

応力逆解析手法の構築と日本列島の応力増分分布推定への応用

Development of stress inversion method and
its application to prediction of stress increment distribution in Japanese Islands

堀 宗朗*・小国 健二**

Muneo HORI and Kenji OGUNI

*正会員 Ph.D. 助教授 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 文京区弥生 113-0032)

**正会員 Ph.D. 助手 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 文京区弥生 113-0032)

A new inversion method of identifying stress, called the stress inversion, is developed. The stress inversion method finds a stress distribution from a strain distribution, by using Airy's stress function that produces self-equilibrating stress components. It is shown that a boundary value problem can be posed for Airy's stress function when one stress-strain relation is assumed. Since the weak form of the boundary value problem uses displacement instead of strain, the method is suitable when actual measured data are used. As an example, the stress increment distribution of the Japanese Islands is predicted by using the nation-wide GPS array that measures daily displacement increment. Some discussions are made on the applicability of the stress inversion method to the GPS data.

Key Words : *Inverse Analysis of Stress from Strain, Nation-Wide GPS array, Prediction of Constitutive Relations, Regional Strain and Stress Increment*

1. はじめに

日本列島の地殻変動を常時計測するため、1994 年よりグローバルポジショニングシステム (GPS) アレイが稼働している。現在、約千近くの GPS の電子基準点が設置され、高い精度と空間分解能で変位増分が日々計測されている (例えば, Kato *et. al* (1998), El-Fiky and Kato (1999) 参照)。GPS アレイによる地殻変動計測はそれ自体意義のあるものであるが、変位増分に関する計測データをさらに有効利用することが期待されている。実際、この GPS アレイによるデータを用いて、地域の応力状態が推定されるのであれば、地震発生に貴重な情報をもたらすことになる。これは地震が断層の破壊によるものであり、それは応力によって引き起こされるからである。しかし、応力推定にはジレンマがある。なぜなら、日本列島は均一ではないため、計測された変位増分からひずみ増分を求め、そのひずみ増分から応力増分を推定するには地域毎の応力-ひずみ関係を知らなければならない。応力-ひずみ関係を知るには応力を知らなければならず、ここに応力推定のジレンマが生じる。日本列島の応力分布を直接計測することは難しい。また、非均一性以外に、異方性や断層のずれ等による非弾性的な挙動の影響もあり、応力推定は難しい課題となっている。

一方、不均一な材料や破壊や変形の局所化を起こす材料に対し、局所的な材料特性の推定は共通の研究テーマである (例えば, Bui (1994), Tanaka and Dulikravich

(1998) 参照)。なぜなら、局所的な構成則が正確に与えられるのであれば、数値解析によってこのような材料の複雑な力学挙動を再現・予測することは可能となっているからである。しかし、局所的な構成則の推定も難しい。なぜなら、局所的な構成則の推定にはその点でのひずみと応力を両方知らなければならないが、ひずみは計測できるものの応力の計測が不可能であるからである。

上記を背景として、著者のグループはひずみ分布から応力分布を推定する新しい逆解析手法を提案した (Hori and Kameda (1998), Hori *et al.* (1999) 参照)。この逆解析手法のポイントは、通常の逆解析手法のように構成則の形式を仮定したり、パラメタライズする必要がないことである。平面ひずみないし平面応力状態にある材料にのみ適用されるという制限はあるものの、応力の 3 成分が面内の 2 つの釣り合い式を満たすため、応力とひずみの間に 1 つの条件を仮定すると、応力 3 成分に 3 つの式を課すことができる (図 1 参照)。著者のグループの逆解析手法はこの応力成分の特質を利用する。実際、等価介在物法に基づいて応力とひずみの条件をアイゲン応力によって表すと、材料の表面で計測されたひずみ分布を用いてアイゲン応力が満たす境界値問題を導くことができる。境界値問題を解くことで、アイゲン応力、そして応力分布が求められる。この結果、線形・非線形を問わず、応力分布がひずみ分布から推定されることになるのである。

提案された逆解析手法の妥当性は厳密に証明されて

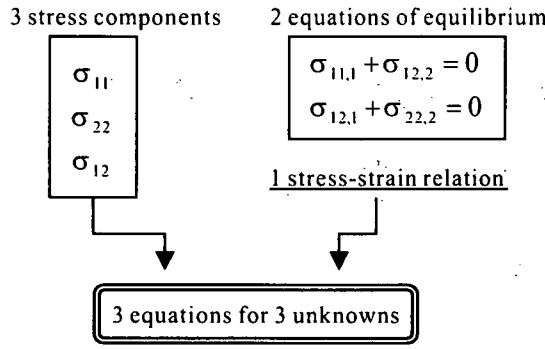


図-1 2次元状態の応力成分と場の式

いるものの、GPSによる列島の変位増分データや画像解析を用いた材料のひずみ分布のような実際のデータに適用するには問題があった。これはアイゲン応力の境界値問題を設定する際に、変位やひずみの偏微分を計算しなければならないことによる。この問題を解決するため、著者らは新しい逆解析手法を開発した(Hori and Kameda, 2001)。この手法も、応力3成分が2つの釣り合い式を満たすことを利用する。しかし、エイリの応力関数を用いると釣り合い式を満たす応力3成分が求まるため、仮定される応力とひずみの関係をより簡単な形式で表すことができる。事実、アイゲン応力が不要になり、変位やひずみの高階の偏微分を計算する必要がなくなった。

本論文では、エイリの応力関数を用いた新しい逆解析を応力逆解析手法と名づけ、この手法の概要を第2章において示す。第3章では、実際の計測データに適用する数値解析を定式化し、アイゲン応力を用いた逆解析手法との比較より、応力逆解析の長所を明示する。第4章において、GPSデータを用いた数値解析を示す。ひずみ増分分布とともに推定された応力増分分布を示す。この応力増分分布はひずみ増分分布とは異なることは当然であるが、地域毎に強く偏在して分布する。この偏在性は注目に値すると思われる。

この論文では、ベクトルやテンソルをインデックス表示する。直交座標系を用いるが、対象とする平面内に x_1 と x_2 の座標軸をとり、直交する方向に x_3 の座標軸をとることとする。総和規約も用いる。また、コンマの後に続く添字は対応する座標軸での偏微分を表す。

2. 応力逆解析手法

問題設定を明示した上で、応力逆解析手法を厳密に定式化する。対象を薄い材料サンプル V とし、平面応力状態にあることを仮定する。表面とその境界を S と ∂S とし、それぞれにおいて変位 u_i とトラクション t_i が計測されるものとする(図2参照)。添字 i は1ないし2をとる。

面内の未知の応力3成分 σ_{ij} は2つの釣り合い式 $\sigma_{ij,i} = 0$ を満たす。応力3成分の替りにエイリの応力関数 a を用いる。応力3成分は次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{,22} \\ a_{,11} \\ -a_{,12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

応力-ひずみ関係が既知であれば、ひずみ成分をこの a によって表すと、適条件式より a が満たす支配方程式が導かれる。実際、等方線形弾性体の場合、この支配方程式は重調和方程式となる。しかし、応力-ひずみ関係が未知の場合はこの方法で支配方程式を導くことはできない。

表面 S の変位分布からひずみ分布が計算される場合、応力とひずみの一つの関係式がわかれば、応力関数 a の別の支配方程式を導くことができる。簡単な例として $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ がひずみ $\epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ に線形であることを仮定すると、式(1)より直ちに

$$a_{,ii} = \kappa(\epsilon_{ii}) \quad (2)$$

が導かれる。ここで κ は比例定数であり、2次元の体積弾性係数に対応する。なお、 $\sigma_{ii} = \kappa\epsilon_{ii}$ は、面内の塑性変形がせん断のみであり、弾性が等方性の弾塑性体が必要とする条件である。

上で仮定された $\sigma_{ii} = \kappa\epsilon_{ii}$ の条件以外にも a の支配方程式を導くことができる。例えば、局所的な応力-ひずみ関係の等方性を仮定すると、最大せん断応力の方向が最大せん断ひずみの方向と一致することより、

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}} = \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{\epsilon_{12}} \quad (3)$$

が成立する(Hori and Kameda, 2001)。これから

$$\epsilon_{12}(a_{,11} - a_{,22}) - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})a_{,12} = 0 \quad (4)$$

が導かれる。式(2)とは異なり係数は定数ではないものの、式(3)は同次形の2階偏微分方程式である。

境界 ∂S で計測されたトラクション t_i は応力関数 a の境界条件を与える。なお簡単な計算により、トラクションの境界積分で与えられる残差力を $r_i(\mathbf{x}) = \int^{\mathbf{x}} t_i \, d\ell$ とすると、ノイマン境界条件として

$$n_i a_{,i} = -n_1 r_2 + n_2 r_1 \quad (5)$$

が導かれる。ここで n_i は境界の外向き法線ベクトルである。

式(2)と式(5)は、支配方程式がポアソン方程式であり、ノイマン境界条件が与えられた応力関数 a の境界値問題である。したがって、存在するのであれば、定数項を除き解は唯一であり、また、入力であるひずみや残差力に対して安定である。なお解の存在性には注

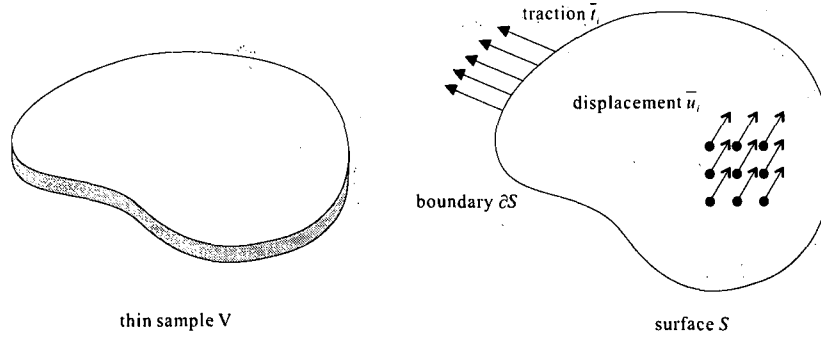


図-2 平面応力状態にある材料サンプル

意が必要であり、ひずみと残差力が次の条件を満たすことが必要となる。

$$\int_S \kappa(\epsilon_{ii}) dS = \int_{\partial S} -n_1 r_2 + n_2 r_1 dl. \quad (6)$$

実際、式(2)を用いて式(6)の左辺を書き直すと、積分公式と式(5)より式(6)の右辺が導かれる。

3. 弱形式を用いた定式化

論点を明確にするため、式(2)と(5)が設定する応力関数 a の境界値問題を明示する。

$$\begin{cases} a_{,ii} - \kappa \epsilon_{ii} = 0 & \text{on } S \\ n_i a_{,i} = R & \text{along } \partial S \end{cases} \quad (7)$$

ここで R は残差力から $R = -n_1 r_2 + n_2 r_1$ として決定される。この境界値問題の支配方程式にはひずみが使われているため、計測された変位分布からひずみ分布を計算する必要がある。

境界値問題(7)の弱形式を用いると、ひずみ分布を計算する必要がなくなる。実際、直接変位分布を使って応力関数を推定することができるようになる。重み関数を ϕ とすると弱形式は次のようになる。

$$\int_S -\phi_{,i} a_{,i} + \kappa(\phi_{,i} u_i) dS + \int_{\partial S} \phi(R - \kappa n_i u_i) dl = 0. \quad (8)$$

この式(8)から明らかなように、弱形式にはひずみが現れない。ガラーキン法を用いた有限要素法を使えば、この弱形式を計算することは容易である。なお式(8)では κ が一様であるため偏微分を取っていないが、 κ が一様でない場合には κ の偏微分も含まれる。すなわち S の積分の第2項は $(\kappa \phi)_{,i} u_i$ となる。

第1章で触れたように、著者らが最初に提案した逆解析手法はアイゲン応力を用いたものである。この手法を簡単に説明する。第2章と同様に $\sigma_{ii} = \kappa \epsilon_{ii}$ を仮定すると、 κ に対応した等方線形弾性テンソル c_{ijkl} を用いてアイゲン応力は

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (9)$$

として定義される。この定義と $\sigma_{ii} = \kappa \epsilon_{ii}$ から $\sigma_{ii}^* = 0$ が成立する。したがって、釣り合い式 $\sigma_{ij,i} = 0$ を用いると、例えば $\sigma_{11}^* (= -\sigma_{22}^*)$ に対して

$$\sigma_{11,ii}^* = -\sigma_{11,11}^a + \sigma_{22,22}^a \quad (10)$$

を導くことができる。ここで $\sigma_{ij}^* = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$ であり、これはひずみから計算される見かけの応力である。この応力は、当然、釣り合い式を満たさない。式(10)は式(2)と同様、アイゲン応力成分に対するポアソン方程式である。しかし、式(10)の左辺を得るためには、変位に関して3階の偏微分を計算しなければならない。例えば右辺の第1項は $\sigma_{11,11}^a = c_{11kl} u_{k,111}$ である。トラクションを使った境界条件から境界値問題を設定し、その弱形式を用いることで偏微分の階数を下げることはできるが、その分重み関数に関して高階の偏微分をとらなければならない。したがって、得られる弱形式は、式(8)と比べ、数値計算には適していないことがわかる。

4. GPS データを利用した日本列島の応力分布の推定

GPS アレイで計測された変位増分 $\dot{u}_i$ を用いて、応力逆解析手法を列島の地域応力増分の推定に適用する。増分は上に点を付けて表す。なお、列島の応力場は重力の影響で鉛直方向に変化しているが、地表面はトラクションフリーの状態であるため、GPS アレイの計測時間では応力増分は平面応力状態に近いと仮定してもかまわない。応力逆解析手法を適用するには、列島境界のトラクション増分を計測ないし評価しなければならない。このトラクションはプレート運動に起因するため、プレートの沈み込みを考える必要がある。プレート運動の解析は別途研究中であり、ここでは簡単のためトラクションの増分は

$$-n_1 \dot{r}_2 + n_1 \dot{r}_1 - \kappa n_i \dot{u}_i = 0 \quad (11)$$

を満たすことを仮定する。すなわち変位増分の変化の大きいところにはより大きな残差力増分が働くことと

する。なお式(11)は式(6)を満たす。この仮定より、式(8)に対応して、応力関数の増分 $\dot{a}$ は次式で与えられる弱形式の境界値問題の解となる。

$$\int_S -\phi_{,i}\dot{a}_{,i} + \kappa(\phi_{,i}\dot{u}_i) dS = 0. \quad (12)$$

式(12)は $\dot{\sigma}_{ii} = \kappa(\dot{\epsilon}_{ii})$ が仮定されている。この仮定は、「列島の弾性が一様かつ等方的である場合、非弾性変形が体積(面積)成分を持たない」ことに対応する。弾性波速度を用いた地殻構造の解析を見れば、列島に均一性や等方性を仮定することは間違いである。しかし、非均一性の度合いや異方性の度合いはそれほど顕著ではなく、現時点で応力逆解析手法を適用する際に均一性や等方性を仮定することは許容範囲であると思われる。また、せん断変形しか生じない断層の滑りが非弾性変形の主な要因であることを想定すれば、非弾性変形の体積成分0の仮定も許容できる。なお2次元平面応力状態が仮定しているため、面外(上下)方向のトラクションは0であるが変形は0ではなく、実際、面外方向の直ひずみは計算できることに注意すべきである。

本論文では有限要素法を用いて式(12)を数値解析する。電子基準点を頂点とする15節点3角形要素を用いる。頂点の変位増分には基準点のデータを使い、それ以外の節点は変位増分を線形関数で内挿した値を使う。この結果、各要素の平均ひずみ増分は電子基準点の変位増分データから直接計算することができる。これは要素とその境界を Ω と $\partial\Omega$ とすると、 Ω の平均ひずみは

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{\epsilon}_{11} \rangle \\ \langle \dot{\epsilon}_{22} \rangle \\ \langle \dot{\epsilon}_{12} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} n_1 \dot{u}_1 \\ n_2 \dot{u}_2 \\ \frac{1}{2}(n_1 \dot{u}_2 + n_2 \dot{u}_1) \end{bmatrix} dl \quad (13)$$

より、 $\partial\Omega$ の変位増分の線積分で計算できるためである。同様に Ω の平均応力増分は $\partial\Omega$ 上の線積分として次のように計算できる。

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle \\ \langle \dot{\sigma}_{22} \rangle \\ \langle \dot{\sigma}_{12} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} n_2 \dot{a}_{,2} \\ n_1 \dot{a}_{,1} \\ -n_2 \dot{a}_{,1} \end{bmatrix} dl. \quad (14)$$

応力増分を計算するには応力関数の2階偏微分が必要であるが、式(14)で与えられる平均応力増分を計算するには、応力関数の1階微分で十分である。

電子基準点を用いて作った列島を覆う有限要素法メッシュを図3に示す。前述のように、電子基準点は3角形要素の頂点に位置している。図4に1998-1999の1年間の各電子基準点の変位増分を示す。なおGPSは電子基準点の位置を計測しており、変位増分は計測開始からの位置の変化である。計測誤差を除くために、日々の位置に対する計測データの変化を線形関数として近似し、最小二乗法によってその係数を決め、この線形関数から変位増分を求めている。図5と図6に式(13)

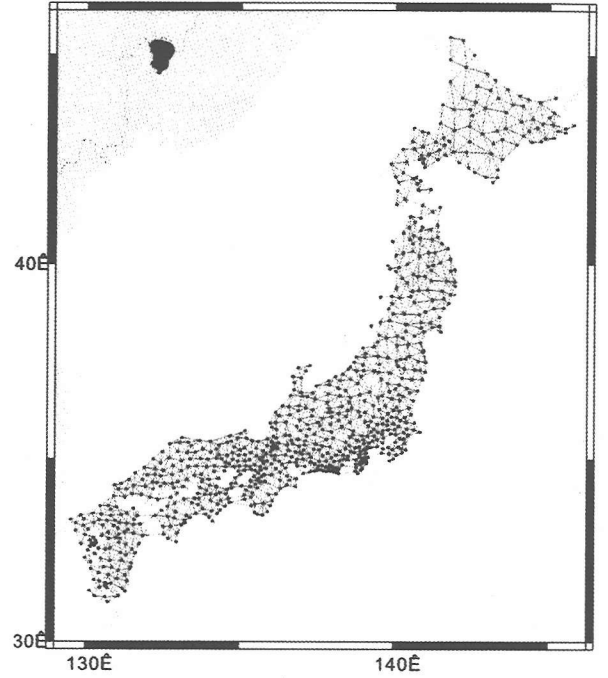


図-3 数値解析に用いた有限要素法メッシュ

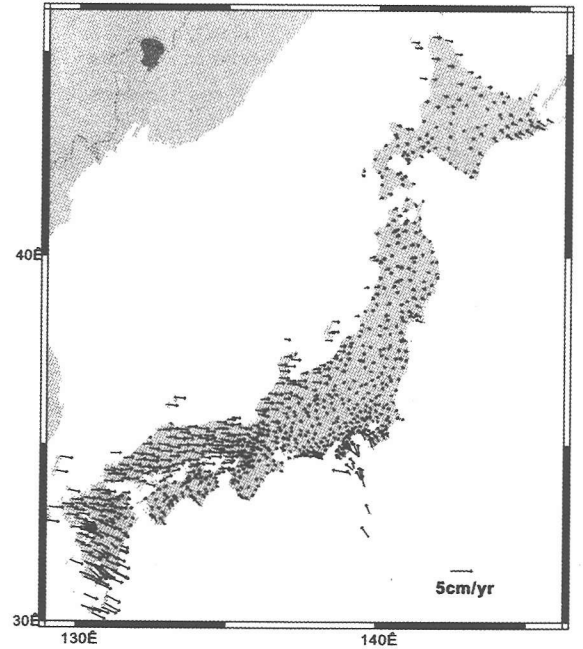
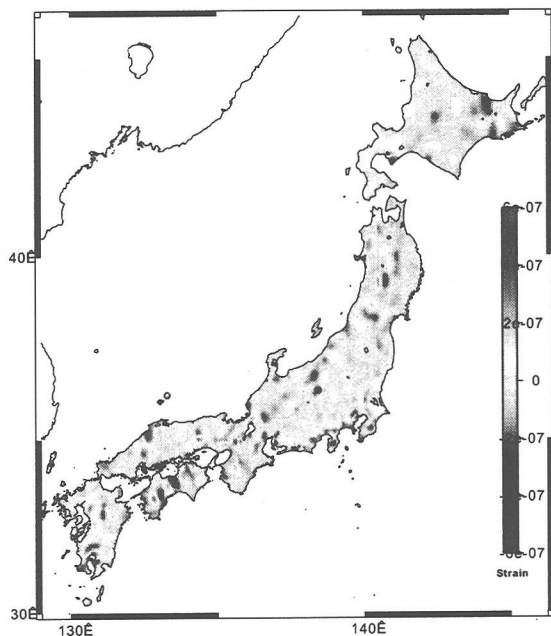


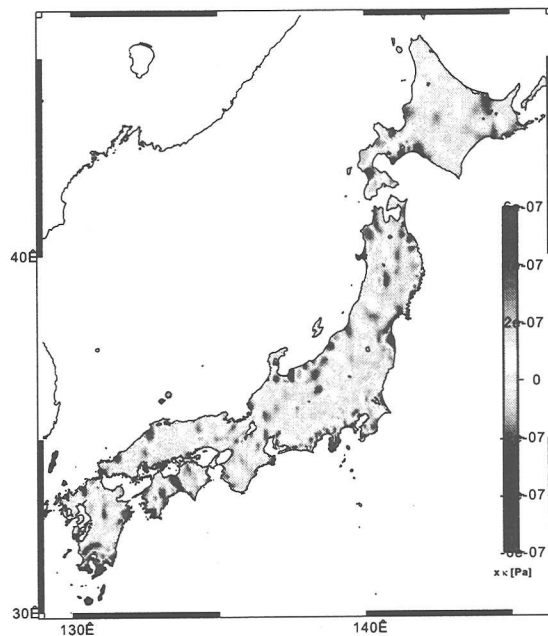
図-4 GPS アレイによって計測された変位増分分布

と(14)において、計算された平均ひずみと平均応力を体積ひずみ・応力増分($\dot{\epsilon}_{ii}$ と $\dot{\sigma}_{ii}$)と最大せん断ひずみ・応力増分の分布として示している。なお、数値計算の際、定数 κ は $\kappa = 1[\text{Pa}]$ としている。

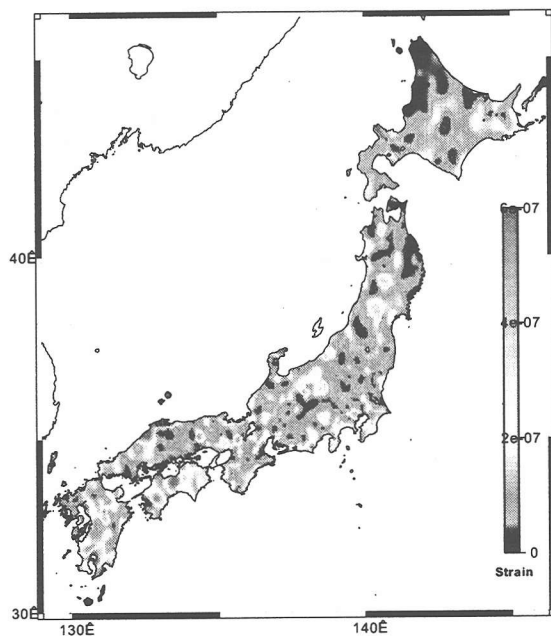
応力逆解析手法によって推定された応力増分の妥当性を議論するためには、他の計測データとの比較が必要である。現時点ではこのような比較はまだ行っていない。しかし、数値計算からはいくつかの興味深い結果が得られている。第1に、平均ひずみ増分が図5に



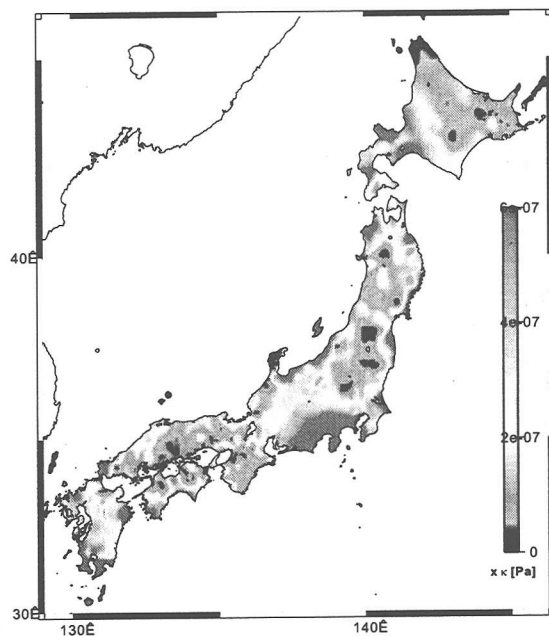
(a) 体積ひずみ増分



(a) 体積応力増分



(b) 最大せん断ひずみ増分



(b) 最大せん断応力増分

図-5 計測された平均ひずみ増分の分布

図-6 推定された平均応力増分の分布

示されるように特定の地域に偏在することである。通常、計測誤差を除くため、基準点位置の相関を計算し変位増分は空間的にも平滑化されてきたが、平均ひずみを用いることでこの平滑化が必要なくなり、ひずみ増分分布の偏在性が示された。第2に、平均応力増分も、平均ひずみ増分と同様、地域に偏在することが予想されることである。繰り返しになるが、この応力増分の妥当性は検証できない。しかし、10~100[km]の断層の長さスケールからみて、応力増分の局所的な偏在

性は合理的と考えることはできる。ひずみ増分や応力増分の偏在性をより詳しく調べるためには、地殻構造の非均一性との比較が必要であろう。第3に、ひずみ増分と応力増分の分布が同一のパターンとはならないことである。地震予知を研究する際により多くの指標を検討することが望まれるが、GPS アレイより求まるひずみ増分とは別に、応力逆解析手法で推定される応力増分がそのような指標の候補となることが期待できる。地震発生データとの比較が不可欠である。

5. おわりに

本論文では、エイリの応力関数を用いた応力逆解析手法を説明し、日本列島のGPSアレイデータに適用した数値計算結果を示した。弱形式を用いることで変位分布を直接解析に利用できることは利点である。なお、応力逆解析手法は、応力成分が釣り合い式を満たすという条件の他に、一つの応力-ひずみ関係を利用しないし仮定しなければならない。この応力-ひずみ関係の妥当性が推定される応力分布の正しさを決定する。この点は強調する必要がある。したがって、応力逆解析手法によって推定された列島の応力増分分布に対し、その妥当性を検討することは現時点ではできない。しかし、いくつかの興味深い結果は得られており、応力増分推定やその結果得られる地域毎の構成則の推定が十分期待できると思われる。

数値解析の結果から、仮定された応力-ひずみ関係の妥当性や列島のトラクション境界条件、応力逆解析手法の問題点は明示されている。このような問題点の解決は別途検討されている。一方、地殻構造探査や地震発生データとの比較により、応力逆解析手法や推定された応力増分分布の妥当性を検証することも取り組んでいる。

本研究は科学技術振興事業団および日本学術振興会の科学研究費補助金の補助を受けた。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Bui, H.D.: *Inverse Problem in the mechanics of materials: An introduction*, CRC Press, New York, 1994.

- 2) El-Fiky, G.S., and T. Kato: Interplate coupling in the Tohoku district, Japan, deduced from geodetic data inversion, *J. Geophys. Res.*, Vol. 104, no. B9, pp. 20361-20377, 1999.
- 3) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. A241, pp. 376-396, 1957.
- 4) Hori, M. and T. Kameda: Formulation of inverse problem of identifying material properties based on equivalent inclusion method, in *Proceeding of International Symposium on Inverse Problems*, (ed. by M. Tanaka and G.S. Dulikravich), Elsevier, New York, pp. 225-234, 1998.
- 5) Hori, M., T. Kameda, and N. Hosokawa: Formulation of identifying material property distribution based on equivalent inclusion method, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE, Vol. 16, No. 1, pp. 21-30, 1999.
- 6) Hori, M. and T. Kameda: Inversion of stress from strain without fully knowing constitutive relations, *J. Mech. Phys. Solids*, (in print, 2001).
- 7) Kato, T., G.S. El-Firky, E.N. Oware and S. Miyazaki: Crustal strains in the Japanese islands as deduced from dense GPS array, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 25, pp. 3445-3448, 1998.
- 8) Nemat-Nasser, S. and M. Hori: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Second Edition, North-Holland, London, 1998.
- 9) Tanaka M. and G.S. Dulikravich (eds.): *Inverse Problems in Engineering Mechanics* (Proceeding of International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics), Elsevier, New York, 1998.

(2001 年 4 月 20 日 受付)