

Hybrid-FCM の開発とその多相材料の界面破壊解析への適用

Development of Hybrid-FCM and its application to the analysis of interface fracture
in multi-phase materials

浅井 光輝*, 寺田 賢二郎**, 池田 清宏***, 山岸 道弘****

Mitsuteru ASAI, Kenjiro TERADA, Kiyohiro IKEDA, Michihiro YAMAGISHI

*東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***Ph.D. 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

****東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

A new analysis method, called Hybrid Finite Cover Method (Hybrid-FCM), is developed based on the modified variational principles with relaxed continuity requirements. The method is formulated for the characterization of the mechanical behavior of multi-phase materials, which possibly involve interface fracture. Due to the introduction of Lagrange multiplier to satisfy the continuity conditions for displacement vectors on the interface, the proposed Hybrid-FCM provide much more realistic solution than those of the conventional FCM with penalty method and of the image-based FEM. The performance of the proposed method is well demonstrated by the nonlinear analysis of interface fracture.

Key Words : FCM, Hybrid displacement model, Augmented Lagrange method, Multi-phase materials

1. はじめに

コンクリート材料に代表される多相材料は、母材と介入物とが織りなす微細な複合構造の存在により、ある巨視的な材料特性を与えることが知られている。近年では、この巨視的な材料としての性能を向上することを目的として微視的な構造設計の考え方が浸透しつつあり、各相を構成する材料の特性を生かしながら、さらにそれらの組成および構造を制御するための手法も考案されている¹⁾。ただしこの場合、多相構造の幾何学的特性を正確に反映し、微視的構造の力学挙動を正確に評価する必要がある。すなわち、この種の材料の設計においては、多相構造の形状モデルの生成法と材料および材料界面の破壊挙動の解析法の確立が前提となる。

多相構造の形状モデリングでは、各相の複雑な形状やその配置を的確に表現し、そのデータを解析モデルへと変換できなければならない。近年、これを実現する技術としてデジタル画像（イメージ）のデータ構造を利用してモデル化し、1画素を1要素と見なす有限要素法（IB-FEM）²⁾が注目を集めている。しかし、このIB-FEMは機械部品等の線形解析にはモデル化と解析の自動化を実現するが、非均質性に起因する破壊を伴う解析には十分な精度と解析効率は期待できない³⁾。それでも、モデル化においてイメージを利用する利点を残しながら、解析手法を改良あるいは変更することも試みられている。

永井ら⁴⁾は、コンクリート界面の破壊挙動を特殊な

界面要素により表現し、3次元イメージベース解析を実践しているが、莫大な解析自由度が必要となることから実際的とは言えない。また大坪ら⁵⁾は、FEMの代わりに有限被覆法（FCM）と呼ばれる新規の解析手法を用いてメッシュフリー解析を試みているものの、多相材料の微視的構造の力学挙動を正確に評価しうるツールの提供には至っていない。著者ら⁶⁾も、特に非均質材料の非線形挙動までを的確に把握できる解析法を模索し、FCMとイメージベースモデリングの親和性を確認している。

FEMでは幾何学的な連続条件が自動的に満たされる変位法に基づく変分原理が主流であり、多相材料の界面は要素境界を配置するだけで解析可能となることから、特に力学的な連続性を意識する必要はない。これに対して、FCMでは物理領域で満足されるべき支配方程式が、物理領域とは独立に定義される数学被覆において満足されることを要求する⁷⁾。特に、多相材料の材料界面などにおける物理的な不連続性は数学被覆内で定義する一方で、幾何学および力学的な連続条件も満足させなければならない。従来のFCMの研究においては、この幾何学的な連続条件のみをpenalty法によって処理しており、力学的連続条件を厳密には満足することができない。また、一般に接触問題等の解法にpenalty法を用いる場合、連立方程式ソルバーである共役勾配法の収束性が極端に悪化し、しばしば収束解が得られないという問題点が指摘されている⁸⁾ことにも注意が必要である。

そこで本研究では、Hybrid 型変分原理⁹⁾に基づく新規の FCM (Hybrid-FCM) を開発し、多相材料の界面破壊の解析に適用する。Hybrid 変分原理では材料界面における幾何学的条件と力学的条件をそれぞれの変数を用いて明確な形で満足させるため、penalty 法と比較してより矛盾のない解析が実現できる。したがって、本手法にイメージベースモデリングを利用する場合でも、問題点として指摘されていた物理界面における応力振動の発生の回避が期待される。また、Hybrid 変分原理により得られる支配方程式を Augmented Lagrangian 法で処理することで Lagrange 未定乗数の導入に伴う収束計算の安定性の向上を図る。このとき、従来の penalty 法を比較対象として、連立方程式の反復解法の収束性についても検討する。さらに、Lagrange 未定乗数は界面における応力ベクトルを与えるため、これを界面の破壊判定に直接用いた非線形解析法への拡張を試みる。

2. FCM とイメージベースモデリング

本節では、有限被覆法⁵⁾ (Finite Cover Method; FCM) がその数学的な基礎を置くマニフォールド法⁷⁾における近似の考え方、およびそれに付随した画像ベースのモデリング手法を概説し、不連続変形の表現法を例示する。

2.1 FCM の概説

(1) 被覆

FEM は、解析対象を要素という部分領域に分割して式を展開し、各々の式をその要素の結合情報から再び全体系の連立代数方程式に組み立て直すという方法論をとる。これに対し FCM は、解析対象の分割と再構築という点では FEM と同様であるが、「近似関数の定義される数学的な部分領域」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域」を分離して考えるという点で FEM とは一線を画する。前者は「数学被覆」と呼ばれ、これを物体領域を余すところなく覆い尽くすよう重ね合わせ、物体領域と数学被覆の重なり合う領域「物理被覆」において剛性方程式を組み立てることになる。

(2) 関数の定義

各数学被覆 i において変位を規定するために次のような 2 つの関数が定義される。

$u_i(x, y)$: 被覆変位関数

$w_i(x, y)$: 重み関数

重み関数としては、数学被覆内ではある値を持ち、物理被覆外では零となるようなものを考える。すなわち、数学被覆を M_i で表す重み関数は次式で示される。

$$\begin{aligned} w_i(x, y) &\geq 0 & (x, y) \in M_i \\ w_i(x, y) &= 0 & (x, y) \notin M_i \end{aligned} \quad (1)$$

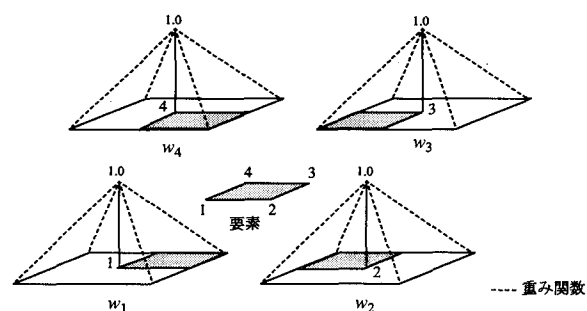


図-1 FCM における重み関数

またこの重み関数は、数学被覆同士の共通領域での総和は 1.0 であるといった制約 (Partition of Unity; PU) が課される。

$$\sum_{x, y \in M_i} w_i(x, y) = 1 \quad (2)$$

本研究ではこの数学被覆の共通領域を要素と呼ぶことにする。

以上のように、被覆変位関数を各被覆において定義し、それらを重み付き和として重ね合わせることで全体変位関数が次のように定義される。

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k w_i(x, y) u_i(x, y) \quad (3)$$

ここで、 k は定義した数学被覆の総数を示す。

FCM では、被覆変位関数 $u_i(x, y)$ 、重み関数 $w_i(x, y)$ を適宜調節することで高次化すること可能である¹⁰⁾が、本研究では標準的な低次の被覆を用いることにする。すなわち、重み関数として図-1 に示す FEM の双一次の形状関数を使用し、被覆変位関数 $u_i(x, y)$ は定数関数とする。

また FCM は、FEM などの連続体解析法と DDA¹¹⁾ に代表される不連続体解析法の両方の特徴を併せ持った一般化解析法として提案されたマニフォールド法の近似性能を継承する。不連続体解析では、不連続を持つ物理領域はについてのみ 2 重に数学被覆を設定し、それぞれに独立な近似関数を定義することにより不連続変形を再現できる。図-2 には、単純な解析例によりその特徴を例示している。

2.2 イメージベースモデリング

通常の Image-Based FEM (IB-FEM) では、ピクセルを正方形の要素に置換するだけで容易に現実的な解析モデルを作成できるというメリットがある一方、物理境界線を階段状に定義してしまい、その角点において特異な応力値を招いていた。これは、物理形状に人為的な角点を避けた解析モデル作成の必要性を意味する。

マニフォールド法の考え方を継承する FCM では、物理境界は線 (面) で定義し、その領域を定形メッシュか

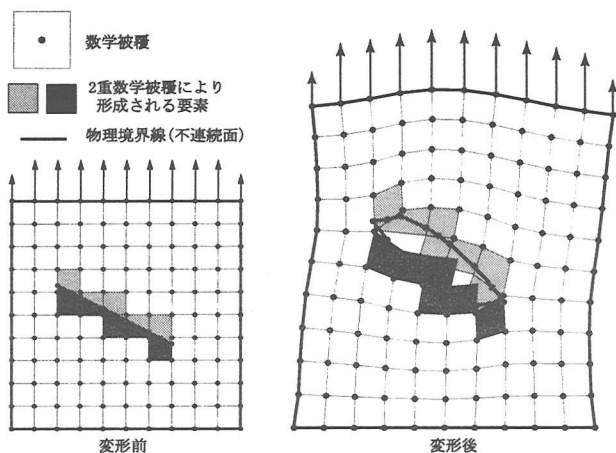


図-2 FCM による不連続体変形の表現

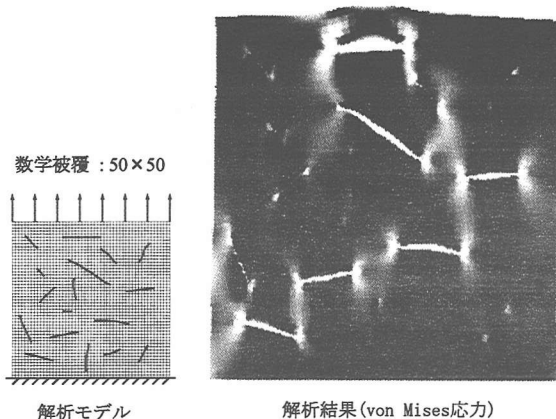


図-4 FCM による不連続体のイメージベース解析例

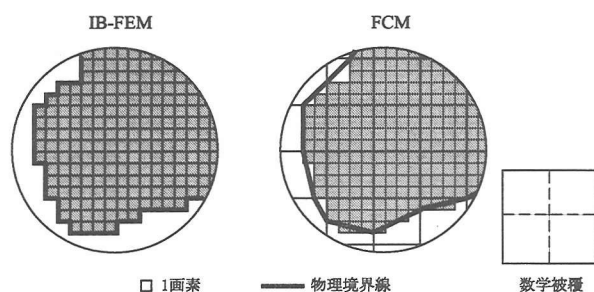


図-3 イメージベース解析における画像情報の利用法の相違

らなる数学被覆で覆うことにより、解析モデルが作成される。イメージベースモデリングでは、物理境界をあくまでも線(面)で近似するためだけに高解像度の画像データを利用し、これとは独立に定形の数学被覆を設定することにより、FCMの特徴を反映した解析モデルが作成できる。このモデリング手法では、IB-FEMにおいて必然的に発生する人為的な垂直な角点を回避でき、通常のFEMメッシュと同レベルの解析モデルが作成される。図-3にはFCMにおける画像データの利用法を示しているが、形状を要素境界(数学の近似領域線)とは異なる線で物理境界を定義するFCM特有のイメージベースモデリング手法により、IB-FEMと同レベルの形状認識を保ちながら解析自由度を格段に減らすことができていることがわかる。

このイメージベースモデリングとFCMの不連続体解析法としての特性を活かすことで、図-4に示すような亀裂性材料の不連続変形解析が可能となる。この結果は、荷重作用方向に対し垂直な方向に伸びる亀裂面ほど開口変位が観測され、またその亀裂先端部において応力が集中していることから、定性的には妥当な結果であるといえる。最近では、FEMにより不連続性を表現するため、特異関数を組み込んだ非適合要素などの開発が盛んに行われており¹²⁾、そのイメージベースモ

デリングとの融合も試みられている⁴⁾。しかし、FCMではそのような複雑な定式化を行うことなく、数学被覆を多重に設定しておくだけで不連続性を表現でき、その表現技法は物理的にも明確に解釈できる。

3. Hybrid-FCM

前節では、FCMにより容易に不連続変位の表現が可能となることを示した。FCMにより多相材料を解析する際には、同様に材料間でのひずみの不連続性の表現性に期待できる反面、数学被覆全体で解析自由度を定義するFCMの特性から、一般的には界面間での変位の連続性を明示的に付加できない。そこで本研究では、Hybrid型の変分原理に基づき界面における変位の連続性を近似的に満足させるHybrid-FCMを提案する。さらに、物理的には表面力を与えるLagrange未定乗数を界面破壊の規準として使用する非線形解法を提示する。

3.1 多相材料問題における支配方程式

(1) 基礎方程式

図-5に示す二相材料の静的つり合い問題を考える。ただし、材料は線形弾性体に限定する。このとき、つり合い式、適合条件式、構成関係式はそれぞれ次式与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\pm} + \bar{\mathbf{f}}^{\pm} &= 0 & \text{in } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}^{\pm} + (\nabla \mathbf{u}^{\pm})^T \right\} & \text{in } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\pm} &= \mathbf{c}^{\pm} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} & \text{in } \Omega^{\pm} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ は、それぞれ変位、(Cauchy)応力、(infinitesimal)ひずみであり、 $\bar{\mathbf{f}}$ は物体力、 $\mathbf{c}$ は弾性テンソルを示している。ここで、 $(\cdot)^{\pm}$ はそれぞれの領域(Ω^{+} あるいは Ω^{-})内で定義される物理量であることを示すことにする。また、次に示す境界条件を満足する必要

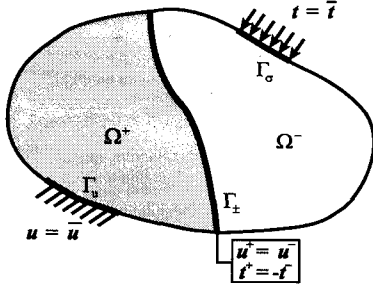


図-5 多相 (二相) 材料の物理問題

がある.

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (5)$$

$$t := \sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (6)$$

ここで, t は単位法線ベクトル n で規定される面における単位面積あたりの表面力を示す.

さらに, 本研究で取り扱う多相材料問題は, 伝達 (Transmission) 問題として扱うことができ, この場合, 材料界面 $\Gamma_\pm$ では次の 2 つの連続条件を満足させる必要がある.

$$u^+ = \bar{u}^- \quad \text{on } \Gamma_\pm \quad (7)$$

$$t^+ = -\bar{t}^- \quad \text{on } \Gamma_\pm \quad (8)$$

(2) 連続条件緩和型変分原理と弱形式のつり合い式

通常の変位法の基礎となる変分原理では, 全ポテンシャルエネルギー Π_P を停留状態として弱形式のつり合い方程式を導く (最小ポテンシャルエネルギー原理). このとき, 全ポテンシャルエネルギー Π_P は次式により与えられる.

$$\Pi_P = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon - \bar{f} \cdot u \, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t} \cdot u \, d\Gamma \quad (9)$$

FCM では数学被覆と物理被覆とは独立に定義され, 物理境界上に FEM における節点自由度のような解析自由度が存在するとは限らないために, 式 (5), (7) の幾何学的境界条件を付帯拘束条件として加わえなければならない.

これらの付帯条件は, Lagrange 未定乗数 λ を導入することで取り除くことができ, エネルギー汎関数

$$\begin{aligned} \Pi_{HP}(u, \lambda) = \Pi_P &- \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_\pm} \lambda \cdot (u^+ - u^-) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

の停留解は次式に示す弱形式のつり合い方程式を与える.

$$\int_{\Omega} \nabla \delta u : (c : \nabla u) \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta u \cdot \lambda \, dt$$

$$\begin{aligned} &- \int_{\Gamma_\pm} \delta u^+ \cdot \lambda \, dt + \int_{\Gamma_\pm} \delta u^- \cdot \lambda \, dt \\ &= \int_{\Omega} \delta u \cdot f \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u \cdot t \, d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma_\pm} \delta \lambda \cdot (u^+ - u^-) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma = 0 \quad (12)$$

ここで, “ δ ” を付加した変数は斉次の境界条件を満たす変分量である.

また, この停留解において Lagrange 未定乗数は界面での表面力という物理的な意味を有し, 次式を満足する.

$$\lambda = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (13)$$

$$\lambda = t^+ = -t^- \quad \text{on } \Gamma_\pm \quad (14)$$

本研究では, FCM により多相材料の静的つり合い問題の解析を目的としているために, 変位の境界条件の処理以外に, 異種材料間での変位の連続条件 (7) を弱形式で与えることにした.

3.2 Hybrid-FCM の定式化

従来の変位法に準ずる FCM では, 変位の境界条件を penalty 法により処理されている. penalty 法では, 式 (10) における Lagrange 未定乗数を penalty 係数 p を用いて.

$$\lambda = \frac{1}{2} p (u - \bar{u}) \quad \text{on } \Gamma_u \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} p (u^+ - u^-) \quad \text{on } \Gamma_\pm \quad (16)$$

と近似し, 変位のみを独立変数としてから離散化した方程式を解くことになる. ただし, 解の係数依存性を回避するために, penalty 係数として無意味に大きな数値を設定することが必要となる. これは, 剛性行列の条件数を悪化させ, 連立方程式の反復解法の収束性を喪失させることがしばしば問題となる¹³⁾¹⁴⁾.

そこで本研究では, 弱形式のつり合い方程式 (11), (12) を基に, 変位 u と Lagrange 未定乗数 λ の両者を独立変数として扱い FCM を定式化する Hybrid-FCM を提案する. すなわち, Hybrid-FCM により多相材料の問題を解くには, 多重に配置した数学被覆の上層で母材の, 下層の数学被覆では介入物の物理問題を記述し, Lagrange 未定乗数により両者の問題を連結をすることになる. この解析の様子を模式的に図-6 に示す. 以下では, 二次元弾性問題を想定して, 補間 (近似) 関数, および離散化方程式を与えることにする.

(1) 補間 (近似) 関数

本研究では, FCM の近似関数である重み関数に FEM の形状関数 N_i を使用し, 被覆変位関数を定数関数 $\bar{u}_i$ を使用することにしたことから, 数学被覆の共通領域と

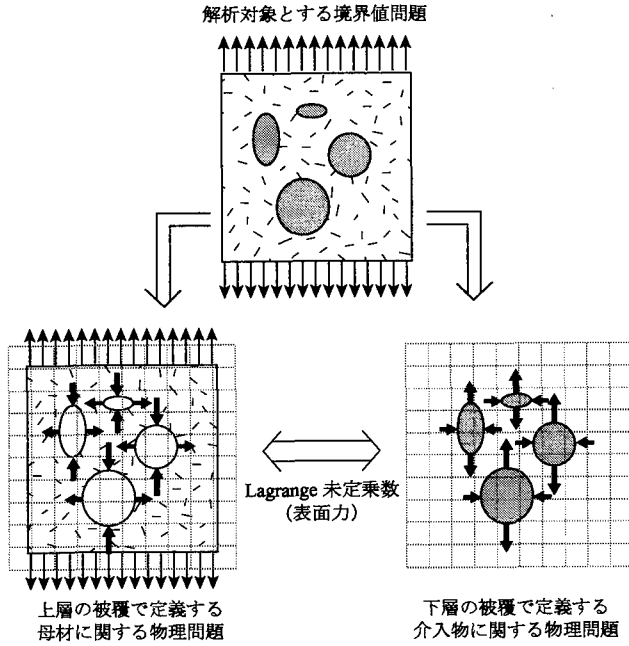


図-6 FCM による複合材料解析の概念図

して定義する各要素 $\Omega_{(e)}$ 内での変位は次式のように近似される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u, v\}^T \\ &\simeq \mathbf{N}\mathbf{U} \quad \text{in } \Omega_{(e)}; \quad (17) \\ \mathbf{U} &= \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{u}_4 & \tilde{v}_4 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、重み関数として FEM における形状関数を採用していることから、被覆変位関数 $\tilde{u}_i$ は数学被覆 i の中央点での変位という物理的な意味を持たせることができる。

また、式 (11), (12) と類似した弱形式を基礎とする FEM における接触解析では、 C^0 連続な変位場に対して、Lagrange 未定乗数には C^{-1} の連続性を課すことがしばしばある¹⁵⁾。本研究では、FCM における変位の補間 (近似) に FEM の形状関数を使用しているため、接触問題と同様にして要素内に含まれる物理境界面において Lagrange 未定乗数は一定の値 (ベクトル) であると近似することにした。

$$\boldsymbol{\lambda} \simeq \boldsymbol{\Lambda} = \{\Lambda^x, \Lambda^y\}^T \quad \text{on } \Gamma_{\pm} \cap \Omega_{(e)} \quad (18)$$

ここで、 Λ^x, Λ^y はそれぞれある要素における Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\Lambda}$ の x, y 方向成分を表す。

(2) 離散化方程式

材料ごとに異なる数学被覆を使用して式 (17) により変位を補間し、Lagrange 未定乗数は式 (18) により近似

したものを弱形式のつり合い方程式 (11), (12) に代入することで、最終的には次式に示す離散化方程式を導く。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 & \mathbf{Q}^+ \\ 0 & \mathbf{K}^- & \mathbf{Q}^- \\ (\mathbf{Q}^+)^T & (\mathbf{Q}^-)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{K}^{\pm} = \int_{\Omega_{\pm}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{Q}^{\pm} = \int_{\Gamma_{\pm}} \mathbf{N}^{\pm T} d\Gamma$$

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}; \quad \partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T$$

ここで、 $\mathbf{C}$ は弾性テンソル $\mathbf{c}$ をマトリックス表記したものである。ただし、図-6 が示しているように、下層の介入物に対する物理問題は界面での不定性があるために、式 (19) に示す係数行列は不正定値行列となっていることに注意が必要である¹⁶⁾。

3.3 Augumented Lagrangian 法の適用

接触問題のように、制約条件付き最小化問題を Lagrange 未定乗数を導入した鞍点型の最適化問題として置き換えて解析する際には、しばしば最適解の収束性が問題となる。Perturbed Lagrangian 法¹⁷⁾ または Augumented Lagrangian 法⁸⁾ などはこの対策法として考案された。本研究では、最も一般的な手法の 1 つである Augumented Lagrangian 法 (ALM) を適用することにした。

ALM の計算過程は、基本的に FEM による接触解法と同様ではあるが、FCM の近似特性から解析自由度を持たない物理境界辺の変位の拘束をすることが要求されるため、アルゴリズムにわずかな変更が必要となる。以下、その変更点を中心に ALM の計算手順を与えることにする。

前述のように、Lagrange 未定乗数はある要素内に含まれる連結辺で一定の値を持つものと近似することにしたが、その $k+1$ 回目の反復過程における近似値 $\boldsymbol{\Lambda}_{<k+1>}$ を次式により与えられるものとする。

$$\boldsymbol{\Lambda}_{<k+1>} \Leftarrow \boldsymbol{\Lambda}_{<k>} + \varepsilon \mathbf{g}_{<k>} \quad \text{on } \Gamma_{\pm} \cap \Omega_{(e)} \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{g}_{<k>}$ は k 回目の反復解過程における連結辺中央点 (x_c, y_c) での相対変位を表すことにし、 ε は一種の penalty 係数であり小さな値が設定される。

FCM では、物理境界線である連結辺上の点は一般には数学解析自由度を持たないことから、相対変位 $\mathbf{g}_{<k>}$ は被覆変位関数 (数学被覆中央点での変位) を用いて次式のように補間近似される。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{<k>} &= \mathbf{u}_{<k>}^+ - \mathbf{u}_{<k>}^- \\ &\simeq \mathbf{M}_{<k>} \mathbf{U}_{<k>}^r \quad \text{at } (x_c, y_c); \quad (21) \\ \mathbf{U}^r &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^+ & | & \mathbf{U}^- \end{Bmatrix}^T \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c^+ & | & -\mathbf{N}_c^- \end{bmatrix} \end{aligned}$$

```

1. Initialization:
   set  $\Lambda_{<0>} \leftarrow 0$ ,
    $k = 0$ 
2. Solve a linerized equation only for  $U_{<k>}$ :
    $(K + K_\epsilon) U_{<k>} = F + Q\Lambda_{<k>}$ 
    $K$  : Stiffness matrix
    $K_\epsilon$  : Penalty matrix
    $F$  : Load vector
3. Check for constraint satisfaction:
   IF  $|g_{<k>}| \leq \text{TOL}$  THEN
     Converge. EXIT.
   ELSE
     Augment:
      $\Lambda_{<k+1>} \leftarrow (\Lambda_{<k>} + \epsilon g_{<k>})$ 
      $k \leftarrow k + 1$ 
     GOTO 2.
   ENDIF

```

図-7 Nested Augumented Lagrangian 法による計算手順

$N_{\Gamma^\pm}$ は連結辺中点 (x_c, y_c) での重み関数 (形状関数) 値を示すものとする。

こうして、図-7 に示す反復ステップを繰り返すことにより、すべての連結辺中点での相対変位 g がゼロになる収束解 (変位 U および Lagrange 未定乗数 Λ) が求められ、この収束解は離散化方程式 (19) を満足する解となる。ここで、図-7 中に示す K_ϵ は penalty 行列であり、次式により与えられるものである。

$$K_\epsilon = \epsilon \int_{\Gamma^\pm} N^T N d\Gamma \quad (22)$$

3.4 界面破壊解析

Lagrange 未定乗数が物理的には表面力を表していることを利用し、界面破壊を考慮した増分型非線形解析を提示する。ただし、変形は微小と仮定し、材料非線形性は考慮しないものとする。また、非線形解析手法としては割線剛性法を利用した。

本研究では、ある要素において表面力の垂直方向成分がある一定の限界値に達したとき、被覆内にある界面全体に界面破壊が起こるものと仮定する。ある連結辺を含む界面要素における表面力の垂直方向成分は、引張り方向を正として次式により与えられる。

$$\Lambda_n = \Lambda^T \mathbf{n} \quad (23)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は連結面に対する単位外向き法線ベクトルである。破壊後の界面では、Lagrange 未定乗数による拘束を取り除くことで、FCM の特徴より不連続変位は自動的に表現できる。ただし、界面破壊時に発生する解放力は考えない。

本論文で提案する Hybrid-FCM による破壊解析法は、RBSM¹⁸⁾から派生した竹内らのハイブリット型ペナルティ法 (HPM)¹⁹⁾²⁰⁾と同様に、Hybrid 型の変分原理に基礎とした解析手法である。HPM では、数学的の近似単位である要素間すべてにおいて、連続性の拘束条件を付加するために Lagrange 未定乗数を利用しているのに対して、本手法では異種材料の界面における変位の連続条件に対してのみ、この拘束を与えている点で異なる。すなわち、Hybrid-FCM は同一の材料内では数学被覆間での変位の連続性が保証され、変位法に基づく FEM などの連続体解析手法としての特徴を併せ持つ。

4. 予備検討

本節では、界面処理法についての計算時間、解析精度について ALM と penalty 法を用いた場合の比較を行い、ALM による界面処理の有効性を示す。本研究では、複雑な微視構造を有する多相材料の問題の解析手法として、イメージベースモデリングの使用を前提とする。このため、連立方程式の解法において解析自由度がクリティカルとなることが予想されるため、対角項スケーリング前処理をした共役勾配法 (以下 CG と省略) を使用することにした。

4.1 解析条件

解析対象としては、図-8 に示すような1つ円形の介入物が含まれてるものを考える。この介入物の弾性定数 E_i は母材の弾性定数 E_m に対して10倍であると仮定する。penalty 法は、ALM における penalty 係数を母材の弾性定数 E_m の $p = 1.0 \times 10^5$ 倍とし、ALM の反復を行わず1回のみ連立方程式を解いた結果を penalty 法の解として参照する。また ALM では、penalty 定数 ϵ を変化させたときの収束特性について検証する。この際の ALM における許容誤差としては、penalty 法における相対変位誤差を参考に設定した。

4.2 解析結果

図-9 は、penalty 法と ALM による解析から得られた変形図と von-Mises 応力分布を比較するものである。ALM の結果は、penalty 係数は母材の弾性定数 E_m と同じ値 (1.0) を用いた結果を示している。penalty 法を用いた場合には、CG ソルバーは解析自由度 (約 800dofs) の反復を超えても収束しなかったことから、解析自由度の3倍 (約 2400 回) で反復を打ち切りその結果を暫定解として示している。この penalty 法を用いた解析結果では、材料境界を持つ母材側での要素において低い応力値を持つ層が観測され、逆に介入物側では極端に高い応力値が存在している。そして、von-Mises 応力の最大値は、ALM を用いたときの最大値の3倍以上の

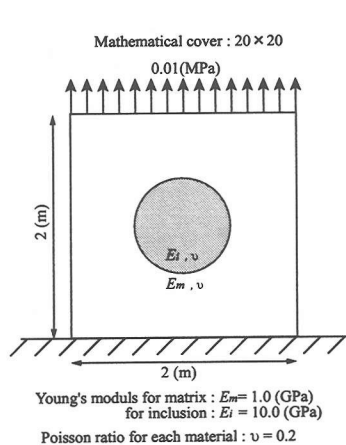


図-8 解析モデル (円形介入物)

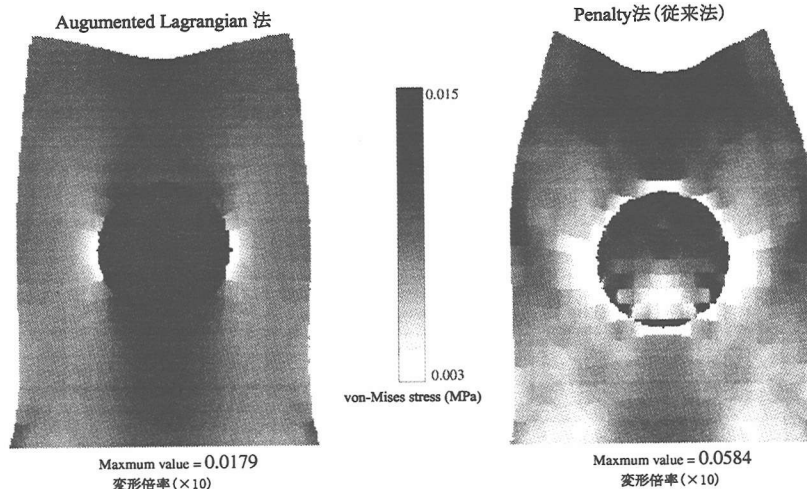


図-9 解析結果の比較

もの値であることが確認される。penalty 法による応力が振動し特異な応力値を持つことは、IB-FEM と同様の傾向であることから計算誤差を含んでいることが明らかである。これに対し、ALM による結果は滑らかな応力分布が再現され、界面処理法としての精度の良さが定性的に示されている。

次に、ALM における penalty 係数に対する収束特性について検討する。ここで、全界面要素の境界辺中点における相対変位 g の最大成分を誤差とし、単位は (mm) で表すことにする。そして反復解法における許容誤差として、penalty 法 ($p = 1.0 \times 10^5$) における最大相対変位 0.0014(mm) を設定した。まず、ALM において異なる 3 つの penalty 係数 $\varepsilon = \{1.0, 0.1, 0.01\}$ (GPa) を用いた際の ALM の収束状況を図-10 に示す。図-10 に示す傾向より、penalty 係数に大きな値ほど良い収束傾向があることがわかる。しかし、あまり大きな値を設定すると penalty 法と等価となり、先に示したような非現実的な応力分布をあたえるため注意が必要である。

最後に、表-1 には各ケースにおける連立方程式ソルバーの平均反復回数と全反復回数 (ALM の反復回数 $\times$ CG の平均反復回数) を示す。ここで、表-1 中の (A) は ALM の反復の際の CG ソルバーの初期値を毎回ゼロにクリアしたときの反復回数を示し、(B) は 2 回目以降の ALM の反復過程において、前ステップの解を CG の初期値とした時の結果を示している。(A)、(B) 両者の比較から、ALM の反復では前ステップの解が次のステップの良質な初期解として利用でき、全体での反復回数 (ALM の反復回数 $\times$ CG の平均反復回数) で見ても解析自由度 (約 800dofs) 以下にまで減らすことが可能になっている。

4.3 結果の考察

以上の解析結果より、penalty 法 (界面処理)+CG (連立方程式の解法) の組み合わせで生じた CG の収束率の

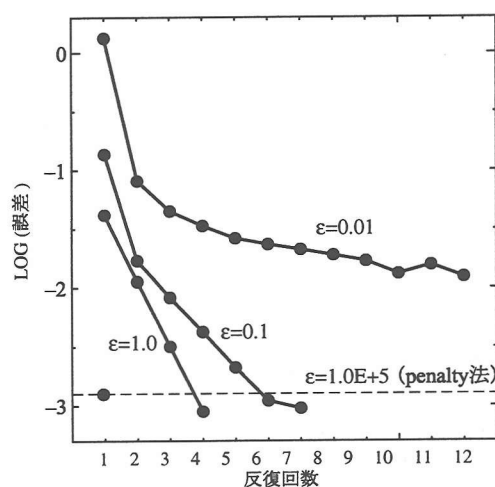


図-10 Augumented Lagrangian 法の収束特性

悪さを解消でき計算効率までも向上し、さらにイメージベース解析で問題とされてきた応力の振動がかなり回避された。以下には、特に解析結果における応力振動の軽減についての要因について考察する。

本来、多相材料の問題を伝達問題として考えたとき、変位の連続条件だけでなく、表面力の連続条件を満足させることまでが要求される。Hybrid-FCM の基礎を

表-1 共役勾配法における反復回数

	penalty 法	$\varepsilon = 1.0$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$
平均 (A)	(2400)	560	226	107
TOTAL(A)	(2400)	2243	1584	収束せず
平均 (B)	-	169	46	-
TOTAL(B)	-	678	371	-

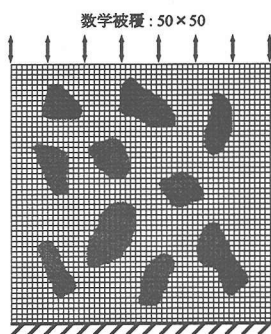


図-11 解析モデル(複合材料)

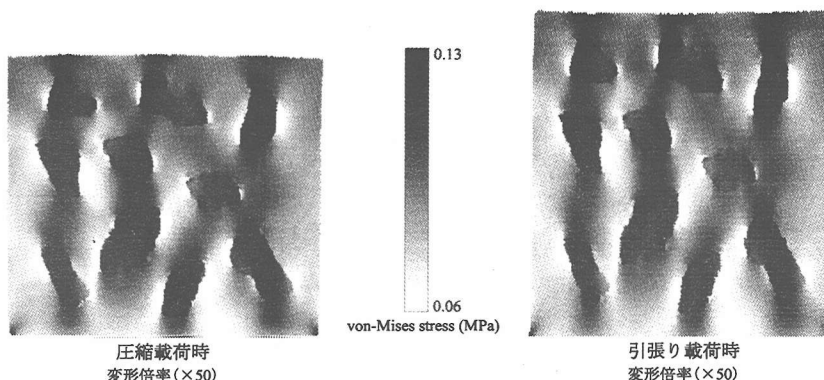


図-12 線形応力解析結果

成す連続条件緩和型の変分原理では、変位の連続性は Lagrange 未定乗数を用いた弱形式で満足させている。Hybrid-FCM は、Lagrange 未定乗数が表面力という物理的な意味を有していることを利用し、幾何学的な拘束を弱めることで、逆に表面力の連続条件を近似的に満足させることを試みたものである。つまり、Lagrange 未定乗数(界面での表面力)を変位場と無関係な独立変量とし、それぞれの独立な空間から未知変量を近似していることで、表面力の連続性を近似的に満足させることをできている。このため、若干の幾何学的な非適合性を与えるものの、イメージベース解析で問題となる応力振動がかなり軽減されたものと考えられる。しかしながら、penalty 法では連立方程式の解法である CG の収束性が悪く暫定的な結果を示しているため、今後の課題として、直接法により求められる penalty 法の解と Hybrid-FCM とを比較する必要がある。

5. 界面破壊の解析への適用

本研究で提案した Hybrid-FCM により、図-11 に示すコンクリート断面の平面解析モデルに対して界面破壊を考慮した非線形解析を行う。この際、コンクリート材料を 2 相材料として仮定し、母材(モルタル)、介入物(粗骨材)の弾性定数をそれぞれ $E_m = 20(\text{GPa})$, $E_a = 60(\text{GPa})$ と設定した。また、ポアソン比は両者ともに 0.2 とした。

5.1 線形解析結果

界面破壊の非線形解析結果を示す前に、イメージベースモデリングを適用して生成した図-12 に示す解析モデルに対して、圧縮方向および引張り方向の 2 方向に等分布荷重を作用させた場合の線形解析を行う。この解析結果として von-Mises 応力分布を図-12 に示す。

図-12 から、圧縮、引張り荷重時ともに、骨材に高い応力値が観測され、骨材周辺のモルタル部においても比較的高い応力値を持つことがわかる。これは、骨

材はモルタルに比べ弾性定数の高いことから、骨材を結ぶモルタル部に応力が集中するという経験的な推察と一致し、定性的には妥当な結果が求められているといえる。

FCM を解析ツールとして使用することで、このような複雑な形状を持つ多相材料においても定形のメッシュ(数学被覆)で解析でき、さらにイメージベース解析の問題点とされてきた材料界面での応力振動が発生せず滑らかな応力分布を表現できている。

5.2 界面破壊非線形解析結果

次に、界面破壊を考慮した非線形解析結果を示す。図-13 には、荷重変位関係を与えるとともに破壊した界面要素の累積数をヒストグラムで表している。この図より、引張り荷重時には、圧縮荷重時と比較し 10 倍程度の界面要素が破壊していることが確認でき、非線形性が顕著に表れている。また、圧縮時にも界面要素の破壊は確認されるものの、その挙動はある程度の線形性を保っている。

この荷重方向による非線形性の相違の原因を調べるため、図-13 における A, B の 2 点における応力分布を図-14 に示す。圧縮荷重時における界面破壊後の応力分布は線形解析結果と同様の分布を示しているのに対し、引張り荷重時にはかなり異なる応力分布を示している。この引張り荷重時における界面後の応力分布を見てみると、骨材の上下端の界面で破壊を起こし骨材には応力があまり伝わっていないことがわかる。このため、破壊前に主に応力伝達していた経路が遮断され、その応力伝達経路が限定されることにより複合構造としての耐力機構が薄れ、構造全体としての非線形性を大きく与えるものと考えられる。逆に、圧縮荷重時には、破壊前から力の伝達の少ない骨材の左右の側面でのみ界面破壊が発生し、全体としての応力伝達経路に変更がなく、絶えず線形挙動を示すものであると解釈できる。

ここでの解析では、幾何学的および材料非線形性を

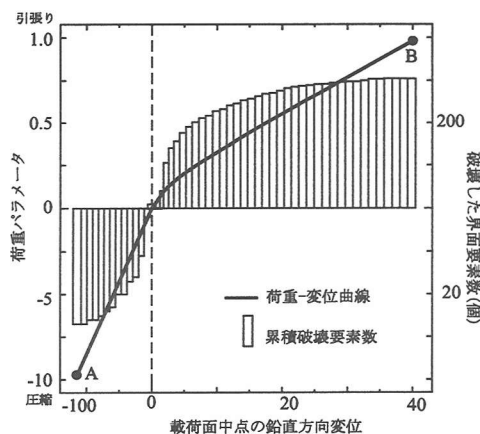


図-13 荷重-変位関係図

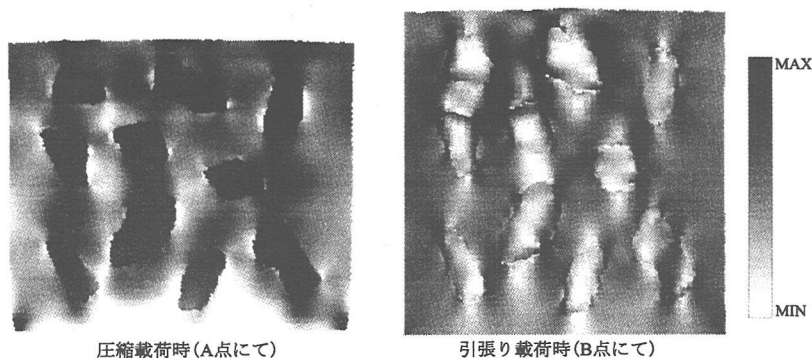


図-14 界面破壊後の応力分布

考慮せず、界面破壊現象のみを再現しただけであるにも関わらず、圧縮に対して強く、引張りに弱いというコンクリート材料の典型的な非線形特性を定性的には表現できているといえる。

6. おわりに

本研究では、FCMの数学被覆内で定義される物理的な不連続面上で幾何学および力学的な連続条件の双方を満足させるためにHybrid型変分原理を用いたHybrid-FCMを提案した。簡単な数値解析例では、多相材料解析の界面破壊現象をある程度正確に再現でき、定性的な検討ではあるが本手法の有効性を示すことができた。以下、開発した手法の特徴ならびに、今後の検討課題を整理する。

FCMにより多相材料問題を解析するには、材料ごとに異なる数学被覆で物理問題を定義することから、ひずみなどの物理的な不連続性を自然と表現できる。そしてHybrid-FCMでは、その異なる被覆内に定義される不連続性をLagrange未定乗数で結びつけて解析することで、伝達(Transmission)問題として扱う際の異種材料界面における幾何学および力学的境界条件の両者を満足でき、応力分布までを含めた解の高精度化につなげることができた。

また、Hybrid-FCMにおけるLagrange未定乗数が物理的には表面力を示すことを利用して、コンクリート材料のメゾ構造の界面破壊を考慮した非線形解析を行い、本手法の有効性を確認した。ここでの非線形性は界面破壊後の不連続性の発生のみから捉えるが、Lagrange未定乗数を用いたことにより、単純なアルゴリズムが提示できた。さらに、ここで提示した非線形解法は、Augmented Lagrangian法と共役勾配法などの反復解法とを組み合わせた解法との相性がよく、しばしば界面処理法として使用されてきたpenalty法と比較して計算コストの低減できることを示した。

しかし実際は、例示したような界面破壊だけでは材

料の終局的な破壊まで再現することはできず、界面破壊から誘発されるモルタル部へのクラックの進展を表現する必要がある。より実際の力学挙動の評価を行うためには、これを実現できる解析アルゴリズムを開発する必要がある。また、提案したHybrid-FCMの精度についての検討は、定性的な議論に終始したため、FE解析の結果との比較を通して定量的な誤差評価も行う必要があろう。

参考文献

- 1) Terada, K. and Kikuchi, N. : Microstructural design of composites using the homogenization method, *Materials Sci. Res. Int.*, Vol.2, No.2, pp. 65-72, 1996.
- 2) Hollister, S.J. and Kikuchi, N. : Homogenization theory and digital imaging: a basis for the mechanics and design principles of bone tissue, *Biohech. Bioenirng.*, Vol. 32, No. 1, pp. 27-62, 1994.
- 3) Terada, K., Miura, T. and Kikuchi, N. : Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Comput. Mech.*, Vol. 20, pp. 331-346, 1997.
- 4) 永井学志, 山田貴博, 和田章 : 微視構造の引張破壊を考慮したコンクリート材料の巨視的圧縮挙動の数値解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 2, pp. 729-732, 1999.
- 5) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉 : 被覆単位で精度をコントロールするマニフォールド法(FCM), 計算力学講演会論文集, Vol.2, pp. 399-402, 1997.
- 6) 浅井光輝, 寺田賢二郎, 加藤和弘 : イメージベース有限被覆法の開発とその性能評価, 第50回理論応用力学講演会論文集, pp. 159-160, 2001.
- 7) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Repot No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
- 8) Simo, J.C. and Laursen, T.A. : An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. Struct.*, Vol. 42, No. 1, pp. 97-116, 1992.
- 9) 鷺津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, 培風館
- 10) 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, 関勝哉, 金伝栄, 中西克嘉 : ボクセル被覆による3次元ソリッドのメッシュレス解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp. 215-222, 1998.
- 11) Shi, G.H. and Goodman, R.E. : Generalozation of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Ge-*

- omech., Vol.13, pp. 359-380, 1989.
- 12) Simo, J.C., Oliver, J. and Armero, F. : An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, *Comput. Mech.*, Vol. 12, pp. 277-296, 1993.
 - 13) Peric, D. and Owen, D.R.J. : Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method, *Int. J. Num. Mech. Engng.*, Vol.35, pp. 1289-1309, 1992.
 - 14) 奥田洋司, 坂本涼 : FEM-EFGM ハイブリット解析, 計算工学会論文集, Vol. 2, No. 29, pp. 227-232, 2000.
 - 15) Belyschko, T., Liu, W.K. and Moran, B. : *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, JOHN WILEY & SONS, LTD.
 - 16) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : *The Finite Element Method*, Volume1, Butterworth-Heinemann
 - 17) Simo, J.C., Wriggers, P. and Taylor, R.L. : A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problem, *Compt. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 51, pp. 163-180, 1985.
 - 18) Kawai, T. : New element methods in discrete structural analysis, *J. of the Society of Naval Architects of Japan*, Vol.141, pp. 187-193, 1977.
 - 19) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦 : ペナルティを用いたハイブリット型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol. 46A, pp. 261-270, 2000.
 - 20) 竹内則雄, 大木裕介, 上林厚志, 草深守人 : ハイブリット型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学論文集, Vol. 3, No.2001002, pp. 53-62, 2001.

(2001 年 4 月 20 日受付)