

半無限弾性体応力を求める Boussinesq 問題への境界条件の追加とその適用

Extended Equations of Boussinesq Problem by Supplementing Boundary Constrains.

高島康夫

Yasuo TAKASHIMA

正会員 技術士 サン技術コンサルタント株式会社 (〒093-0041 網走市桂町 5-4-1)

連絡先 自宅 (〒235-0021 横浜市磯子区岡村 7-28-3)

Equations of Boussinesq problem for a semi-infinite body are extended by increasing number of boundary constraints so that more flexibilities can be obtained in solving several practical problems for which original equation can not be applied.

Key Words: *Boussinesq problem, Semi-infinite body, Stress functions, Plate loading test.*

1. はじめに

水平自由面から垂直下方無限大の深さまで広がる弾性岩盤の自由表面上に垂直集中荷重が作用したとき岩盤内に生ずる応力は周知の Boussinesq の基本式¹⁾によって与えられている。いまもし集中荷重に加えてなんらかの境界条件の追加—例えば集中荷重直下の岩盤内に測定孔が掘下げられ孔内面の応力が 0 という境界条件の追加—がなされた場合に対してはこの解は適用できない。本研究はこのような場合の拡張式を誘導することにより基本解が適用できない問題の解を得、以て Boussinesq 式の適用範囲を広げんとするものである。

以下応力解析に用いる座標系は、荷重および応力が軸対称であることから深さの増加方向を z 軸の正方向とする $r\theta z$ 円筒座標を用いる。然るときは原点 o から任意の点 (r,z) までの距離 R は

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad (1)$$

となる。応力記号は z 方向、 r 方向および θ 方向の直応力をそれぞれ σ_z , σ_r , σ_θ および rz 間のせん断応力を τ_{rz} で表す (本研究で対象とする問題は振りを伴わない軸対称であるのでせん断応力 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ は存

在しない。) 直応力の符号は引張を正、圧縮を負とする。又岩盤のポアソン比を ν で表す。なお、次節以降の諸式誘導の基本理論は Timoshenko の名著 “Theory of Elasticity”²⁾ の記述によった。

2. 応力関数の選定と全方向無限体の応力式

2.1 応力関数の選定

弾性体の応力解析においては応力関数が多用される。いま応力関数を ϕ で表せば弾性体の力学の基礎理論により応力は次式で与えられる³⁾：

$$\sigma_r = \partial / \partial z (\nu \nabla^2 \phi - \partial^2 \phi / \partial r^2) \quad (2)$$

$$\sigma_z = \partial / \partial z [(2 - \nu) \nabla^2 \phi - \partial^2 \phi / \partial z^2] \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \partial / \partial r [(1 - \nu) \nabla^2 \phi - \partial^2 \phi / \partial z^2] \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \partial / \partial z [\nu \nabla^2 \phi - 1/r (\partial \phi / \partial r)] \quad (5)$$

ここに ∇^2 は Laplace の演算子で軸対称問題の場合は次式となる：

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + 1/r (\partial / \partial r) + \partial^2 / \partial z^2 \quad (6)$$

上記応力式が成立するためには ϕ は次の適合条件式を満たすことが必要である：

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (7)$$

適合条件式を満たす応力関数は数多くあり、さらに

それらの線形結合も適合条件式を満足する。例えば

$$\begin{aligned}\phi_{A1} &= A_1/R, & \phi_{B1} &= B_1 R, \\ \phi_{A2} &= A_2/R^3, & \phi_{B2} &= B_2 \cdot z/R, \\ \phi_{A3} &= A_3 \cdot (z^2/R^5 - 1/3R^3), & \phi_{B3} &= B_3 \cdot (z^2/R^3 - 1/3R) \\ \phi_{A4} &= A_4 \cdot (z^3/R^7 - 3z/5R^5), & \phi_{B4} &= B_4 \cdot (z^3/R^5 - 3z/5R^3)\end{aligned}\quad (8)$$

等が挙げられる。ここに A_1, B_1 等は定数である。これらの式の誘導は Timoshenko⁴⁾を参照されたい。Boussinesq の問題の基本解はこの内の 1 個の応力関数 ϕ_{B1} を用いて導かれている。これに対して本研究においては 4 個の応力関数の組合せから成る次式を用いる：

$$\phi = \phi_{B1} + \phi_{A2} + \phi_{B2} + \phi_{A4} \quad (9)$$

この ϕ が適合条件式を満足することは確認済みである。なおこの 4 個の応力関数の組合せを選んだ理由は後節

5. の適用例に見るように、本研究は集中荷重が P なる条件に加えて測定孔空間の存在等応力に関する 4 個の境界条件をもつ問題を対象とするが、各応力関数を構成する項数が最小なる関数で、かつ統論する式誘導において境界条件を満たす為の積分及び応力値が無量大とならない応力関数の組合せを求めた為である。

2.2 全無限体の応力式

式(2)～(5)の応力式は未だなんらの境界条件も考慮されない状態における応力を示す。即ち 3 次元に無限に広がる弾性体内の応力である。以下この応力状態を全無限体応力と呼ぶ。式(9)の ϕ を式(2)～(5)に代入すれば全無限体応力は下記各式によって求められる：

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A_2 \cdot \left(\frac{-12}{R^5} + 105 \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^9} \right) + B_1 \cdot \left[(1-2 \cdot \nu) \cdot \frac{z}{R^3} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot z}{R^5} \right] + B_2 \cdot \left[-2 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{1}{R^3} + 6 \cdot \nu \cdot \frac{z^2}{R^5} + 15 \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^7} \right] \dots \\ &+ A_4 \cdot \left(\frac{18}{R^7} - \frac{357 \cdot z^2}{R^9} + 315 \cdot \frac{z^4}{R^{11}} + 693 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{13}} \right)\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= A_2 \cdot \left(\frac{9}{R^5} - 90 \cdot \frac{z^2}{R^7} + 105 \cdot \frac{z^4}{R^9} \right) - B_1 \cdot \left[(1-2 \cdot \nu) \cdot \frac{z}{R^3} + 3 \cdot \frac{z^3}{R^5} \right] - B_2 \cdot \left[(1-2 \cdot \nu) \cdot \frac{1}{R^3} + 6 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{z^2}{R^5} - 15 \cdot \frac{z^4}{R^7} \right] \dots \\ &+ A_4 \cdot \left(\frac{15}{R^7} + 315 \cdot \frac{z^2}{R^9} - 945 \cdot \frac{z^4}{R^{11}} + 693 \cdot \frac{z^6}{R^{13}} \right)\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= A_2 \cdot \left(-45 \cdot \frac{r \cdot z}{R^7} + 105 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^9} \right) - B_1 \cdot \left[(1-2 \cdot \nu) \cdot \frac{r}{R^3} + 3 \cdot \frac{r \cdot z^2}{R^5} \right] - B_2 \cdot \left[3 \cdot (1+2 \cdot \nu) \cdot \frac{r \cdot z}{R^5} - 15 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^7} \right] \dots \\ &+ A_4 \cdot \left(105 \cdot \frac{r \cdot z}{R^9} - 630 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^{11}} + 693 \cdot \frac{r \cdot z^5}{R^{13}} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= A_2 \cdot \left(\frac{3}{R^5} - 15 \cdot \frac{z^2}{R^7} \right) + B_1 \cdot (1-2 \cdot \nu) \cdot \frac{z}{R^3} + B_2 \cdot (1-2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3 \cdot z^2}{R^5} \right) \dots \\ &+ A_4 \cdot \left(\frac{3}{R^7} + 42 \cdot \frac{z^2}{R^9} - 63 \cdot \frac{z^4}{R^{11}} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

さて問題は半無限体に生じる応力を求めることにある。しかして Boussinesq 基本式誘導の考え方は、全無限体内の $z=0$ 平面に作用している応力 σ_z と τ_{rz} がともに 0 の場合には (岩盤面に接する微小六面体の応力の内、鉛直面に作用する σ_r , σ_θ は $z=0$ 平面上には現れない)

全無限体の下半部の応力は半無限体の応力を表す⁵⁾とするものである。よって基本式は $z=0$ のときの σ_z , τ_{rz} を 0 ならしめるよう未知定数を定めている。この為に先ず次節に述べる圧縮中心 center of compression が導入されている。本研究においてもこの方法に従う。

3. z 軸沿いに連続分布する圧縮中心により全無限体に起こる応力

圧縮中心に関する詳細説明は Timoshenko⁶⁾に譲るがその概要は次のとおりである。いま、全無限体内の1点に向かって微小間隔で向き合った各々Pなる1対の力がx軸沿いに作用し、同時に同じ大きさの1対の力がy軸沿い、およびz軸沿いに作用している状態を考える。これら3対の力が作用している中心を圧縮中心と呼ぶ。もし向き合っている力の間隔が微小でなく0であれば各対の力は打ち消し合って無限体内には如何なる応力も発生しない。しかしながらこれらの間隔は微小ではあるが0ではないので何らかの応力が発生する。この状態において全無限体内に起こっている応力は解析的に求められている。さらに無数の圧縮中心がz軸沿いに深さzなる点から上方無限大の高さまで連続分布しているとき、全無限体内に生じる応力は次式で与えられている⁷⁾：

$$\sigma_{rA0} = \frac{A_0}{2} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \cdot R} - \frac{z}{R^3} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_{zA0} = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{z}{R^3} \quad (15)$$

$$\tau_{rzA0} = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{r}{R^3} \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta A0} = \frac{-A_0}{2} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) \quad (17)$$

ここに A_0 は定数である。上記のとおり連続圧縮中心はz軸上に $z=z$ 点から上方無限大の高さまで全無限体内に分布している。この連続圧縮中心により全無限体内には応力が生ずるが $z=0$ 平面上の応力 σ_z と τ_{rz} が0となるよう A_0 を特定することができる。このとき $z=0$ 平面より下部の半無限体内の応力は目的とする半無限体の応力を表すと考えるのであるが、応力解析の対象としている物体はあくまで全無限体である。(もし始めから半無限体のみを対象としているのであれば、 $z=0$ 平面より上方無限大に伸びる無の空間に如何に連続圧縮中心が作用してもその力は下方にある半無限体には伝達されないであろう。)

4. 圧縮中心による応力と集中荷重により全無限体に生ずる応力との重合による半無限体応力式の誘導

4.1 $z=0$ 平面上で $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ なる条件の取入れ
圧縮中心により生ずる応力と節2.2で求めた応力を重合する。節2.2で求めた応力は全無限体内の応力である。よって圧縮中心による応力との重合はあくまで全無限体内の応力の重合となる。

さて式(10)～(13)の応力 $\sigma_r \sim \sigma_\theta$ と式(14)～(17)の応力 $\sigma_{rA0} \sim \sigma_{\theta A0}$ とをそれぞれ重合し、その結果をあらためて σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz} とおけば次式となる：

$$\sigma_r = \sigma_r + \sigma_{rA0} \quad (18)$$

$$\sigma_z = \sigma_z + \sigma_{zA0} \quad (19)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz} + \tau_{rzA0} \quad (20)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta + \sigma_{\theta A0} \quad (21)$$

$z=0$ 平面上の σ_z の値は(19)で $z=0$ とおいて

$$(\sigma_z)_{z=0} = A_2 \cdot \frac{9}{r^3} - A_4 \cdot \frac{15}{r^7} - B_2 \cdot (1-2\nu) \cdot \frac{1}{r^3}$$

となるから、この値が0となるためには

$$A_4 = \left(\frac{3}{5} \cdot A_2 \cdot r^2 \right) - \frac{1-2\nu}{15} \cdot B_2 \cdot r^4 \quad (22)$$

が成立しなければならない。同様に $z=0$ 平面上の τ_{rz} の値は(20)で $z=0$ とおいて

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{1}{r^2} - B_1 \cdot (1-2\nu) \cdot \frac{1}{r^2}$$

であるから、この値が0となるためには

$$\frac{A_0}{2} = B_1 \cdot (1-2\nu) \quad (23)$$

が成立しなければならない。

よって式(22),(23)の A_0 と A_4 を式(18)～(21)に代入し式(1)の関係を用いて整理すると3個の未知定数 A_2, B_1, B_2 を含む応力式が下記のとおり得られる：

$$\sigma_r = \sigma_{rA2} + \sigma_{rB1} + \sigma_{rB2} \quad (24)$$

$$\sigma_{rA2} = A_2 \cdot \left(\frac{-12}{R^5} + \frac{54}{5} \cdot \frac{r^2}{R^7} - \frac{546}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^9} + 189 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{13}} \right)$$

$$\sigma_{rB1} = B_1 \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) - 3 \frac{r^2 \cdot z}{R^5} \right]$$

$$\sigma_{rB2} = B_2 \cdot \left[\frac{-2 \cdot (8 - \nu)}{5} \cdot \frac{1}{R^3} + \frac{6 \cdot (1 + 3 \cdot \nu)}{5} \cdot \frac{z^2}{R^5} + \frac{81 - 12 \cdot \nu}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^7} \dots \right. \\ \left. + \frac{119 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} - 21 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^6 \cdot z^4}{R^{11}} \right]$$

$$\sigma_z = \sigma_{zA2} + \sigma_{zB1} + \sigma_{zB2} \quad (25)$$

$$\sigma_{zA2} = A_2 \cdot \left(108 \cdot \frac{z^2}{R^7} - 84 \cdot \frac{z^4}{R^9} - 567 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^6}{R^{13}} \right)$$

$$\sigma_{zB1} = -3B_1 \cdot \frac{z^3}{R^5}$$

$$\sigma_{zB2} = B_2 \cdot \left[-2 \cdot (4 + \nu) \cdot \frac{z^2}{R^5} + 2 \cdot (8 - \nu) \cdot \frac{z^4}{R^7} - 21 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} \dots \right. \\ \left. + 63 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} - \frac{231}{5} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^4 \cdot z^6}{R^{11}} \right]$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rzA2} + \tau_{rzB1} + \tau_{rzB2} \quad (26)$$

$$\tau_{rzA2} = A_2 \cdot \left(18 \cdot \frac{r \cdot z}{R^7} + 42 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^9} - 378 \cdot \frac{r^3 \cdot z^3}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^3 \cdot z^5}{R^{13}} \right)$$

$$\tau_{rzB1} = -3 \cdot B_1 \cdot \frac{r \cdot z^2}{R^5}$$

$$\tau_{rzB2} = B_2 \cdot \left[-(3 + 6 \cdot \nu) \cdot \frac{r \cdot z}{R^5} + 15 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^7} - 7 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^5 \cdot z}{R^9} + 42 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^5 \cdot z^3}{R^{11}} - \frac{231}{5} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{r^5 \cdot z^5}{R^{13}} \right]$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta A2} + \sigma_{\theta B1} + \sigma_{\theta B2} \quad (27)$$

$$\sigma_{\theta A2} = \frac{A_2}{5} \cdot \left(\frac{6}{R^5} - 66 \cdot \frac{z^2}{R^7} + 126 \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^9} - 189 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} \right)$$

$$\sigma_{\theta B1} = B_1 \cdot (1 - 2\nu) \cdot \left(\frac{z}{R^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2 \cdot R} \right)$$

$$\sigma_{\theta B2} = B_2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{R^3} - 3 \cdot \frac{z^2}{R^5} + \frac{r^4}{5 \cdot R^7} - \frac{14}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} + \frac{21}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} \right)$$

式(25),(26)の σ_z および τ_{rz} は $z=0$ のとき0となり所期の境界条件を満たしている。従って前記の考え方に基き上記(24)~(27)による応力は半無限体内に起る応力を表す式とみることができる。なお上式中にはポアソン比 ν のみが含まれ、ヤング率を必要としていないことに注意を要する。

4.2 集中荷重の大きさがPなる条件の取入れ

前節で求めた応力(24)~(27)は集中荷重が作用する原点Oにおいては無限大となり適用できない。よって原点を中心として削り貫いた微小半球面に作用する垂直応力の合力をPに等置する。(図-1)。半球面に外接し3角形断面をもつリング要素に作用している応力のz方向成分は

$$Z = -(\tau_{rz} \cdot \sin\psi + \sigma_z \cdot \cos\psi) \quad (28)$$

で与えられる。従ってZを半球面の内面積にわたって積分した値がPに等しいから

$$P = 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} Z \cdot r \cdot R_0 d\psi \quad (29)$$

が成立する。この式に(28)を代入し、かつ

$$\sin(\psi) = \frac{r}{R_0} \quad \cos(\psi) = \frac{z}{R_0} \quad (30)$$

とおくと(29)は次式となる。ここに R_0 は小球面の半径、 ϕ は R_0 とz軸との挟む角である(図-1)：

$$P = -2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} (\tau_{rz} \cdot r^2 + \sigma_z \cdot r \cdot z) d\psi \quad (31)$$

この式の積分は先ず被積分項の σ_z と τ_{rz} に式(25),(26)を代入しその結果を式(30)の関係を用いて $\sin\phi$ と $\cos\phi$ の関数形に置換える。その際 $\sin\phi$ と $\cos\phi$ に置換えられずに残る R_0 のみの関数項は、 R_0

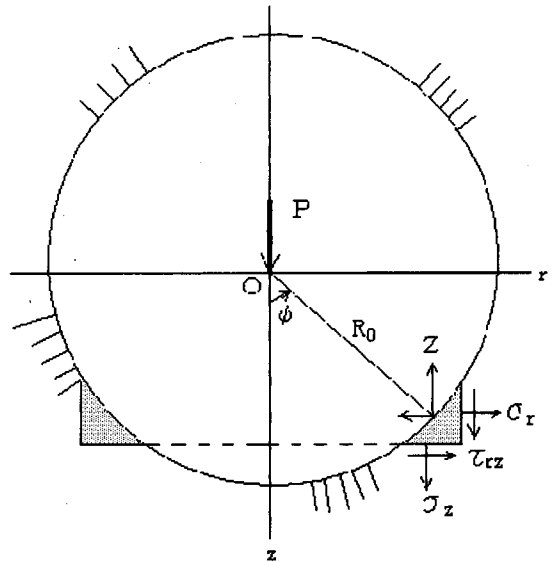


図-1 荷重点を中心とする微小球面の分布応力

が小球面の半径であつて ϕ の関数ではないから積分の外に出すことができる。かくて積分結果

$$B_1 = \frac{P}{2\pi} - \frac{21}{20} \cdot \frac{A_2}{R_0^3} + \frac{56 \cdot (1-\nu)}{75} \cdot \frac{B_2}{R_0} \quad (32)$$

が得られる。式(32)のような有限の関係が得られたことは当初の応力関数の選定が適當であつたことを示している。もし仮に式(9)の応力関数項の内 ϕ_{A4} に替えて例えば式(8)の B_3 を係数とする ϕ_{B3} を選んでいたとすると被積分項には $\cos 2\phi / \sin\phi$ なる項が現れ、積分は無限大となつて有意な定数間の関係式は得られなかつたであろう。式(8)の ϕ_{A3} を選んでも同様に無限大となる。さて式(32)の B_1 を式(24)(27)に代入すれば B_1 は消え目的とする2個の定数 A_2 、 B_2 を含む拡張式が次記式(33)~(36)のとおり求められる。式中の R_0 は任意の有限値であるから実数値による計算時には1とおくことができる。なお式(33)~(36)において $A_2=B_2=0$ とおけば Boussinesq の基本式に一致する。

$$\sigma_r = \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \left[\left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot z}{R^5} \right] + \sigma_{rA2} + \sigma_{rB2} \right] \quad (33)$$

ここに

$$\begin{aligned} \sigma_{rA2} &= A_2 \cdot \left[\frac{-12}{R^5} + \frac{54}{5} \cdot \frac{r^2}{R^7} - \frac{546}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^9} + 189 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^4} + \frac{21}{20 \cdot R_0^3} \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \left(\frac{z}{r^2 \cdot R} - \frac{1}{r^2} \right) - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot z}{R^5} \right] \right] \\ \sigma_{rB2} &= B_2 \cdot \left[\frac{-2}{5} \cdot (8 - \nu) \cdot \frac{1}{R^3} + \frac{6}{5} \cdot (1 + 3 \cdot \nu) \cdot \frac{z^2}{R^5} + \frac{81 - 12 \cdot \nu}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^7} \dots \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left[\frac{119}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} - 21 \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{231}{5} \cdot \frac{r^6 \cdot z^4}{R^{13}} + \frac{56}{75 \cdot R_0} \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot z}{R^5} \right] \right] \right] \\ \sigma_z &= \frac{-3 \cdot P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5} + \sigma_{zA2} + \sigma_{zB2} \end{aligned} \quad (34)$$

ここに

$$\begin{aligned} \sigma_{zA2} &= A_2 \cdot \left(108 \cdot \frac{z^2}{R^7} - 84 \cdot \frac{z^4}{R^9} - 567 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^2 \cdot z^6}{R^{13}} + \frac{63}{20 \cdot R_0^3} \cdot \frac{z^3}{R^5} \right) \\ \sigma_{zB2} &= B_2 \cdot \left[-2 \cdot (4 + \nu) \cdot \frac{z^2}{R^5} + 2 \cdot (8 - \nu) \cdot \frac{z^4}{R^7} + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left(-21 \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} + 63 \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} - \frac{231}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^6}{R^{13}} - \frac{56}{25 \cdot R_0} \cdot \frac{z^3}{R^5} \right) \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{-3P}{2\pi} \cdot \frac{r \cdot z^2}{R^5} + \tau_{rzA2} + \tau_{rzB2} \end{aligned} \quad (35)$$

ここに

$$\begin{aligned} \tau_{rzA2} &= A_2 \cdot \left(18 \cdot \frac{r \cdot z}{R^7} + 42 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^9} - 378 \cdot \frac{r^3 \cdot z^3}{R^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{r^3 \cdot z^5}{R^{13}} + \frac{63}{20 \cdot R_0^3} \cdot \frac{r \cdot z^2}{R^5} \right) \\ \tau_{rzB2} &= B_2 \cdot \left[-(3 + 6 \cdot \nu) \cdot \frac{r \cdot z}{R^5} + 15 \cdot \frac{r \cdot z^3}{R^7} + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left(-7 \cdot \frac{r^5 \cdot z}{R^9} + 42 \cdot \frac{r^5 \cdot z^3}{R^{11}} - \frac{231}{5} \cdot \frac{r^5 \cdot z^5}{R^{13}} - \frac{56}{25 \cdot R_0} \cdot \frac{r \cdot z^2}{R^5} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot (1 - 2\nu) \cdot \left(\frac{-1}{r^2} + \frac{z}{r^2 \cdot R} + \frac{z}{R^3} \right) + \sigma_{\theta A2} + \sigma_{\theta B2} \quad (36)$$

ここに

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta A2} &= \frac{A_2}{5} \cdot \left[\frac{6}{R^5} - 66 \cdot \frac{z^2}{R^7} + 126 \cdot \frac{r^2 \cdot z^2}{R^9} - 189 \cdot \frac{r^2 \cdot z^4}{R^{11}} - \frac{21 \cdot (1 - 2\nu)}{4 \cdot R_0^3} \cdot \left(\frac{z}{R^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) \right] \\ \sigma_{\theta B2} &= B_2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left[\frac{1}{R^3} - 3 \cdot \frac{z^2}{R^5} + \frac{r^4}{5 \cdot R^7} - \frac{14}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^2}{R^9} + \frac{21}{5} \cdot \frac{r^4 \cdot z^4}{R^{11}} + \frac{56 \cdot (1 - 2\nu)}{75 \cdot R_0} \cdot \left(\frac{z}{R^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2 \cdot R} \right) \right] \end{aligned}$$

5. Boussinesq 拡張式の適用例

前節において導いた Boussinesq の拡張式の適用例として、半径 a なる厚さ 0 の垂直円筒面が半無限体の表面から下方無限大の深さまで掘込まれている場合を想定する。(図-2) この円筒面内外の岩盤の隙間幅は 0 であるにも拘らず内外の岩盤の連結は切断され、この面に作用する σ_r と τ_{rz} は共に 0 であるとする。但し円筒頂面の内外の岩盤は連結しているものとする。(例えば平板載荷試験のフェーシング設置) 前節でみたように、全無限体内部の境界面に作用する応力が 0 である場合は(そうなるように定数値が選定されれば)境界面内外の岩体の応力はそれぞれの岩体の応力を表す。よっていまの場合円筒面内部の岩体は集中荷重を受ける円柱又は杭を表し、円筒外部の岩体は中心測定孔を持ちフェーシングを設置した平板載荷試験(但し集中荷重の場合)に相当する。よって前節で誘導した拡張式において $r=a$ のときの σ_r と τ_{rz} が共に 0 となるように A_2 と B_2 を選べば $r < a$ なる

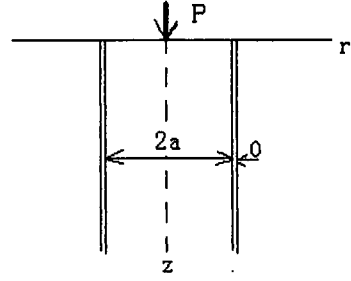


図-2 内部に円筒境界面をもつ岩盤

部分の岩体は円柱に生ずる応力を、又 $r > a$ なる部分の岩体は中心測定孔を持つ平板載荷試験における岩盤内部応力をそれぞれ与えることとなる。特に後者の応力は中心測定孔の存在の有無による岩盤内応力の変化を示すものとなる。さて式(34),(35)において $r=a$ のときの σ_r と τ_{rz} の値を 0 とおけば (σ_z と σ_θ は垂直円筒面には現れない) A_2 と B_2 の関係式が次式のように求められ、さらにそれらを式(33)~(36)に代入することにより円柱内及び測定孔周辺岩盤内応力を得ることができる。

$$A_2 = \frac{-\lambda_{10} \cdot \lambda_{32} + \lambda_{30} \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{11} \cdot \lambda_{32} - \lambda_{31} \cdot \lambda_{12}} \quad (37)$$

$$B_2 = \frac{-\lambda_{10} \cdot \lambda_{31} + \lambda_{30} \cdot \lambda_{11}}{\lambda_{12} \cdot \lambda_{31} - \lambda_{32} \cdot \lambda_{11}} \quad (38)$$

ここに

$$\lambda_{10} = \frac{P}{2\pi} \cdot \left[\frac{K}{a^2} \cdot \left(1 - \frac{z}{R_0} \right) - 3 \frac{a^2 \cdot z}{R_0^5} \right]$$

$$\lambda_{11} = \frac{-12}{R_0^5} + \frac{54}{5} \cdot \frac{a^2}{R_0^7} - \frac{546}{5} \cdot \frac{a^2 \cdot z^2}{R_0^9} + 189 \cdot \frac{a^2 \cdot z^4}{R_0^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{a^4 \cdot z^4}{R_0^{13}} - \frac{21}{20 \cdot R_0^3} \cdot \left[\frac{K}{a^2} \cdot \left(1 - \frac{z}{R_0} \right) - 3 \frac{a^2 \cdot z}{R_0^5} \right]$$

$$\lambda_{12} = \frac{-2 \cdot (8 - \nu)}{5 \cdot R_0^3} + \frac{6 \cdot (1 + 3 \cdot \nu)}{5} \cdot \frac{z^2}{R_0^5} + \frac{81 - 12 \cdot \nu}{5} \cdot \frac{a^2 \cdot z^2}{R_0^7} \dots$$

$$+ K \cdot \left[\frac{119}{5} \cdot \frac{a^4 \cdot z^2}{R_0^9} - 21 \cdot \frac{a^4 \cdot z^4}{R_0^{11}} + \frac{231}{5} \cdot \frac{a^6 \cdot z^4}{R_0^{13}} + \frac{56}{75 \cdot R_0} \cdot \left[\frac{K}{a^2} \cdot \left(1 - \frac{z}{R_0} \right) - 3 \cdot \frac{a^2 \cdot z}{R_0^5} \right] \right]$$

$$\lambda_{30} = -3 \cdot \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{a \cdot z^2}{R_0^5}$$

$$\lambda_{31} = 18 \cdot \frac{a \cdot z}{R_0^7} + 42 \cdot \frac{a \cdot z^3}{R_0^9} - 378 \cdot \frac{a^3 \cdot z^3}{R_0^{11}} + \frac{2079}{5} \cdot \frac{a^3 \cdot z^5}{R_0^{13}} + \frac{63}{20 \cdot R_0^3} \cdot \frac{a \cdot z^2}{R_0^5}$$

$$\lambda_{32} = -(3 + 6 \cdot \nu) \cdot \frac{a \cdot z}{R_0^5} + 15 \cdot \frac{a \cdot z^3}{R_0^7} + K \cdot \left(-7 \cdot \frac{a^5 \cdot z}{R_0^9} + 42 \cdot \frac{a^5 \cdot z^3}{R_0^{11}} - \frac{231}{5} \cdot \frac{a^5 \cdot z^5}{R_0^{13}} - \frac{56}{25 \cdot R_0} \cdot \frac{a \cdot z^2}{R_0^5} \right)$$

ここに

$$K = 1 - 2\nu$$

(39)

$$R_0 = \sqrt{a^2 + z^2}$$

(40)

数値計算例

具体的な数値を前節で誘導した各式及び対応する Boussinesq の基本式に用いて岩盤内応力を算定する。入力値は $P=20000 \text{ kg f}$, $\nu=0.2$, a は NX 削孔半径に略等しい 3.75cm とし、応力の単位は kg/cm^2 を用いる。 $r=0 \sim 15\text{cm}$, $z=0 \sim 15\text{cm}$ の範囲内の各点について計算した結果を表-1, 表-2 及び図-3 に示す。

(実線は拡張式, 破線は基本式による計算値)

これらの図表より次のような事項が読取れる。

(a) 荷重中心線上の σ_z

荷重中心線上の σ_z の値を例えば $z=1\text{cm}$ の深さで比較すると、基本式使用の場合の 9549 kg/cm^2 に対し拡張式使用の場合は 200000 kg/cm^2 の圧縮となっており、円筒面の境界条件の影響が極めて大きく、円柱(又は杭)の応力は半無限体の応力の約 20 倍となる。これより深くなると両者共絶対値は減少するがその違いは依然として大きく例えば $z=15\text{cm}$ で原式計算値 42 kg/cm^2 が拡張式計算値では 1.9 kg/cm^2 に激減している。何れにしても境界条件の有無によ

る影響は大きい。

(b) $r=3.75\text{cm}$ 円筒面上の σ_r

中心測定孔をもつ平板载荷試験において測定孔の存在が測定値に与える影響をみるのが研究の一つの目的である。この為に中心孔の半径に相当する $r=3.75\text{cm}$ 円筒面上の応力の変化をみたのが表-3 および図-4 である。(内容は前掲の表-2 と同一であるが $z>15\text{cm}$ の部分を追加した) これらの表において $z=1\text{cm}$ の値を比較すると測定孔がない場合は 10.8 kg/cm^2 の圧縮であるのに対し測定孔がある場合は 18.5 kg/cm^2 の引張であり、絶対値は前者が大きくその後者に対する比率 A/B は 1.7 倍になっている。しかしながら深くなるとこの比率は逆転し、例えば $z=15\text{cm}$ では測定孔がない場合はなお 36 kg/cm^2 の圧縮が作用しているのに対し、測定孔がある場合は 2 kg/cm^2 の圧縮に急減している。ここで特長的なことは深くなると両応力とも絶対値は小さくなるが減少の割合は異なり、測定孔がある方が減少の度合いが著しく $z=30\text{cm}$ 以深では A/B は殆ど 0 となる。

表-1 定数 A_2 および B_2 の計算値

$z(\text{cm})$	0	1.0	2.0	3.0	3.75	7.5	15.0
A_2	0	-6594	3364	3115	2977	2925	3495
B_2	0	-4362	-562.765	-809.004	-742.544	281.938	2219

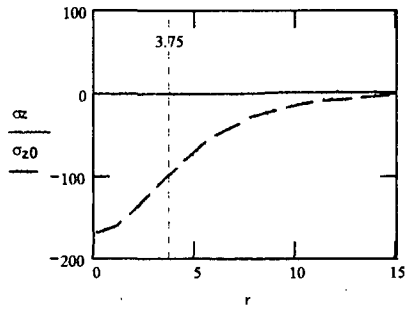
表-2 適用例の計算値

σ_r											
Boussinesq 拡張式使用の場合						Boussinesq 式使用の場合					
r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0	r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0
z=0 cm	-	543.25	135.81	33.953	8.488	z=0 cm	-	543.25	135.81	33.953	8.488
1.0	-	-1815	0	46.707	16.966	1.0	-	-487.18	-51.689	7.806	5.125
2.0	-	320.97	~0	3.062	0.036	2.0	-	-286.67	-121.80	-12.922	1.951
3.0	-	51.865	~0	2.023	0.543	3.0	-	-99.171	-106.75	-25.513	-0.872
3.75	-	8.568	~0	-0.051	0.484	3.75	-	-39.827	-80.264	-29.821	-2.689
7.5	-	-0.437	0	-0.423	-0.085	7.5	-	7.102	-9.957	-20.066	-7.455
15.0	-	-0.117	0	0.191	0.058	15.0	-	3.557	1.775	-2.489	-5.016

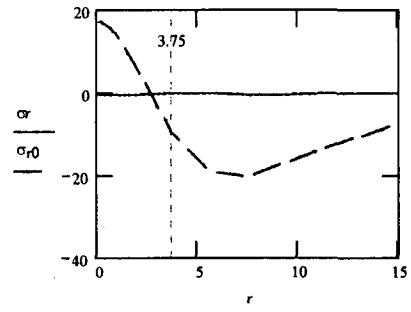
σ_z											
Boussinesq 拡張式使用の場合						Boussinesq 原式使用の場合					
r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0	r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0
z=0 cm	0	0	0	0	0	z=0 cm	0	0	0	0	0
1.0	-2*10 ⁵	21.162	18.508	2.022	0.081	1.0	-9549	-220.38	-10.845	-0.385	-0.012
2.0	2468	-167.61	27.98	2.359	0.081	2.0	-2387	-493.34	-55.096	-2.771	-0.096
3.0	241.98	2.087	13.024	4.076	0.213	3.0	-1061	-465.27	-100.94	-7.497	-0.308
3.75	53.675	6.828	3.830	3.570	0.262	3.75	-679.06	-388.72	-120.04	-12.147	-0.570
7.5	-1.061	-1.008	-0.919	-0.030	0.130	7.5	-169.76	-145.89	-97.179	-30.011	-3.037
15.0	-1.917	-2.003	-2.192	-2.329	-1.293	15.0	-42.441	-40.828	-36.473	-24.295	-7.503

τ_{rz}											
Boussinesq 拡張式使用の場合						Boussinesq 原式使用の場合					
r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0	r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0
z=0 cm	0	0	0	0	0	z=0 cm	0	0	0	0	0
1.0	0	494.80	0	2.167	0.210	1.0	0	-413.22	-40.669	-2.888	-0.187
2.0	0	46.339	~0	3.546	0.305	2.0	0	-462.51	-103.30	-10.167	-0.722
3.0	0	68.770	~0	3.823	0.5110	3.0	0	-290.79	-126.18	-18.742	-1.539
3.75	0	26.414	0	2.195	0.472	3.75	0	-194.36	-120.04	-24.295	-2.280
7.5	0	0.201	~0	-0.332	0.043	7.5	0	-36.473	-48.590	-30.011	-6.074
15.0	0	0.055	0	-0.434	-0.770	15.0	0	-5.103	-9.118	-12.147	-7.503

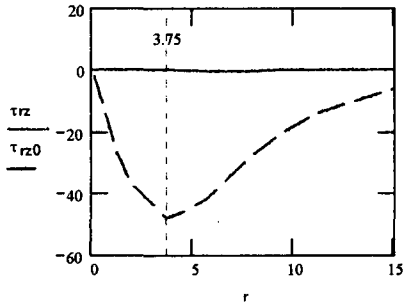
σ_θ											
Boussinesq 拡張式使用の場合						Boussinesq 原式使用の場合					
r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0	r=	0 cm	1.875	3.75	7.5	15.0
z=0 cm	-	-543.25	-135.81	-33.953	-8.488	z=0 cm	-	-543.25	-135.81	-33.953	-8.488
1.0	-	-462.29	-224.61	-71.156	-19.767	1.0	-	-88.570	-68.148	-25.057	-7.362
2.0	-	-96.208	6.139	2.828	1.083	2.0	-	38.460	-22.142	-17.037	-6.264
3.0	-	-43.109	-0.734	1.173	0.612	3.0	-	46.828	0.7610	-10.473	-5.223
3.75	-	-18.498	-1.821	0.462	0.290	3.75	-	39.827	8.238	-6.621	-4.492
7.5	-	-0.653	-0.370	-0.017	8*10 ⁻⁴	7.5	-	14.782	9.957	2.060	-1.655
15.0	-	-0.153	-0.113	-0.018	0.0040	15.0	-	4.098	3.695	2.489	0.515



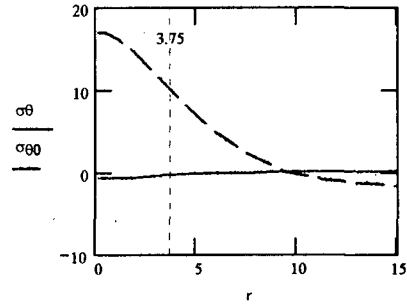
$z=7.5\text{cm}$ 面の σ_z の対比



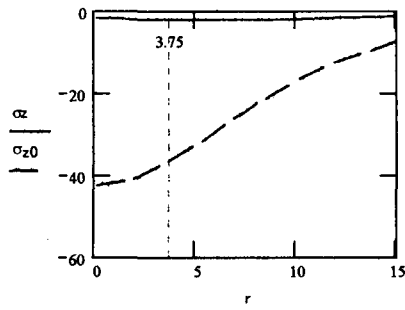
$z=7.5\text{cm}$ 面の σ_r の対比



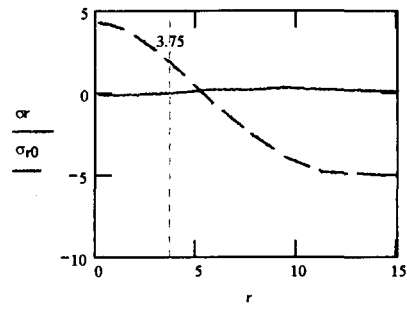
$z=7.5\text{cm}$ 面の τ_{rz} の対比



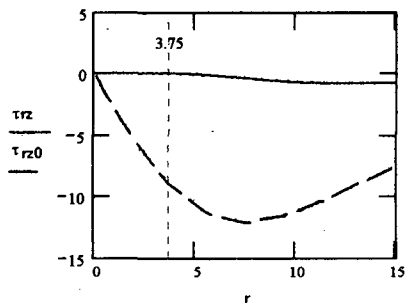
$z=7.5\text{cm}$ 面の σ_θ の対比



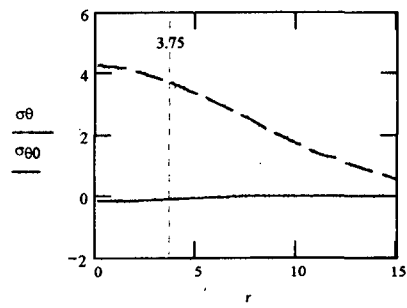
$z=15\text{cm}$ 面の σ_z の対比



$z=15\text{cm}$ 面の σ_r の対比



$z=15\text{cm}$ 面の τ_{rz} の対比



$z=15\text{cm}$ 面の σ_θ の対比

図-3 Boussinesq 原式と拡張式による岩盤内 $z=z$ 平面上における応力: σ_z , σ_r , τ_{rz} , σ_θ の対比

これらの結果は何れも測定孔の有無による測定値の違いが大きいことを示している。さらに測定孔がある場合、 $z>15\text{cm}$ で応力が殆ど0になることは、測定計器の精度にもよるが通常選ばれる 30cm 以深の測定位置での測定値が殆ど無意味な値となることを示している。以上要約して中心測定孔内における測定では有意な結果は得難い。

6. 応力関数の組合せについて

節2でみたように適合条件を満たす応力関数は数多くあり、従ってそれらの線形結合も無数にある。本研究においては4個の境界条件を満たす為、応力関数を構成する項数が最小なる組合せとして式(8)の ϕ_{A4} を含む式(9)を選んだ。しかして式(8)にある ϕ_{A3} 、 ϕ_{B3} を含む応力関数の組合せは節4.2において不適格であることをみた。よって残るのは ϕ_{B4} を含む組合せのみである。よって式(9)に代えて応力関数の組合せ

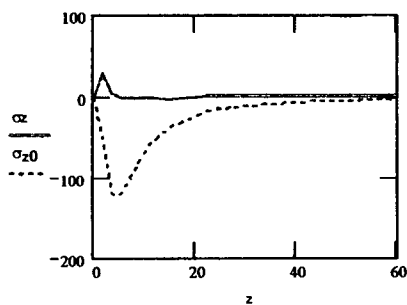
$$\phi = \phi_{B1} + \phi_{A2} + \phi_{B2} + \phi_{B4} \tag{41}$$

を用いた場合如何なる結果が得られるかを追跡した。手法は前記各節と同様である。その結果は、

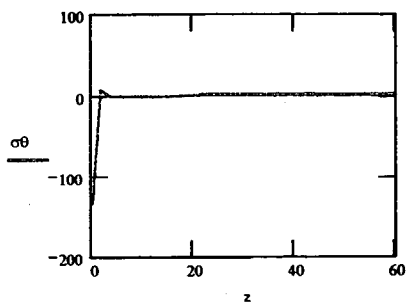
表-3 $r=3.75\text{cm}$ 円筒面深さ方向の σ_z の変化

z	拡張式の値 A	原式の値 B	A/B
0	0	0	
1.0	18.508	-10.845	-1.706
2.0	27.98	-55.096	-0.507
3.75	3.830	-120.04	-0.03
7.5	-0.919	-97.18	0.0095
15.0	-2.192	-36.47	0.060
30.0	0.023	-10.21	-0.0023
45.0	0.0026	-4.635	-0.0006
60.0	0.0006	-2.627	-0.0002

節4.2の積分は無限大とならず2定数 B_2, B_4 を含んで、式(33)~(36)に相当する応力式は得られたが、後続の式(37),(38)に相当する B_2, B_4 式の分母が($r=3.75, z=6.30175$)点付近において0となり、従ってこの点における σ_z 、 σ_θ の値は無限大となった。このような現象は実際には起り得ない。よって(41)の組合せは不適格である。従って与えられた境界条件を満たし、有意な結果を与える4個の応力関数の組合せは、候補となった ϕ_{A3} 、 ϕ_{B3} 、 ϕ_{B4} は消えて式(9)に限られることが判った。



$r = 3.75\text{cm}$ 円筒面の σ_z の対比



$r = 3.75\text{cm}$ 円筒面の σ_θ の対比

図-4 Boussinesq 原式と拡張式による $r = 3.75\text{cm}$ 円筒面上における応力： σ_z 、 σ_θ の対比

7. むすび

半無限体の表面に垂直集中荷重が作用したとき体内に発生する応力は周知の Boussinesq の基本式によって与えられている。本研究では組合せる応力関数の数を増加することにより、基本式の境界条件数を増加した拡張式を誘導した。即ち基本式が唯 1 個の応力関数に基いて導かれているのに対し、拡張式は 4 個の応力関数の組合せを用いた。この結果基本式では対応できない問題を拡張式によって解くことができる。その適用の一例として荷重中心軸沿いに垂直測定孔が削孔されている場合の平板載荷試験（但し集中荷重）による岩盤応力の理論値が測定孔がない場合の理論値と如何に異なるかを示した。即ち中心測定孔をもつ場合の解析結果によると、測定孔沿いの応力は、（測定孔が存在しない場合の理論値に比べて）深さの変化による応力の変化が激しく、かつ通常選定される 30cm 以深の測定位置における応力値は殆ど 0 となり、到底測定孔がない場合の理論値によって近似できるものではないことをみた。（現行の測定孔を設置した平板載荷試験により岩盤内応力を求める諸式は測定孔の存在を無視して樹てられている。）要するに測定孔内における変位、応力の測定から有意な結果は得られないことをみた。

従って従来中心測定孔を設置した平板載荷試験における測定値を測定孔の存在を無視した理論式に用いて算出された諸値及びこれに基いて展開された議論の信憑性は薄い。

今後の岩盤耐力および物性値の測定には、中心測定孔を設置する試験法に代えて、測定孔を載荷板から離れた位置に設置する試験法⁸⁾又は載荷板外の岩盤面において垂直、水平両変位を測定する平板載荷試験⁹⁾を採用すべきであろう。

しかして基本式、拡張式とも与えられる荷重は理論上はあり得ても実際には存在しない集中点荷重である。このため荷重作用点およびその近傍の応力は極端に大

きな非現実的な値となる。現実的な応力を得るには一定範囲内に集中荷重が連続して作用している分布荷重を考える必要がある。これは拡張式による応力を荷重分布範囲に亘って積分することによって得られるであろう。しかしながらいかに荷重分布による応力の平滑化が行われても荷重負担の最重要部である中心軸上の岩盤が切取られていることによる円孔周辺の応力の変化は避けることができない。本研究はこの応力変化の可能最大値を探ったものである。

最後に、基本式、拡張式とも応力を求める為に必要な岩盤物性値はポアソン比だけでよくヤング率は必要としないことに注目する。しかるに現行の平板載荷試験においてはヤング率（又は変形係数）の測定のみに終始しポアソン比は適当な仮定値等が用いられている。岩盤耐力の推定が主目的である以上原位置載荷試験におけるポアソン比測定の重要性を指摘したい。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko&J.N.Goodier: Theory of Elasticity, 3rd.edition, 1970, p.399.
- 2) S.P.Timoshenko&J.N.Goodier: Theory of Elasticity, 3rd.edition, 1970,
- 3) S.P.Timoshenko et al: op.cit., eq.(189), p.381
- 4) S.P.Timoshenko&J.N.Goodier: op.cit., eq.(194),(195),(202),(203), pp.384-390.
- 5) S.P.Timoshenko et al: op.cit., pp.398-401.
- 6) S.P.Timoshenko et al: op.cit., pp.392-394.
- 7) S.P.Timoshenko et al: op.cit.: eq.(210), p.400.
- 8) 高島康夫：フエシグ[®]を設置した等応力平板載荷試験地盤変位式の修正誘導とその適用，土木学会，応用力学論文集，Vol.2, 1999 年 8 月, pp.3-14.
- 9) 高島康夫：フエシグ[®]を設置した定変位平板載荷試験岩盤面変位式の誘導とその適用，土木学会，応用力学論文集，Vol.3, 2000 年 9 月, pp.13-24.

(2001 年 4 月 20 日受付)