

重合メッシュ法を用いた板曲げ問題の解析に関する一考察

A study on plate bending analysis using overlaying mesh method

中住 昭吾^{*}, 鈴木 克幸^{**}, 藤井 大地^{***}, 大坪 英臣^{****}
 Shogo NAKASUMI, Katsuyuki SUZUKI, Daiji FUJII and Hideomi OHTSUBO

^{*}東京大学大学院生 環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

^{**}正会員 Ph.D. 東京大学助教授 新領域創成科学研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

^{***}博士(工学) 東京大学助手 工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

^{****}工博 東京大学教授 工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

In this paper, the plate bending analysis using overlaying mesh method is presented. In general, when the plate bending problem is analyzed based on the Mindlin-Reissner theory, the reduced integration method is used to prevent the shear locking phenomenon. However, in the overlaying mesh method, the effectiveness of the reduced integration is lost because the integration points are increased by the overlaying local mesh. Therefore, the shear locking phenomenon cannot be prevented by using the regular reduced integration method when the overlaying mesh method is used. The object of this paper is to propose the effective method to solve this problem. In the present method, the interaction stiffness for shear is neglected. However, the interaction of the shear stiffness between the global model and the local model does not lose, because the influence of the shear stiffness is transmitted each other through the pure bending stiffness. Some examples are shown to demonstrate the effectiveness of the present method.

Key Words : overlaying mesh method, Mindlin-Reissner plate, shear locking, reduced integration, plate bending problem

1. 緒 論

重合メッシュ法は, Fish らによって提案された手法である¹⁾。この方法は, アダプティブ h 法, p 法及びそれらの結合である hp 法を発展させた s 法として位置づけられ, 現在も精力的に研究が行われている。この方法は, 大局的な挙動を表現するグローバルメッシュの中の応力勾配が大きい部分に, 詳細な挙動を表現することのできるローカルメッシュを重ね合わせて解析する方法であり, この方法の特徴は, 両メッシュ間で節点・境界が一致する必要がないため, モデリングが非常に柔軟に行える点にある。Fish らはこの手法を積層された複合材料の解析に利用している。

我が国においても, 重合メッシュ法は, モデリングの容易さから, 設計・解析の現場での実用化が望まれている。そこで, 著者らは, Fish らの提案した重合メッシュ法を有限要素法にもとづく構造解析プログラムに実装することを試みている²⁾。

ところで, 船舶・航空機, 自動車等の設計では, 通常, モデル全体をシェル要素を用いてモデリングする場合が多い。このシェル要素を平板板曲げ要素として使う場合, 現在では Mindlin-Reissner 理論に基づくシェル要素が一般によく用いられ

ている。この要素は, よく知られているように, 板厚が薄くなった場合に剛性が高くなるシアロックンク (shear-locking) と呼ばれる現象を生じる。この問題を解決する方法として, 選択低減積分法が一般によく用いられている。

このような板曲げ要素の有限要素解析に重合メッシュ法を適用する場合, 選択低減積分を行っているのにもかかわらず, メッシュを重ねた部分でシアロックンクが生じてしまう。この原因を究明したところ, グローバルメッシュ, ローカルメッシュそれぞれで選択低減積分を行っても, メッシュが重なる部分ではせん断剛性に関する積分点数が増加することになり, 結果的に低減積分の効果が失われてしまうことが判明した。

そこで, 本論文では, このような問題を解決するため, グローバルメッシュとローカルメッシュの相互の剛性の連成項におけるせん断剛性成分を 0 にすることで, 選択低減積分の効果を復活させ, 重合メッシュ部分のシアロックンクを防ぐことができることを示す。また, せん断剛性に関する連成項を無視したことによる影響についても検討し, この項を無視

しても、薄板から厚板まで精度の良い解が得られることを検証する。

以下、本論文第2章では、重合メッシュ法の理論を概説し、板曲げ要素を用いた場合の基礎方程式を導出する。第3章では、重合メッシュ法による板曲げ解析におけるシアーロッキング現象について考察を加え、シアーロッキングを回避する方法を示す。第4章では、解析例により、本論文で提案する手法の有効性を示す。第5章では、以上の結論を述べる。

2. 重合メッシュ法の基礎理論

2.1 重合メッシュ法の基本方程式

本節では重合メッシュ法における各物理量に対する仮定から、離散化された釣り合い方程式を導くまでの過程を示す。

図-1は全体領域 Ω と、その部分領域として定義される領域 $\Omega^L \subset \Omega$ を表したものである。全体領域 Ω の境界を Γ とする。この Γ は幾何学的境界条件の課される境界 Γ^u と力学的境界条件の課される境界 Γ^t の和集合となっている。また、領域 Ω と領域 Ω^L の境界を Γ^{GL} とする。

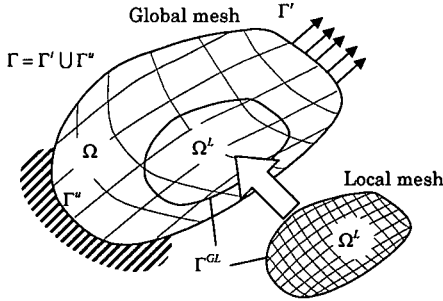


図-1 グローバルメッシュとローカルメッシュの重ね合わせ

以下では、各ベクトル、マトリクスの右上添字のG, Lはそれぞれ全体領域 Ω をあらわすグローバルモデル、領域 Ω^L をあらわすローカルモデルに関する量であることを意味するものとする。まず、領域 Ω 内、領域 Ω^L 内ではそれぞれ独立の変位場 $\mathbf{u}^G$, $\mathbf{u}^L$ が定義されており、領域 Ω^L 内では、実際の変位は両モデルの変位の和で定義されるものとする。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L \quad \text{in } \Omega^L \quad (1)$$

また、境界 Γ^{GL} 上で変位の C^0 連続性を保証するため、次式のような条件を課す。

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (2)$$

(1)式を偏微分することで、ひずみも両モデルのひずみの和で表される。すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{S}(\mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L) \\ &= \mathbf{S}\mathbf{u}^G + \mathbf{S}\mathbf{u}^L \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad \text{in } \Omega^L \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで $\mathbf{S}$ は、たとえば2次元では

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

で表される微分作用素である。

領域 Ω , Ω^L を有限要素に分割すると、変位場・ひずみ場は適当な形状関数を用いて離散化され、

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{N}^G \mathbf{d}^G \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{N}^L \mathbf{d}^L \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \mathbf{B}^G \mathbf{d}^G \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^L \mathbf{d}^L \quad (8)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{N}^G$, $\mathbf{N}^L$ は C^0 連続な形状関数マトリクス、 $\mathbf{d}^G$, $\mathbf{d}^L$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{B}^G$, $\mathbf{B}^L$ は変位・ひずみマトリクスである。なお、この場合グローバルメッシュ・ローカルメッシュ間で節点が一致する必要はない。

以上の仮定を仮想仕事の原理に代入し、離散化された釣り合い方程式を導く。このとき、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ 、仮想ひずみ $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ もグローバル・ローカル両モデルの重ね合わせで表現されるので、

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^G + \delta \mathbf{u}^L \quad (9)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^G + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad (10)$$

となる。モデルを線形弾性体と仮定すると、仮想仕事の原理は

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (11)$$

となる。ここで、 $\mathbf{D}$ は弾性マトリクス、 $\mathbf{b}$ は体積力ベクトル、 $\mathbf{t}$ は表面力ベクトルである。

(1)式~(10)式を(11)式に代入すると、仮想変位の任意性から、以下の離散化した釣り合い方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GL^T} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{f}^G = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \mathbf{N}^{G^T} \mathbf{t} d\Gamma \quad (16)$$

$$\mathbf{f}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^t} \mathbf{N}^{L^T} \mathbf{t} d\Gamma \quad (17)$$

である。 $\mathbf{K}^G$, $\mathbf{K}^L$ はそれぞれ、グローバルメッシュ、ローカルメッシュ上で定義される通常の剛性マトリクスである。

Mindlin-Reissner 理論に基づく板曲げ要素を用いる場合、 $\mathbf{K}^G$ 、 $\mathbf{K}^L$ は具体的には次式のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^G &= \mathbf{K}_b^G + \mathbf{K}_s^G \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^{GT} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b^G d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^{GT} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^G d\Omega\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^L &= \mathbf{K}_b^L + \mathbf{K}_s^L \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^{LT} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b^L d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^{LT} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^L d\Omega\end{aligned}\quad (19)$$

ここで、右下の添字 b は曲げ変形に関する成分を、s はせん断変形に関する成分であることを示す。また、法線方向に解析的に積分することにより、応力-ひずみ関係マトリクスは

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\quad (20)$$

$$\mathbf{D}_s = \kappa h G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (21)$$

となる。ただし、 E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 ν は Poisson 比、 h は板厚である。また、 κ は面外せん断力を板厚方向に一定と仮定したことを補正する係数で、Reissner によれば $\kappa = 5/6$ 、Mindlin によれば $\kappa = \pi^2/12$ である。次に、板曲げ要素の節点変位ベクトルを

$$\mathbf{d}^G = (\mathbf{w}^G, \theta_x^G, \theta_y^G)^T\quad (22)$$

$$\mathbf{d}^L = (\mathbf{w}^L, \theta_x^L, \theta_y^L)^T\quad (23)$$

と定義する。ただし、 $\mathbf{w}, \theta_x, \theta_y$ は板要素の座標系に対する、それぞれ z 方向節点変位ベクトル、 x 軸、 y 軸回りの節点回転角ベクトル（右ねじに従う）である（図-2 参照）。

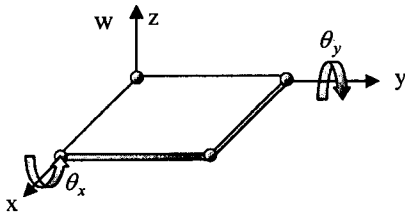


図-2 板要素の座標系と変位

これにより、ひずみ-変位関係マトリクスは次式のようになる。

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}\quad (24)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} & -N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & N \end{bmatrix}\quad (25)$$

2.2 両モデルの連成効果をあらわすマトリクスの計算方法

これに対して、 $\mathbf{K}^{GL}$ はグローバル・ローカル両メッシュ間の連成効果を表すマトリクスであり、このマトリクスの計算に関しては特殊な操作が必要となる。この $\mathbf{K}^{GL}$ の積分計算はローカルメッシュ上で定義される要素（これを以後ローカル要素と表記する）単位で行う。すなわち、ローカル要素の領域を正規化した自然座標系に写像し、Gauss 積分等の数値積分を行って計算する。具体的には(26)式で計算される。

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{GL} &= \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\ &= \sum_j \sum_i \mathbf{B}^{GT}(\xi_i^G, \eta_j^G) \mathbf{D} \mathbf{B}^L(\xi_i^L, \eta_j^L) |\mathbf{J}| w_i w_j\end{aligned}\quad (26)$$

ただし w_i, w_j は数値積分の重みであり、 $|\mathbf{J}|$ は x - y 座標系と ξ^L - η^L 座標系とを関係づけるマトリクス (Jacobian) である。また、 z 方向の積分を解析的に行っている。

ここで注意すべきことは、積分点の座標値はこのローカル要素の自然座標系での値 (ξ_i^L, η_j^L) で指定されるため、 $\mathbf{B}^L$ を計算する場合にはそのまま代入すればよいが、 $\mathbf{B}^G$ の計算に際しては、この積分点の座標値をそのまま代入することはできないということである。まず (ξ_i^L, η_j^L) を一度物理座標系での座標値 (x_i, y_j) に変換し、それを今度は、その点を含むグローバルメッシュ上の要素（これを以後グローバル要素と表記する）内の自然座標系での座標値 (ξ_i^G, η_j^G) に変換し、その値を用いて $\mathbf{B}^G$ を計算する必要がある。後者の変換は、一般に陽な形で表すことができないため、反復計算を行って求める。

特に板曲げ要素の場合は座標変換に注意が必要である。一般に曲げ変形を扱う要素では、 $\mathbf{B}$ マトリクスの計算に際し物理座標系として全体座標系 $o-xyz$ ではなく、その要素固有の局所座標系 $o-x'y'z'$ を使用する。同様にしてローカル要素の $\mathbf{B}^L$ も物理座標系としてローカル要素の局所座標系 $o-x^L y^L z^L$ を用いる。積分点の座標値 (ξ_i^L, η_j^L) が上述の変換により、 $o-x^L y^L z^L$ での座標値になるため、 $\mathbf{B}^G$ も物理座標系として $o-x^L y^L z^L$ を用いなければならない。このようにして求めた $\mathbf{B}^G$ を用いて、 $\mathbf{K}^{GL}$ は次式のように計算される。

$$\mathbf{K}^{GL} = \mathbf{L}^T \left(\int_{\Omega^L} \mathbf{B}_b^{GT} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b^L d\Omega + \int_{\Omega^L} \mathbf{B}_s^{GT} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^L d\Omega \right) \mathbf{L}\quad (27)$$

ただし、 $\mathbf{L}$ はローカル要素の座標変換マトリクスである。

3. 重合メッシュ法に Mindlin 板曲げ要素を用いる場合の問題点

3.1 セン断剛性の過剰な評価

Mindlin-Reissner 理論に基づく板曲げ要素は、たわみと断面回転角に同じ形状関数を内挿する要素である。このため適合条件を満足することが容易であるという利点を有する。しかしながら板厚が薄くなると、たわみがほとんど0になる「ロッキング」という現象を引き起こす。これはせん断剛性に関する積分を厳密に行うと、剛性を過剰に評価してしまうからであるが、それはたわみと断面回転角を同じ次数の形状関数で内挿していることに起因する^{3,9)}。このロッキングを回避するため、積分を1点で実行する低減積分 (Reduced Integration)、あるいはせん断剛性に関する項のみ1点で積分する選択低減積分 (Selective Reduced Integration) という操作が一般に行われる。しかしながらこれらの方法では、せん断ひずみエネルギーに寄与しないゼロエネルギーモードを生じるという欠点がある。これに対して Kanok-Nukuchai らが提案した要素は、このゼロエネルギーモードを抑えることができる⁷⁾。これはせん断力 Q_x と Q_y に関する面外ひずみの項をそれぞれ 1×2 点と 2×1 点で積分し、それ以外の項は 2×2 点積分するという方法である (図-3 参照)。

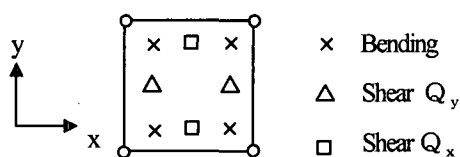


図-3 Kanok-Nukuchai らの提案した要素の積分点

ところで、重合メッシュ法は、一般的にはグローバルモデルの応力勾配の大きい部分に、詳細に切ったローカルメッシュを重ね合わせて解析するという使い方をする。そのような場合ローカル要素はグローバル要素に対して小さく設定されるので、1つのグローバル要素にローカル要素が複数重ね合わされることになる (図-4 参照)。

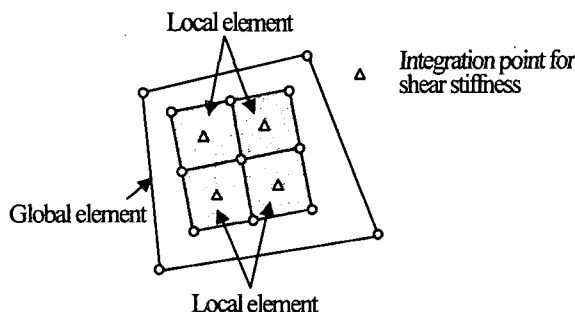


図-4 1つのグローバル要素に複数のローカル要素が重なる場合

重合メッシュ法に Mindlin 板曲げ要素を用いる場合、 K^G 、 K^L の作成には低減積分を行うことができる。しかし、連成項である K^{GL} の計算では、各ローカル要素内でせん断剛性を1点で積分したとしても、それらのローカル要素と重ね合わされるグローバル要素から見ると、それ以外のローカル要素内で実

行される積分も付加されてしまい、結果的にせん断剛性に関して、多点で積分が実行されることになる。そのため、せん断ひずみに関する積分が厳密に行われ、ロッキングを生じる。

3.2 セン断剛性の積分の偏り

ローカル要素とグローバル要素が図-5のような位置関係にあるものとする。連成効果をあらわす項 K^{GL} の積分計算は、(26)式の通り、ローカル要素単位で行う。しかし、本来この積分を厳密に行うためには、積分領域を、重なるグローバル要素ごとに分割し、その分割された領域ごとに別々に積分する必要がある。しかしながら、この方法で計算するためにはアルゴリズムが複雑になるという問題が生じる。そこで Fish らは、積分領域をローカル要素内で分割しなくても、ローカル要素全体に対して通常のガウス積分を適用する方法を提案している。これは K^{GL} を計算する近似的な方法であるが、厳密に計算した場合と、エネルギーノルムで比較した場合には、あまり精度は変わらないと報告している²⁾。

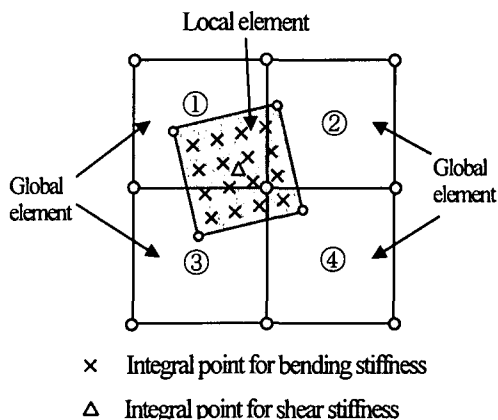


図-5 1つのローカル要素が複数のグローバル要素に重なる場合

ローカル要素全体を一つの積分領域と見て近似的に積分を行う場合、曲げに関する積分であれば積分点の数を増やすことで計算精度を向上させることが可能である。ところが、せん断剛性に関する積分は、前述の 3.1 の議論より、積分点の数を増やすと積分を厳密に行ってしまうことになるため、積分点の数を増やすことはできない。するとローカル要素とグローバル要素の位置関係によっては、積分計算に寄与しないグローバル要素が発生する。たとえば図-5では、せん断剛性を1点で積分すると、このローカル要素とせん断剛性成分に関して連成効果を持つのは①のグローバル要素だけである。このような方法では K^{GL} を正確に計算したことにならず、連成効果に偏りが生じてしまう。ローカル要素がグローバル要素に対して十分小さい場合には、この偏りは相殺されて影響がなくなると考えられるが、ローカル要素がグローバル要素に対して同程度、あるいは数分の1の大きさであれば解の精度が低下し、場合によっては、明らかに不自然な解が出されることも考えられる。

3.3 セン断剛性に関する連成効果が失われることの影響

以上で述べたような理由から、連成効果をあらわす K^{GL} 項を計算する場合、せん断ひずみに関する積分を適切に行うことは困難である。そこでこの問題を回避する簡便な方法として、このマトリクスの計算に際しては、せん断剛性に関する積分を省略する方法を提案する。このような近似を行った場合、どのような影響が生じるのかを考えてみることにする。簡単のためこの場合の1次元問題に相当する Timoshenko 梁で考えてみる。この梁のひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{EI}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{\kappa GA}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 dx \quad (28)$$

で表される。ただし E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 κ は面外せん断力補正係数、 I は断面2次モーメントである。変位の重ね合わせの仮定より、

$$\theta = \theta^G + \theta^L \quad (29)$$

$$w = w^G + w^L \quad (30)$$

を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} U = & \frac{EI}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta^G}{\partial x} + \frac{\partial \theta^L}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + \frac{\kappa GA}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w^G}{\partial x} - \theta^G \right)^2 dx + \frac{\kappa GA}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w^L}{\partial x} - \theta^L \right)^2 dx \\ & + \kappa GA \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w^G}{\partial x} - \theta^G \right) \left(\frac{\partial w^L}{\partial x} - \theta^L \right) dx \end{aligned} \quad (31)$$

となる。したがって連成項のせん断剛性成分を省略するということは、全体のひずみエネルギーから S

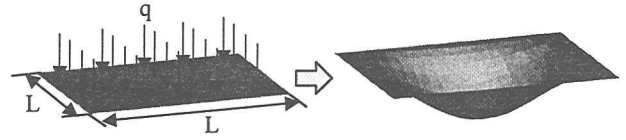
$$U_S^{GL} = \kappa GA \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w^G}{\partial x} - \theta^G \right) \left(\frac{\partial w^L}{\partial x} - \theta^L \right) dx \quad (32)$$

で表されるエネルギーが欠落するということになる。梁が薄梁の場合は Bernoulli-Euler の仮定が成り立つようになるので U_S^{GL} は0に近づく。この結果、連成効果の欠落も影響は小さいと考えられる。厚肉梁の場合、せん断ひずみ成分に関してグローバルモデルとローカルモデルは直接連成しないが、曲げ変形を介して間接的に両者は連成効果を得ることができるものと考えられる。

4. 数値解析例

図-6に示すような、一様圧力を受ける周辺固定正方形板を解析した。対称性より 1/4 領域のみを解析することとし、板厚比 L/h を 10, 100, 1000 と3段階に分けて解析した。グローバルメッシュ、ローカルメッシュはそれぞれ $10 \times 10 = 100$ 要素、 $18 \times 18 = 324$ 要素に分割されており、グローバル要素の 6×6 要素の部分にローカルメッシュが重ね合わされている。このメッシュ分割の場合、ローカル要素がグローバル要素の 1/3 の大きさであるため、ローカル要素から見て、重なるグローバ

ル要素は常に1つである。解析に用いたグローバルメッシュとローカルメッシュを図-7に示す。また、参照解として、モデル全体をローカルメッシュと同じ大きさに要素分割したメッシュを通常の有限要素解析して得られる解を使用した。なお使用した要素は前述した Kanok-Nukuchai らが提案した要素である。なお、重合メッシュ法で解析する際に、連成項 K^{GL} の計算において、せん断剛性に関する積分を行うものを TypeA、全くしないものを TypeB と表記することにする。



Young's modulus = E , Poisson's ratio = ν , Thickness = h

図-6 一様圧力を受ける周辺固定正方形板

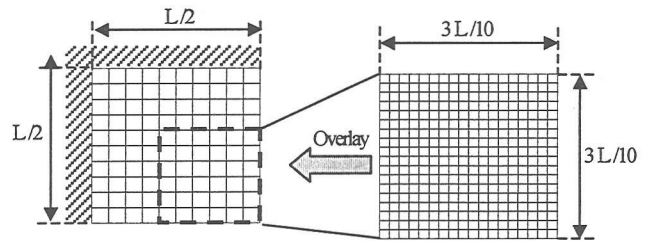


図-7 グローバルメッシュとローカルメッシュ

解析結果を図-8～図-10に示す。ここで横軸は、板の固定端から中心までの長さを無次元化した値 ($2x/L$) を示しており、 $0.4 < 2x/L < 1.0$ の区間が両メッシュが重ね合わされている部分である。また、縦軸はその位置におけるたわみと薄板理論解との比を表している (図-11参照)。ここで薄板の理論解とは(33)式で定義される値である。

$$W_{thinplate} = 0.00127 \frac{qL^4}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (33)$$

$L/h = 10$ の場合、TypeA はたわみが参照解の 65%程度しか生じていない。それに対し TypeB は参照解よりも約 52%程度大きい値である。(32)式で表されるエネルギーが欠落しているにもかかわらず、この程度の誤差であれば、厚肉の場合においても精度が確保されていると言えるであろう。また、 $L/h = 100$, $L/h = 1000$ の場合では TypeA が理論解の 10%程度しかたわみが生じていない。これは完全にロッキングの影響と思われる。それに対して TypeB は参照解と同様に理論解とほぼ一致した。

なお、本研究で調査した $L/h = 10$, $L/h = 100$, $L/h = 1000$ のいずれの場合においても、TypeB のたわみの値が参照解の値よりも大きい数値になっており、厚板に近づくほどその差が拡大する傾向にあることが見受けられた。

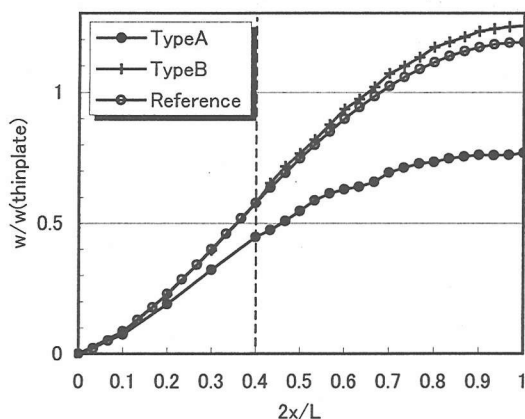


図-8 たわみの薄板理論解との比($L/h=10$)

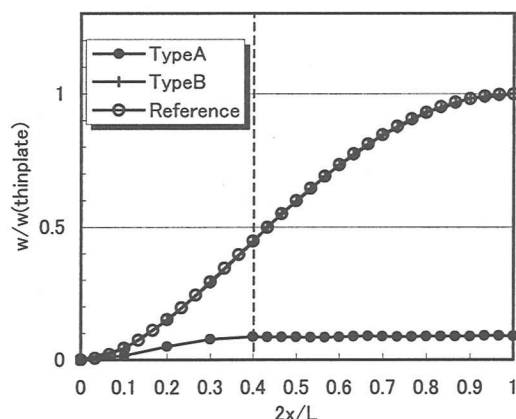


図-9 たわみの薄板理論解との比($L/h=100$)

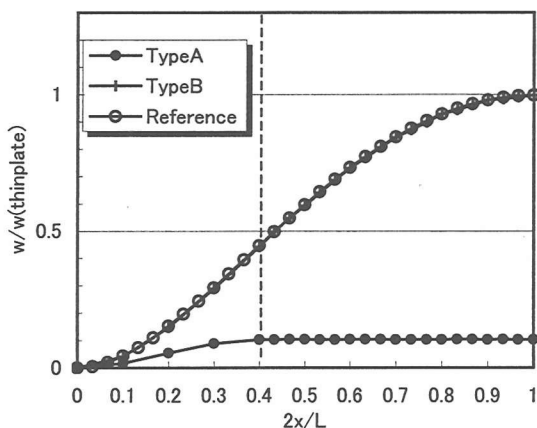


図-10 たわみの薄板理論解との比($L/h=1000$)

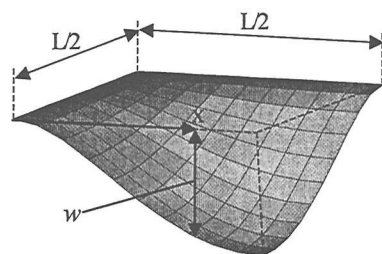


図-11 たわみ w と固定端からの距離 x

次に板厚比を $L/h=100$ とし、グローバルメッシュを先ほどと同じもの、ローカルメッシュを 20×20 に要素分割したものをを用いて解析した。その場合のローカルメッシュの挙動を図-12に示す。たわみは TypeB が理論解とほぼ一致したものの、TypeA は明らかに間違っただ形をしている。このことは次のように説明される。すなわちこのローカルメッシュを用いた場合には、グローバル要素とローカル要素が図-5のように交差し重ね合わされる。前述したように、せん断剛性の積分点を増やすことができないため、連成効果に偏りが生じてしまったためである。しかしながら TypeB には、積分に偏りが生じないため、このような現象が起きることはない。

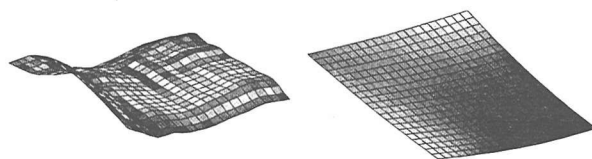


図-12 von Mises 応力と変形 (左: TypeA, 右: TypeB)

5. 結 言

重合メッシュ法解析に Mindlin-Reissner 理論に基づく板曲げ要素を用いる場合、低減積分を行っても、連成効果をあらわす項で積分点数が増加するため、ロッキング現象が発生すること、及び連成効果に偏りが生じるため良好な解が得られないことを示した。また、これを回避する方法としてせん断歪みに関する剛性を重合させない方法を提案した。この方法によって薄板から厚板まで良好な解が得られることを数値実験的に示した。

参考文献

- 1) Belytschko, T. Fish, J. and Bayliss, A., The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **81** (1990) 71-89
- 2) Fish, J., The s-version of the finite element method, *Computers & Structures*, **43-3** (1992) 539-547
- 3) Fish, J. and Markolefas, S., Adaptive s-method for linear elastostatics, *Computer Methods in Applied Mechanics and*, **104** (1993) 363-396
- 4) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣, 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集 (2001) 145-150
- 5) 日本鋼構造協会構造システム委員会, 構造工学における有限要素法の理論と応用, 日本鋼構造協会 (1986) 11-21
- 6) 野口裕久, 川島徹也, 整合近似を用いたメッシュフリー法による高精度シェル構造解析, 日本機械学会第 13 回計算力学講演会講演論文集, (2000) 13-14
- 7) 日本機械学会, 計算力学ハンドブック (I 有限要素法構造編), 丸善 (1998) 56-57

(2001 年 4 月 20 日受付)