi = \frac{1}{2}$ のまま固定されて気泡関数の形状を保ち, 重み気泡関数 φ_e は ξ が $\frac{23}{6}$ に近づくにつれて, 試行気泡関数とは別の挙動を示すことがわかる (図-4)。

次にセルレイノルズ数 α による気泡関数の安定化パラメータ τ_e の変化を見るために, 安定化有限要素法による安定化パラメータとの比較を行う。3 角形 1 次要素による同次補間を用いた場合には, 以下のように定義されている³⁾。

$$\tau_e = \left\{ \left(\frac{2|\bar{\mathbf{u}}_h|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (36)$$

移流が卓越する場合 ($\xi \rightarrow 0$) には, 気泡関数による安定化パラメータ (33) は $\tau_e = \frac{h_e}{2|\bar{\mathbf{u}}_h|}$ となり, 安定化有限要素法によるパラメータ (36) と一致する ($\alpha \rightarrow \infty, \nu \rightarrow 0$) :

$$\nu \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_e \cdot \nabla \phi_e \, d\mathbf{x} \rightarrow \frac{2|\bar{\mathbf{u}}_h| A_e}{h_e} \quad (37)$$

$$\nu \int_{\Omega_h} \nabla \bar{\mathbf{w}}_h : \nabla \bar{\mathbf{u}}_h \, d\mathbf{x} \rightarrow 0 \quad (38)$$

$$\int_{\Omega_h} \varphi_e \phi_e \, d\mathbf{x} \rightarrow 2A_e \quad (39)$$

一方, 拡散が卓越する場合には, 気泡関数による式 (33) より $\xi \rightarrow \frac{23}{6}$ に近づけば, $\tau_e \rightarrow \infty$ となり, 気泡関数による安定化パラメータは任意の大きさを持つことができる。よって, 安定化有限要素法による式 (36) は, $\tau_e \rightarrow \frac{h_e^2}{4\nu}$ となることから, 気泡関数によって安定化有限要素法による安定化パラメータの値に十分近付けることができる。 ($\alpha \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty$) :

$$\nu \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_e \cdot \nabla \phi_e \, d\mathbf{x} \rightarrow \frac{4\nu A_e}{h_e^2} \quad (40)$$

$$\int_{\Omega_h} \varphi_e \phi_e \, d\mathbf{x} \rightarrow \frac{10}{9} A_e \quad (41)$$

よって, 移流および拡散どちらが卓越する場合でも, Petrov-Galerkin 型の気泡関数による安定化作用は十分であるといえる。

次に, 質量行列を形成する気泡関数と 1 次要素との積は, 1 次要素の形状関数となる面積座標 L_i ($i = 1, 2, 3$) を用いて以下のように表すことができる。

$$\int_{\Omega_h} \phi_e L_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} L_i \varphi_e \, d\mathbf{x} = \frac{A_e}{3} \quad (42)$$

本研究においては Petrov-Galerkin 法に基づいているため, 試行気泡関数と重み気泡関数の違いから質量行列が非対称となる可能性が考えられるが, 気泡関数の正規化により式 (42) において対称な質量行列が得られていることがわかる。また, 式 (39) および (41) により, 質量行列を形成する試行気泡関数 ϕ_e と重み気泡関数 φ_e との $L^2(\Omega_h)$ 内積が有界な値に収束していることがわかる。これらのことにより, 非定常問題においても, 実質的な気泡関数の寄与すなわち安定化作用が減少していくことはないといえる。

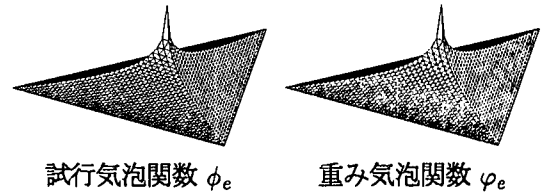


図-3 移流が卓越する場合における気泡関数形状の組合せ ($\xi = 0.1$)

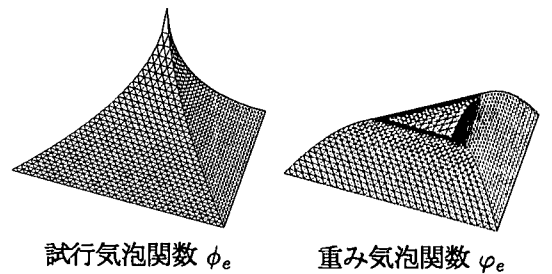


図-4 拡散が卓越する場合における気泡関数形状の組合せ ($\xi = 3.0$)

6. 数値計算例

6.1 Standing Vortex Problem

一つ目の数値解析例として, Standing Vortex Problem³⁾ を取り上げる。Standing Vortex Problem は, 非粘性流れ ($\nu \rightarrow 0$) を仮定し, その流れの運動エネルギー及び渦度分布の時刻歴変化を見ることにより, 離散化手法の持つ数値的な散逸誤差を定性的に評価することができる。

解析領域は図-5 に示す。この領域を 20×20 の均等な有限要素 (図-6) に分割する。初期条件は図-5 に示してある極座標 $\{r, \theta\}$ を用いて、次式のように定義する。

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases} \quad (43)$$

流速分布の初期条件を図-7 に示す。時間増分量 Δt は、 $\Delta t = 0.001, 0.005, 0.01$ である。計算時間は $t = 3$ になるまでそれぞれの計算ステップ数を行う。

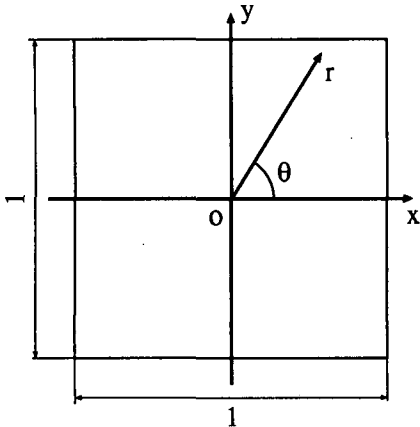


図-5 Standing Vortex Problem の解析領域

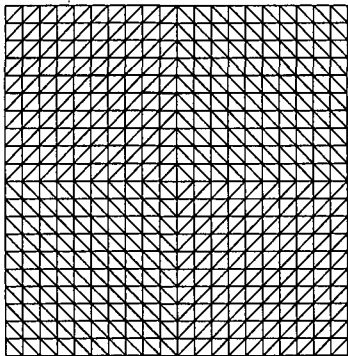


図-6 有限要素分割

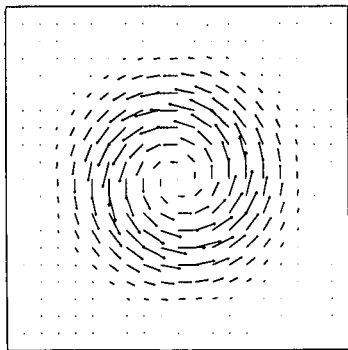


図-7 流速分布の初期条件

初期の渦の減衰を調べる指標は、流速の L^2 ノルム $\|\bar{u}_h\|_2$ で評価した運動エネルギーである。これが最終的 $t = 3$ にどの程度のエネルギー減衰があるかを調べることで数値的な散逸誤差を評価している。表-1

に $t = 3$ までの運動エネルギーの相対変化を示す。すべての計算結果において、他の手法³⁾ に比べて散逸誤差が少なく、時間増分量にほとんど依存していない。この結果から、本手法は適切な数値粘性を与えていることがわかる。

表-1 運動エネルギーの相対変化 ($t = 3.0$)			
Δt	0.001	0.005	0.01
運動エネルギー	0.935	0.935	0.934

6.2 Cavity 流れの解析

定常解を持つ問題の検証として、Cavity 流れ問題 (図-8) を取り上げ、本研究で提案する手法の数値安定性を検証する。動粘性係数は $\nu = 0.1$ とし、拡散が卓越する流れを仮定する。図-9 に示すように 32×32 の均等メッシュを用いて、定常解に収束するまで計算を行う ($\Delta t = 0.01$) ものとする。気泡関数としては、式 (28) で定義される P 型正規化気泡関数による Bubnov-Galerkin 近似¹⁰⁾ を式 (10), (11) と同様の時間積分スキームを適用した手法を比較対象とする。Bubnov-Galerkin 近似においては、本論文における正規化気泡関数を $\phi_e = \bar{\phi}_e^\xi, \varphi_e = \bar{\varphi}_e^\xi$ と定義することにより試行および重み気泡関数に同一の気泡関数を用いている。この場合の安定化パラメータは具体的に $\tau_e = \frac{2A^2}{3\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2}$ で与えられ (ξ の範囲は $0 \leq \xi \leq 2$)、圧力場に対する安定化作用は十分でない¹¹⁾ ことが知られている。

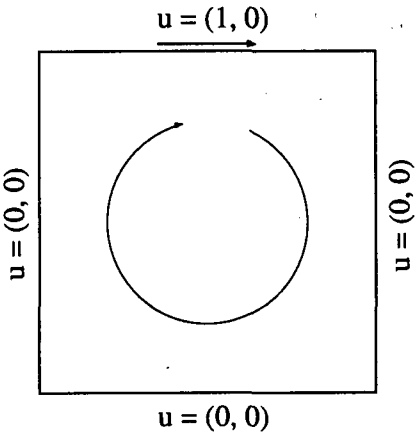


図-8 Cavity 流れ問題

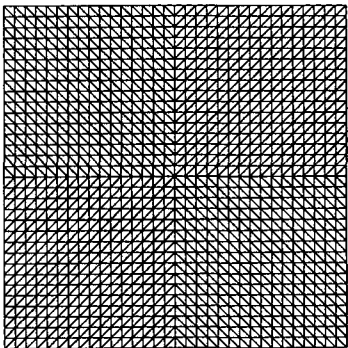
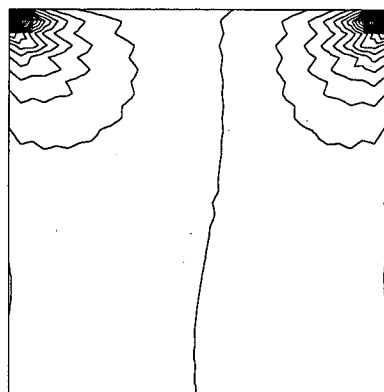
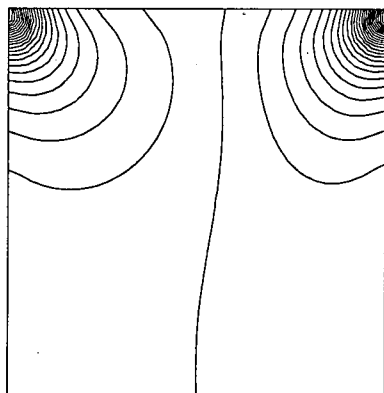


図-9 有限要素分割

図-10 に圧力コンター図を示す。P 型正規化気泡関数要素による Bubnov-Galerkin 型の近似では、角点および辺上の特異点近傍で同次補間を用いた場合に見られる特有の数値的圧力振動が見られる。この数値的不安定性は、任意の気泡関数 $\phi_e \in H_0^1(\Omega_e)$ を用いた MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の近似においても見られる¹²⁾。一方、本手法である Petrov-Galerkin 型の近似による結果では、数値的圧力振動は見られず滑らかな圧力分布が得られている。このことは、本手法と安定化有限要素法との等価性および本手法における安定化作用の有効性を示している。



Bubnov-Galerkin



Petrov-Galerkin

図-10 圧力コンター図 ($\nu = 0.1$)

7. おわりに

本研究では、Petrov-Galerkin 型の気泡関数を非定常問題である非圧縮 Navier-Stokes 方程式に適用し、新しい気泡関数の安定化作用の理論を展開した。この中で、気泡関数による安定化パラメータに任意の大きさを持たせ、質量行列を有界の値に収束させるという目的を達成させることができた。このことにより定常問題と同様に、非定常問題においても、Petrov-Galerkin 型の気泡関数の安定性の寄与が確認できたといえる。今後は、圧縮性の方程式に適用していくつもりである。

参考文献

- 1) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199~259, 1982.
- 2) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodationing equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.59, pp.85~99, 1986
- 3) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.95, pp.221~242, 1992.
- 4) Brezzi, F., Bristeau, M.O., Mallet, M. and Roge, G. : A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.96, pp.117~129, 1992.
- 5) Pierre, R.: Simple C^0 approximation for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.68, pp.205~227, 1988.
- 6) Franca, L.P. and Farhat, C.: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.123, pp.299~308, 1995.
- 7) Baicocchi, C., Brezzi, F. and Franca, L.P. : Virtual bubbles Galerkin-Least-Squares type method (Ga.L.S.), *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.105, pp.125~141, 1993.
- 8) Fortin, M. and Fortin, A.: Newer and newer elements for incompressible flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.6, John Wiley & Sons Ltd., pp.171~187, 1985.
- 9) Arnold, D.N., Brezzi, F. and Fortin, M.: A stable finite element for the Stokes equation, *Calcolo*, Vol.23, 337~344, 1984.
- 10) Yamada, T.: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.9, pp.1567~1576, 1995.
- 11) Yamada, T.: A bubble element for the compressible Euler equations, *IJCFD*, Vol.9, pp.273~283, 1998.
- 12) Pierre, R.: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.32, pp.1210~1224, 1995.
- 13) Simo, J.C., Armero, F. and Taylor, C.: Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.38, pp.1475~1506, 1995.
- 14) 奥村 弘, 川原 睦人: 非圧縮体に対する非適合気泡関数を用いた MINI 要素による Petrov-Galerkin 有限要素法, 応用力学論文集, Vol. 3, pp.275~280, 2000.

(2001 年 4 月 20 日 受付)