

一般座標系風上DNSによる開水路乱流の構造解析

Direct Numerical Simulation of Open Channel Turbulence Using
Generalized Coordinate System and Upwind Difference Scheme

林 俊一郎*, 大本 照憲**, 矢北 孝一***, 平川 隆一****

Syunichiro HAYASHI, Terunori OHMOTO, Kouichi YAKITA, Ryuichi HIRAKAWA

*正会員 熊本県土木部 (〒862-8570 熊本市水前寺 6-18-1)

**正会員 工博 熊本大学助教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)

***正会員 熊本大学技官 工学部環境システム工学科 (同上)

****学生員 熊本大学大学院生 自然科学研究科博士後期課程 (同上)

Direct numerical simulations of fully developed turbulence in an open channel flow were performed to clarify the effects of coherent structure on flow dynamics under a free surface. A numerical analysis method was constructed in a generalized curvilinear coordinate system to apply arbitrary complicated boundary conditions. First, a fifth-order accurate upwind difference scheme for the convective term was considered in a one-dimensional linear convection problem to develop the appropriate discretization of the spatial derivatives. The results showed that the fifth-order upwind scheme yielded a superior performance in comparison with UTOPIA, conservative six-point scheme, TVD Lax-Wendroff, CIP and sixth-order central difference method. Furthermore, the direct numerical simulations were in good agreement with velocity fluctuation statistics of a conventionally obtained DNS data base and clarified the interaction of a coherent vortex with both a free surface and fixed wall.

key words: DNS, generalized curvilinear coordinate, open channel turbulence, upwind difference scheme

1. はじめに

カオスの発見は時空間的に不規則な振舞いをする多くの物理系が、決定論的方程式に従っていることを明らかにした。このことは、ナビエ・ストークス方程式を正確に計算すれば、流体现象を定量的に再現することが可能なことを意味しており¹⁾、コンピュータの目覚ましい発展も手伝い乱流を数値解析で捕らえようとする試みが近年盛んに行われている²⁾。特に直接数値シミュレーション (DNS) と呼ばれる数値解析法は、乱流モデルを一切含まない物理法則だけに基づく手法で、基礎式であるナビエ・ストークス方程式の適用範囲の広さや信頼性の高さ³⁾と相まって大きな期待が寄せられている。しかしながら、スペクトル法に代表される DNS は、工学的に要求される複雑境界形状の流れや高レイノルズ数流れへの適用が依然として困難な課題となっており、その克服に向けさまざまな研究が精力的に行われている。

そのなかで複雑境界流れへの取り組みとしては、一般座標系の導入が急速に進んでいる。しかし、計算格子系として広く採用されている staggered 格子では、一般座標系への拡張や高精度化が複雑かつ困難なうえ、演算負荷量も膨大なものとなることから³⁾、最近では collocate 格

子系の研究が急速に進展するなど^{4)~6)}、非 staggered 格子化の動きも見られる。特に、これまで主に単純境界の流れ場を対象としてきた DNS を、自由水面や任意の河床形状を有する複雑境界の問題へ適用するには、格子系に起因する計算負荷量をいかに軽減するかが極めて重要なことになると考えられる。

一方、高レイノルズ数流れへの取り組みとしては、対流項から次々に生成される高波数成分による aliasing 誤差の除去が不可欠なことから、3次精度風上差分⁷⁾の導入が定着している。このスキームは高波数成分をカットする一種の数値フィルターとなっており⁸⁾、その強い数値的安定性から、任意形状周りの流体解析など実用計算を目的とした汎用ソフトで広く採用されている。しかし、このスキームの持つ数値粘性による影響が指摘されており⁹⁾、これまでも精度の評価を始め多くの研究がなされている。これに対し、Rai & Moin¹⁰⁾ は乱流解析において5次精度風上差分スキームが有効であることを示した。また、宮内ら¹¹⁾ による一様等方性乱流への適用の結果、実験やスペクトル法とも良い一致を示すことが報告されるなど、5次精度風上差分はより実用性の高い問題へのアプローチを可能にすることが期待される。なお、工学的に要求される高レイノルズ数流れのDNS解析が、近い将

来を含め依然困難な状況にあることを考えると、実行可能な計算機環境の中で風上差分のような一種の数値フィルターの影響を把握しつつ、少しずつ適用範囲を広げていくことも、重要なことと考えられる。

これらを念頭に著者らは、一般座標系 regular 格子を用いることで任意境界形状への適用と演算負荷量の軽減を図るとともに、5 次精度の風上差分と 3 次精度の時間離散化法をカップリングすることで、計算精度と数値的安定性を確保した DNS (以後、「一般座標系風上 DNS」) を構築した。第一報¹²⁾では、風上差分と低次の時間進行法のカップリングにおいては時間的位相誤差が生じ、その対策には時間進行法に 3 次精度 Adams-Bashforth 法を用いることが有効であることを示した。第二報¹³⁾では、regular 格子で懸念される数値的振動の発生が不等間隔格子により抑えられる一方、その設定の如何によっては重大な位相誤差を伴うなど格子生成の重要性を指摘した。

本報では、まず①高精度・高解像度スキームと言われる離散化手法との比較により、5 次精度風上差分の精度評価を行う。次に②座標変換を 3 次元に拡張した一般座標系 DNS を構築し、任意境界問題の取り扱いを可能にするとともに、最後に③開水路乱流場へ適用し、その三次元乱流構造解析を行うことを目的とする。

2. 高次精度スキームの比較

非線形項である対流項は、aliasing 誤差を引き起こす高波数成分の発生源となっており、特別な配慮を施さないと安定な解が得られないことが良く知られている¹⁴⁾。この不安定さを除去するには風上差分が有効であるものの、数値粘性による影響があることもまた事実である。

ここでは、5 次精度風上差分が高精度・高解像度スキームとして知られる他の離散化手法¹⁵⁾と比較し、どの程度のパフォーマンスを有するかを確認する。なお、比較に用いたスキームは、CIP 法¹⁶⁾、TVD Lax-Wendroff 法¹⁷⁾、保存型 6-point scheme¹⁸⁾、UTOPIA 法¹⁹⁾、5 次風上差分、および、6 次中心差分の 6 種類とし、式 (1) に示す二次元線形対流問題を例題に数値実験を行う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (U=1, -\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x - \pi)}{2}, & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3)$$

初期値には、式 (2) に示す偶数階微分が不連続点を有する滑らかな余弦波²⁰⁾、および式 (3) に示す不連続な

波形を有する矩形波の 2 種類とする。なお、本問題の厳密解は初期値が保存されることから、解析には計算領域の両端に周期境界条件を採用することで、 m 周回後の数値解と厳密解の比較を行うことにする。

図-1 は、クーラン数が $C=0.1$ の場合の、(A)余弦波の波形状況、(B)矩形波の波形状況、および、両波の(C)波高ピークの減衰状況と、(D)二乗残差の平方根で表した振幅誤差についての経時変化を示したものである。

これより、まず UTOPIA 法では、余弦波において単調にピークが減衰するのに加え、偶数回微分の不連続点において負値が見られる。さらに、矩形波においても不連続面の再現性が徐々に悪くなるなど、基本的に 3 次精度の風上差分であることから、数値粘性の影響が顕著に現れていることが分かる。なお、時間進行は 3 次 Adams-Bashforth 法を用いた。保存型 6-point scheme は、余弦波・矩形波ともに短時間の進行では追従性は良好であるが、長時間の移流では急激に減衰するなど、1 次精度スキームとしての限界が認められる。TVD Lax-Wendroff 法では、矩形波において不連続面の解像能力が優れている一方、余弦波においてはピークを平坦化させてしまうなど TVD スキームに特有の特徴が認められる。

これに対し、CIP 法、5 次風上および 6 次中心は、矩形波において数値振動が生じるなど高次精度スキームに共通する現象が見られ、不連続面の再現能力は特別に優れているとは言えない。特に、6 次中心における数値振動は甚だしく、奇数階である対流項に中心差分を用いた場合、feedback sensitivity は常に 0 となる¹⁴⁾ことを考えると、一旦発生した数値振動はもはや抑えることができないことが分かる。一方、余弦波においては三者とも極めて良好な結果を示し、ほとんど差がないように見える。しかし、(C)波高減衰状況を比較すると、CIP 法において余弦波のピークに減衰傾向が認められるのに対し、5 次風上と 6 次中心にはほとんど減衰が生じていないことが分かる。さらに、(D)振幅誤差状況を比較すると、CIP 法は 5 次風上や 6 次中心に比べ、余弦波の振幅誤差が 1 オーダー近く大きく、振幅誤差の成長速度も三者の中では CIP 法が最も速いことが分かる。

次に、5 次風上は、6 次中心に偶数階 (6 階) 微分型の打ち切り誤差 (数値粘性) を加えた関係にあることから、両者を比較することにより数値粘性の影響を検討することができる。まず余弦波からは、波形・波高減衰・振幅誤差のいずれについても両者に差はなく、6 階微分型の数値粘性は減衰効果が極めて小さいことが期待できる。一方、矩形波の比較から、風上差分においては偶数階微分の持つ散逸性が、中心差分で見られた空間的振動を抑制し数値計算を安定化させる効果が認められる。

以上、衝撃波や圧縮性乱流を対象としない限り総合的に判断すると、5 次風上差分は高次精度スキームの中では最も優れており、また数値粘性が少ないと言われる CIP 法と較べても²¹⁾、同等もしくはそれ以上のパフォーマンスを有するなど、高精度が要求される乱流の DNS 解析には有効であることが確認された。

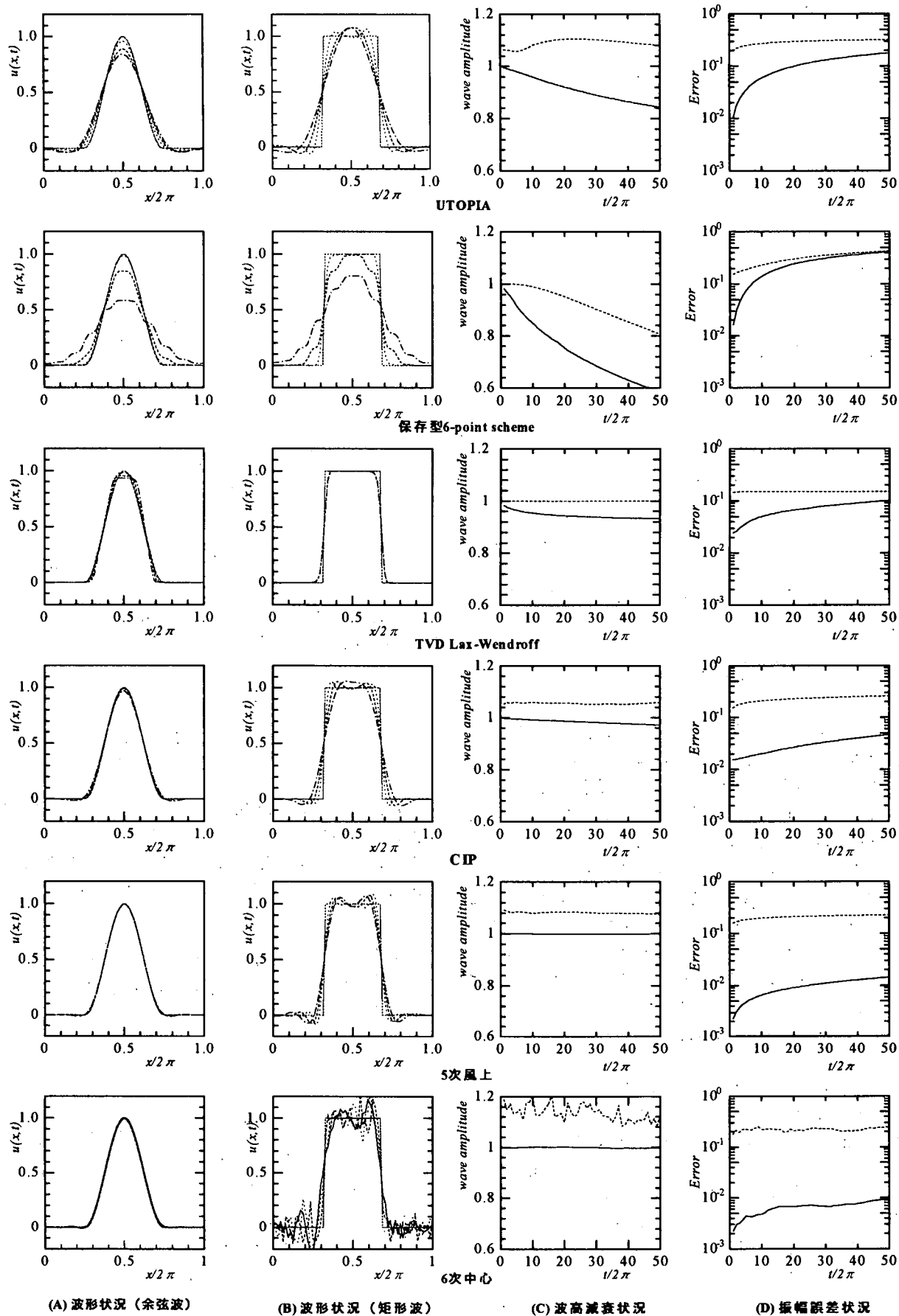


図-1 高次精度・高解像度スキームの比較 (C=0.1)

3. 開水路乱流への適用

河川や海洋など自由水面を有する乱流場へのDNSは、Lam & Banerjee²²⁾により初めて実施されて以来、実験では容易に捕らえられない自由水面近傍の乱流構造や物質輸送に関する重要な情報を提供し始めている^{23)~27)}。しかし、いずれもスペクトル法もしくはstaggered格子を用いた差分法によるものであり、regular格子を用いた解析は見受けられない。ここでは著者が構築したregular格子を用いた一般座標系風上DNSを開水路乱流へ適用することによりその精度と有用性を検討する。

さらに、平行平板間流れとの比較から、開水路乱流の特徴や構造について併せて考察する。

3.1 計算対象の概要

計算対象は、図-2に示す底面が平滑な固体壁で、上面には変形を考慮しないゼロ・フルード数近似²⁸⁾の自由水面を有する完全発達した開水路乱流場とする。なお、流下方向とスパン方向には周期境界条件を与え、側壁の効果がない流れ場とする。流れは x 軸と水平線のなす角度が θ となるよう傾斜させ、重力により流下させるものとする。このとき摩擦速度と重力の関係は式(4)により表される。

$$u_{\tau} = \sqrt{gh \sin \theta} \quad (4)$$

ここで、重力と静水圧がつり合った状態を基準圧力にし、摩擦速度と平均圧力勾配の関係を用いると、無次元化された重力は平均圧力勾配を-1に設定したものと等価になることから、重力による効果は x 軸方向へ平均圧力勾配を付加することで計算に取り込むことができる。この結果、本計算におけるパラメータはレイノルズ数のみとなる。なお、staggered格子を用いたNagaosa²⁹⁾の結果と比較するため、計算領域は、水深 h 、流下方向長さ $2\pi h$ 、スパン方向長さ πh とし、断面平均流速と水深で定義したレイノルズ数は2280とする。これは摩擦速度で定義したレイノルズ数で約150に相当することから、内部変数表示で領域を表現すれば、 $x^+ \doteq 942$ 、 $y^+ \doteq 150$ 、 $z^+ \doteq 471$ となる。

格子系には、一般座標系での計算負荷量を軽減させるため、regular格子を採用する。なお、regular格子で懸念される数値的振動³⁰⁾については、不等間隔格子を採用することで除去が可能であり^{12), 13)}、このことは粘性底層からバッファ層にかけての壁面乱流のダイナミズムが顕著な壁面領域、および自由水面領域に十分な格子点を集中させる一方、中間領域で相対的に粗い格子点を配置するなど、効率的なシミュレーションへの寄与も可能となる。格子分割には $96 \times 97 \times 96$ の密格子と、 $64 \times 65 \times 64$ の粗格子の2種類を用い、風上差分で問題となる格子依存性についても確認する。この結果、解像度は密格子において、概ね $\Delta x^+ = 9.8$ 、 $\Delta y^+ = 0.1 \sim 2.8$ 、 $\Delta z^+ = 4.9$ 、粗格子で $\Delta x^+ = 14.7$ 、 $\Delta y^+ = 0.1 \sim 6.7$ 、 $\Delta z^+ = 7.4$ となった。

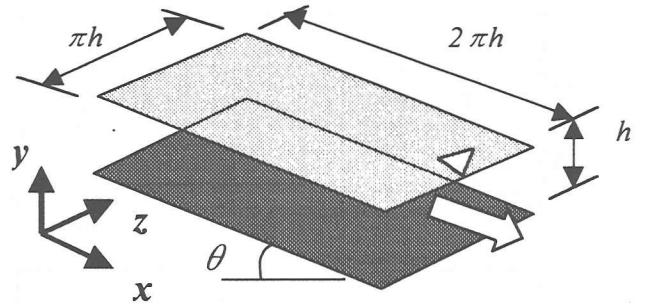


図-2 計算対象の概要

3.2 3次元一般座標系への基礎式の変換

支配方程式は、連続式とナビエ・ストークス方程式とし、圧力の解法にはMAC法を採用する。物理空間と計算空間の変数変換は、式(5)に示す3次元座標変換とし、三次元的に変化する任意境界問題への適用を可能にする。

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (5)$$

ここで、プログラミングの簡単化と見通しを良くするため、次のような変数 $a_{i,j}$ を定義する。

$$a_{i,j} = \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \xi_{j+1}} \frac{\partial x_{i+2}}{\partial \xi_{j+2}} - \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \xi_{j+2}} \frac{\partial x_{i+2}}{\partial \xi_{j+1}} \quad (6)$$

ただし、 i, j は1~3、もしくは、 $x \sim z$ とするが、添字が4, 5の場合には、1, 2もしくは x, y へ循環するものとする。式(6)を用いると、1階微分および2階微分は次式のように表現される。なお、 J はヤコビアンとする。

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \\ u_{xy} \\ u_{yz} \\ u_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,1} & f_{x,2} & f_{x,3} & f_{x,4} & f_{x,5} & f_{x,6} & f_{x,7} & f_{x,8} & f_{x,9} \\ f_{y,1} & f_{y,2} & f_{y,3} & f_{y,4} & f_{y,5} & f_{y,6} & f_{y,7} & f_{y,8} & f_{y,9} \\ f_{z,1} & f_{z,2} & f_{z,3} & f_{z,4} & f_{z,5} & f_{z,6} & f_{z,7} & f_{z,8} & f_{z,9} \\ g_{xy,1} & g_{xy,2} & g_{xy,3} & g_{xy,4} & g_{xy,5} & g_{xy,6} & g_{xy,7} & g_{xy,8} & g_{xy,9} \\ g_{yz,1} & g_{yz,2} & g_{yz,3} & g_{yz,4} & g_{yz,5} & g_{yz,6} & g_{yz,7} & g_{yz,8} & g_{yz,9} \\ g_{zx,1} & g_{zx,2} & g_{zx,3} & g_{zx,4} & g_{zx,5} & g_{zx,6} & g_{zx,7} & g_{zx,8} & g_{zx,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\xi\xi} \\ u_{\eta\eta} \\ u_{\zeta\zeta} \\ u_{\xi\eta} \\ u_{\xi\zeta} \\ u_{\eta\zeta} \\ u_{\xi\xi} \\ u_{\xi\eta} \\ u_{\xi\zeta} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここで、係数 f, g は $a_{i,j}$ を用いることにより、次式のように表現される。

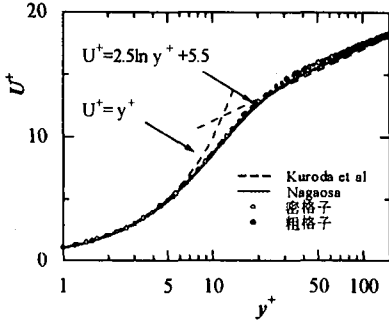


図-3 平均流速分布

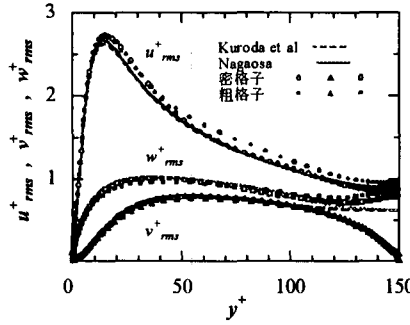


図-4 乱れ強さの分布

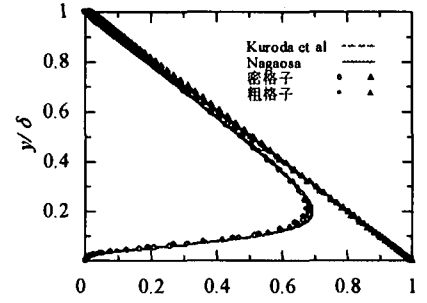


図-5 レイノルズ応力と全せん断応力分布

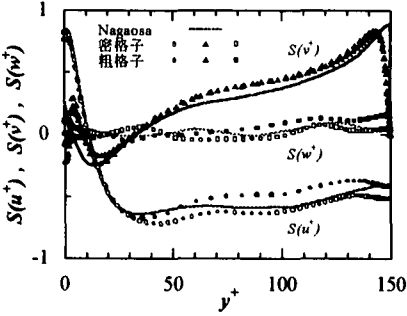


図-6 スキューネス

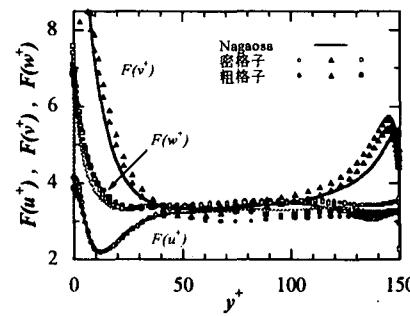


図-7 フラットネス

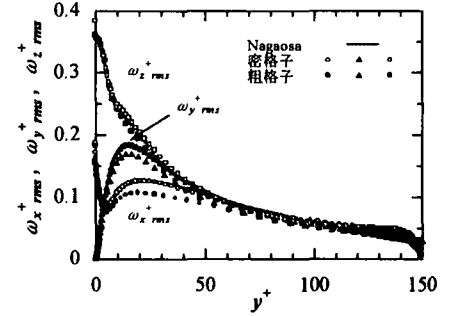


図-8 渦度変動の r.m.s

$$\begin{aligned}
 f_{1,1} &= \frac{1}{J} a_{1,1}^2, \quad f_{1,2} = \frac{1}{J} a_{1,2}^2, \quad f_{1,3} = \frac{1}{J} a_{1,3}^2 \\
 f_{1,4} &= \frac{2}{J^2} a_{1,1} a_{1,2}, \quad f_{1,5} = \frac{2}{J^2} a_{1,2} a_{1,3}, \quad f_{1,6} = \frac{2}{J^2} a_{1,3} a_{1,1} \\
 f_{1,7} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{1,1} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial \xi} + a_{1,2} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial \eta} + a_{1,3} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{1,1}^2 \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{1,1} a_{1,2} \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{1,1} a_{1,3} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) \\
 f_{1,8} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{1,1} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \xi} + a_{1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \eta} + a_{1,3} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{1,2} a_{1,1} \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{1,2}^2 \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{1,2} a_{1,3} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) \\
 f_{1,9} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{1,1} \frac{\partial a_{1,3}}{\partial \xi} + a_{1,2} \frac{\partial a_{1,3}}{\partial \eta} + a_{1,3} \frac{\partial a_{1,3}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{1,3} a_{1,1} \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{1,3} a_{1,2} \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{1,3}^2 \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right)
 \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
 g_{mn,1} &= \frac{1}{J^2} a_{m,1} a_{n,1}, \quad g_{mn,2} = \frac{1}{J^2} a_{m,2} a_{n,2}, \quad g_{mn,3} = \frac{1}{J^2} a_{m,3} a_{n,3} \\
 g_{mn,4} &= \frac{1}{J^2} (a_{m,1} a_{n,2} + a_{m,2} a_{n,1}) \\
 g_{mn,5} &= \frac{1}{J^2} (a_{m,2} a_{n,3} + a_{m,3} a_{n,2}) \\
 g_{mn,6} &= \frac{1}{J^2} (a_{m,3} a_{n,1} + a_{m,1} a_{n,3}) \\
 g_{mn,7} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{m,1} \frac{\partial a_{n,1}}{\partial \xi} + a_{m,2} \frac{\partial a_{n,1}}{\partial \eta} + a_{m,3} \frac{\partial a_{n,1}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{m,1} a_{n,1} \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{m,2} a_{n,1} \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{m,3} a_{n,1} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) \\
 g_{mn,8} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{m,1} \frac{\partial a_{n,2}}{\partial \xi} + a_{m,2} \frac{\partial a_{n,2}}{\partial \eta} + a_{m,3} \frac{\partial a_{n,2}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{m,1} a_{n,2} \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{m,2} a_{n,2} \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{m,3} a_{n,2} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) \\
 g_{mn,9} &= \frac{1}{J^2} \left(a_{m,1} \frac{\partial a_{n,3}}{\partial \xi} + a_{m,2} \frac{\partial a_{n,3}}{\partial \eta} + a_{m,3} \frac{\partial a_{n,3}}{\partial \zeta} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{J^3} \left(a_{m,1} a_{n,3} \frac{\partial J}{\partial \xi} + a_{m,2} a_{n,3} \frac{\partial J}{\partial \eta} + a_{m,3} a_{n,3} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right)
 \end{aligned}$$

(10)

これらを用い基礎式を計算空間へ写像するが、具体的計算は以下に示す Fractional Step 法³¹⁾によるアルゴリズムによって解析を進める。ここでの特徴は、中間速度場を求める発展方程式の非線形項に陽解法の3次精度 Adams-Bashforth 法、線形の粘性項に陰解法の2次精度 Crank-Nicolson 法を用いたことで、時間的位相誤差の除去¹²⁾を始め、陽解法によるコンパクト化と陰解法による収束性と数値的安定化、さらに速度と圧力の分離による解法全体の縮小化を同時に達成したことである。

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} (23H^n - 16H^{n-1} + 5H^{n-2}) + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\tilde{U} + U^n) \quad (11)$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\text{div} \tilde{U}}{\Delta t} \quad (12)$$

$$\frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} = -\text{grad} p^{n+1} \quad (13)$$

ここで H は対流項を表し、 n は時間レベルを示すものとする。圧力ポアソン方程式は4次精度で離散化を行うとともに、新ステップの速度場は、圧力に対し Euler の後退スキームを適用して計算する。なお、圧力ポアソン方程式およびナビエ・ストークス方程式における Crank-Nicolson 法の反復解法には面 Gauss-Seidel 法を用い、収束判定には平均自乗残差でそれぞれ 10^4 , 10^9 とした。境界条件には、底面において流速にノンスリップ条件、圧力にノイマン条件、自由水面では流速 u , w にスリップ条件、 v と p には0を与えた。

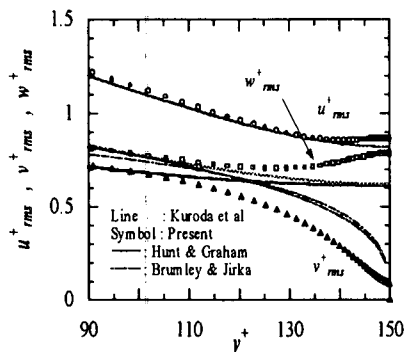


図-9 乱れ強さの拡大図

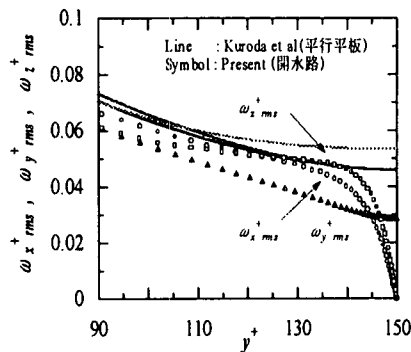


図-10 渦度変動の拡大図

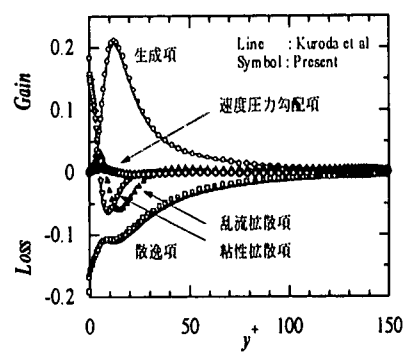


図-11 乱れエネルギーの収支

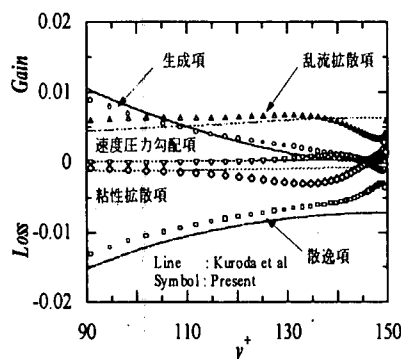


図-12 乱れエネルギー収支の拡大図

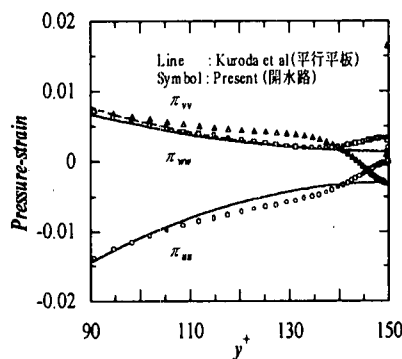


図-13 圧力・歪み相関の分布

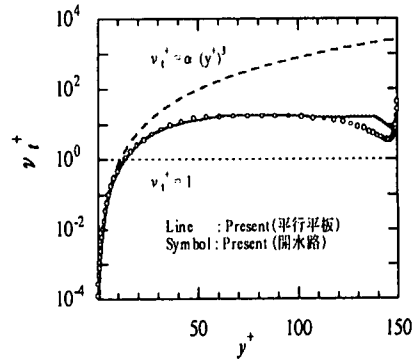


図-14 渦動粘性係数の分布

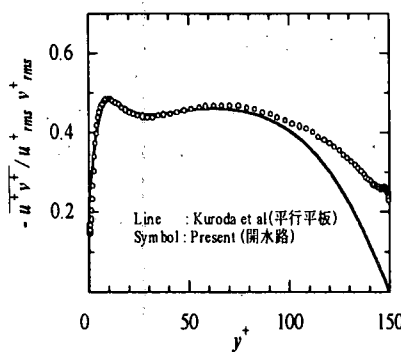


図-15 レイノルズ応力の相関係数

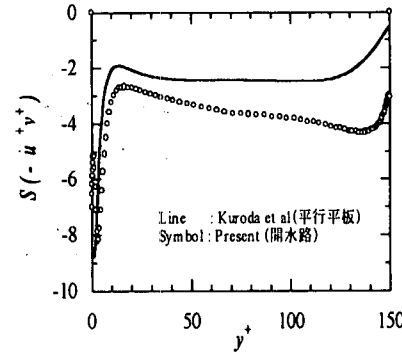


図-16 レイノルズ応力のスキューネス

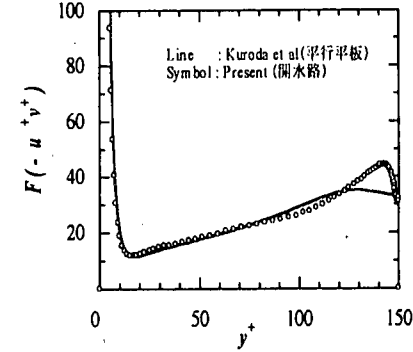


図-17 レイノルズ応力のフラットネス

3.3 計算手法の検証

自由水面流れの DNS データベースは未だ見受けられないことから、本研究の精度検証は先行する Nagaosa の結果²⁹⁾、および平行平板間流れの代表的データベース³⁰⁾との比較により行う。なお、統計量は 100,000 ステップ ($\Delta t = 2/1000 \cdot \delta/u_\tau$) の時間平均から算出した。

図-3 から図-5 は、平均流速、乱れ強さ、およびレイノルズ応力と全せん断応力の各分布を比較したものである。本計算の結果は、Nagaosa 等の結果と良く一致しており、十分に乱れを発達させれば、密格子と粗格子ではほとんど差はなく格子依存性はあまり認められない。

一方、図-6 から図-8 は、速度変動の 3 次および 4 次モーメントを無次元化したスキューネスとフラットネス、および渦度変動強さの分布を比較したものである。Nagaosa の結果は、スカラー輸送方程式を連成させたものであるため直接の比較は馴染まないが、水面の極く近

傍での挙動に違いが見られる以外は概ね同様な傾向を示している。しかし、密格子と粗格子では若干の違いが認められるなど、高次の乱流統計量においては格子依存性が僅かながら存在することが確認できる。

なお、本計算の結果は、①平均流速やレイノルズ応力の分布が管路と開水路で違いは見られず普遍的であることを示すとともに、②乱れ強さについては壁面領域での違いはなく、境界層の外層に相当する自由水面領域³⁰⁾ ($0.6 < \xi < 1.0$) に相違が限定されること、③自由水面領域での違いは、管路に比べ水深方向の挙動が抑制される一方、流下方向とスパン方向の乱れが大きくなるなど自由水面流れに特徴的な再配分による乱れの非等化が生じていることを捕らえている。

このように、開水路流れに関するこれまでの数値的・実験的知見と一致することから、今回構築した DNS は十分な精度を有しているものと判断される。

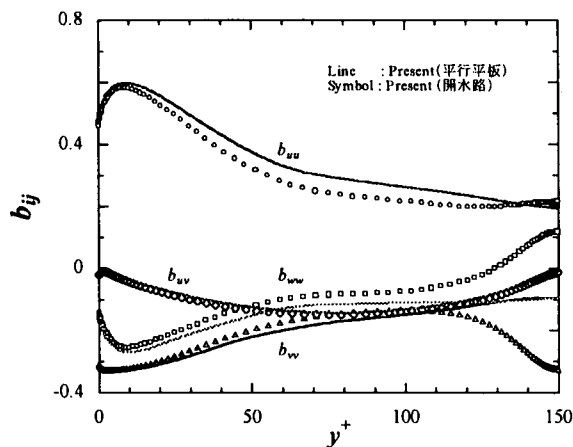


図-18 レイノルズ応力の非等方度

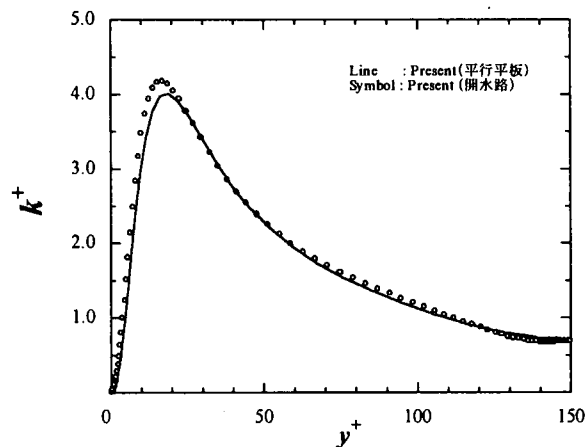


図-19 乱れエネルギーの分布

3.4 乱流統計量の考察

以下では、密格子の計算結果を基に、開水路流れに関する乱流統計量を詳細に検討する。なお、管路との相違から開水路の特徴を抽出するため、データが豊富な平行平板間流れの DNS データベース³²⁾を比較に用いる。

図-9, 10 は、乱れ強さと渦度変動の分布を自由水面領域について拡大したものであり、水面の存在による違いがより一層明白となっている。図-9 には、Hunt & Graham³⁴⁾、および Brumley & Jirka³⁵⁾ による水面が穏やかな流れに対する乱れ強さ v^+ の理論式も併せて表示する。乱れ強さについては、最近、中山・瀬津³⁶⁾ が自由水面近傍での乱れ強さ v^+ の分布が Froude 数に関係することを明らかにしている。本計算結果は水面変動を拘束しているため、中山・瀬津の実験値とは異なるものの、水面に向かい有限値に収束しており同様な傾向を示している。なお、一般に DNS の結果は Hunt らの理論式に較べやや小さめの値を示すなど不明な点も多く、今後、水面変動の効果を考慮した DNS による検証が急がれる。

図-10 は、鉛直方向の渦度変動が水面で有限値を示す一方、流下方向とスパン方向のそれは 0 となるなど乱れ強さと同様に非等方性が顕在化しており、その違いは水面近傍の薄い領域に限定されていることが分かる。このことは、自由水面に直交する回転軸を持つ渦運動の存在を許容するなど壁面とは異なる自由水面固有の組織構造が存在することを示唆している。

図-11 は、乱れエネルギーの収支を示したものである。結果は管路とほぼ一致しており、壁面からバッファ層にかけての領域を除くとほぼ局所平衡特性が成立しているかのように見える。そこで自由水面領域を拡大したものが図-12 である。これより、水面に近づくにつれ生成項が急速に低下する一方、散逸項には乱流拡散項がほぼ均り合うなど、水面近傍では局所平衡が崩れエネルギー不足状態にあり、乱流拡散がこのアンバランスを埋めていることが読みとれる。

図-13 は、このような開水路に特徴的な再配分や輸送メカニズムを確認するため、レイノルズ応力間の再配分

に関与すると言われる圧力・歪み相関³⁷⁾の分布を見たものである。主流方向成分がほぼ 0 に漸近するのに対し、水深方向成分は大きく減衰、スパン方向成分は逆に増加に転じ、水面で両者の絶対値は等しく逆符号の関係にあることが分かる。このことから、水深方向のエネルギーは主流方向に配分されることなくスパン方向へ輸送されていることが分かる。

図-14 は、渦動粘性係数の鉛直方向分布を逆算したものである。管路とは水面付近で相違が見られるが、大半の領域で一致している。図中には、 $\nu_t = \alpha(y^+)^3$ と $\nu_t = 1$ のラインを併せて表示している。これより壁面からバッファ層にかけて、渦動粘性係数は壁面からの距離の 3 乗に比例する²⁹⁾ことが認められるが、対数則領域においては大きくズレることが分かる。また、Smagorinsky 定数を用いた LES 解析では、壁面や水面近傍での評価に問題が残ることも示唆している。

次に、乱流モデルを構築するうえで興味深い研究対象ともなっているレイノルズ応力の挙動に関する情報を見てみる。図-15 から図-17 は、レイノルズ応力の相関係数、スキューネス、およびフラットネスの鉛直分布をそれぞれ示したものである。管路と開水路の違いは、せん断応力が働かない自由水面において、相関係数が 0 とはならず壁面と同様に一定値を示すことである。これは、永翁²⁶⁾が指摘しているように、自由水面近傍の乱流構造が壁面のそれと深い関連があることをうかがわせている。スキューネスについては、開水路で水面に近づくにつれ絶対値が増大した後、一定値に収束するなど統計的対称性が崩れており、水面近傍での増大位置は v^+ のスキューネスのピークと同位置であることから、間欠的な上昇流によるレイノルズ応力の生成が示唆される。フラットネスについても、水面近傍で極大値を取った後、一定値を示すなど同様な挙動を示すが、水面近傍の局所的な違いを除き、管路と大きな相違は見られない。なお、レイノルズ応力の生成については縦渦との密接な関連が指摘されていることから³⁸⁾、自由水面においても壁面とは異なる縦渦状の組織構造が存在していることが示唆される。

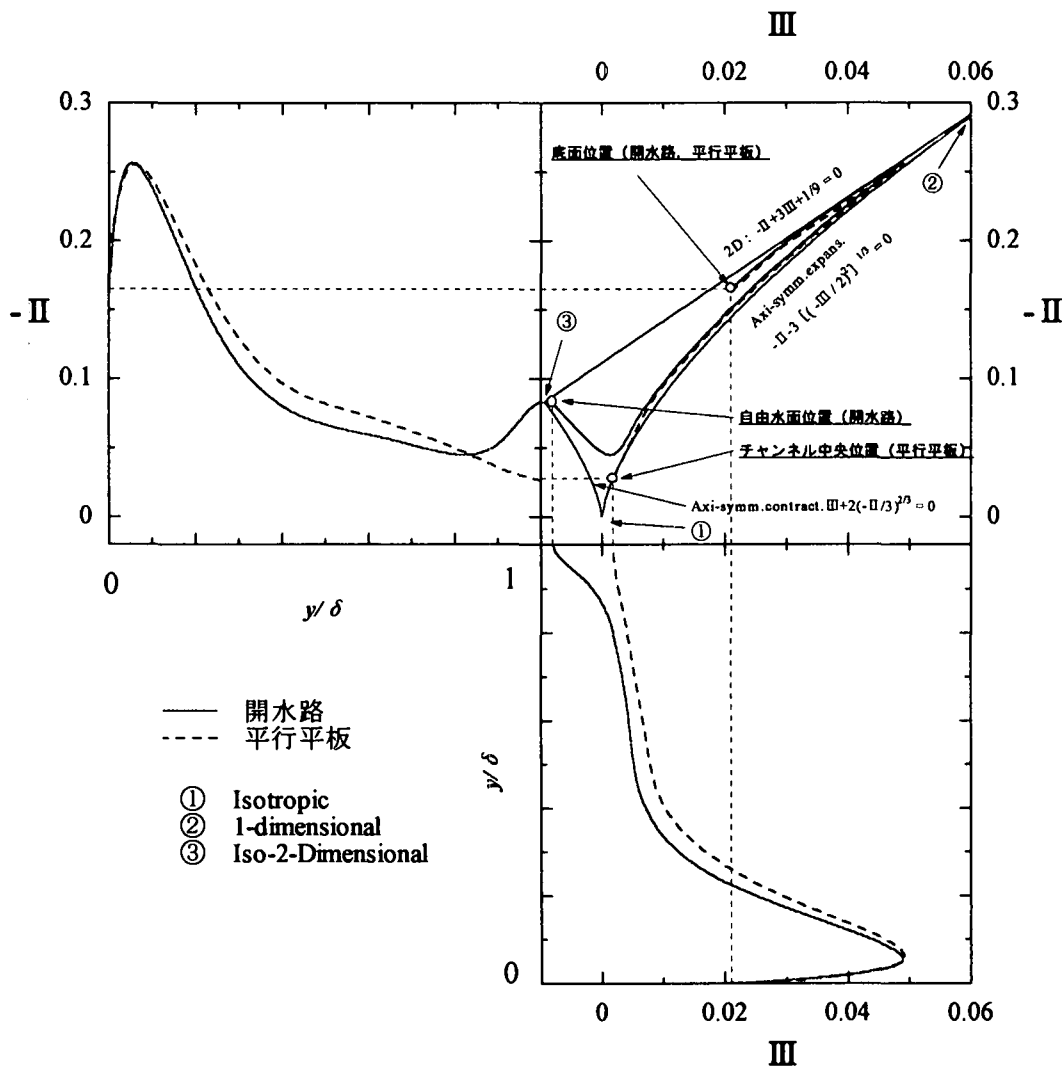


図-20 不変量マップ

3.5 不変量解析²⁰⁾

DNSでは空間の各点におけるレイノルズ応力成分が算定可能であることから、壁面および水面近傍での乱流特性を把握することができる。ここでは、レイノルズ応力から強度情報を除いた非等方度に着目した不変量解析を適用し、壁面や水面近傍の特徴について調べる。不変量解析を構成する基本パラメータは、式(14)に示すレイノルズ応力の非等方テンソル b_{ij} であり²⁰⁾、ゼロであれば等方性乱流を、大きくなれば異方性が強い複雑乱流であることを示すなど等方場からのズレを知ることができる。なお、 k は乱れエネルギー、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表すものとする。

$$b_{ij} = \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \quad (14)$$

さらに、非等方テンソル b_{ij} の特性方程式から得られる不変量は、定義から恒等的にゼロとなる第一不変量を含め、式(15)～(17)となる。これらの不変量による表現を用いることにより、座標系に依存しないかたちでレイノルズ応力場の状態を知ることが可能となる。

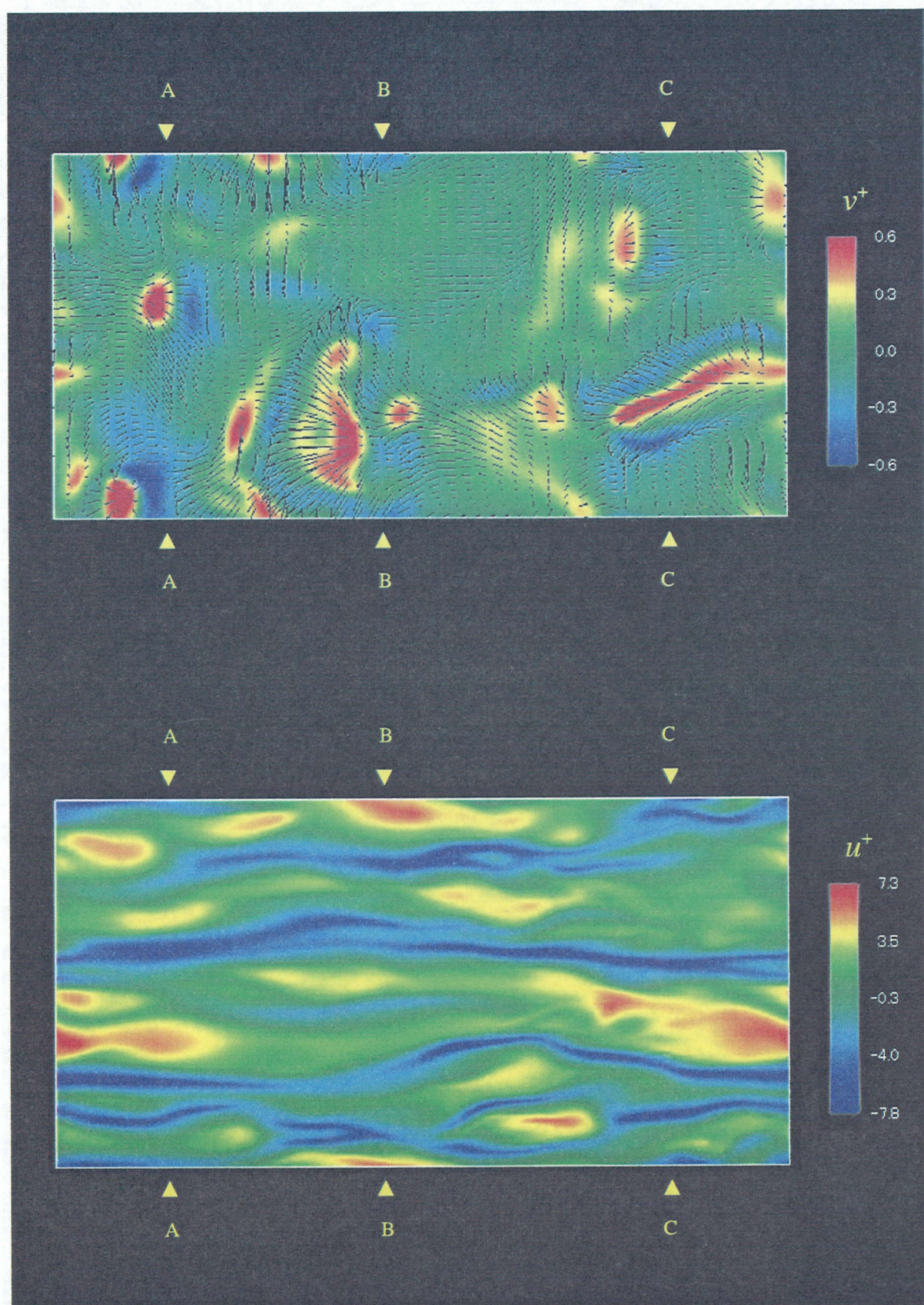
$$I = b_{kk} = 0 \quad (15)$$

$$II = -b_{ij} b_{ij} / 2 \quad (16)$$

$$III = b_{ij} b_{jk} b_{ki} / 3 \quad (17)$$

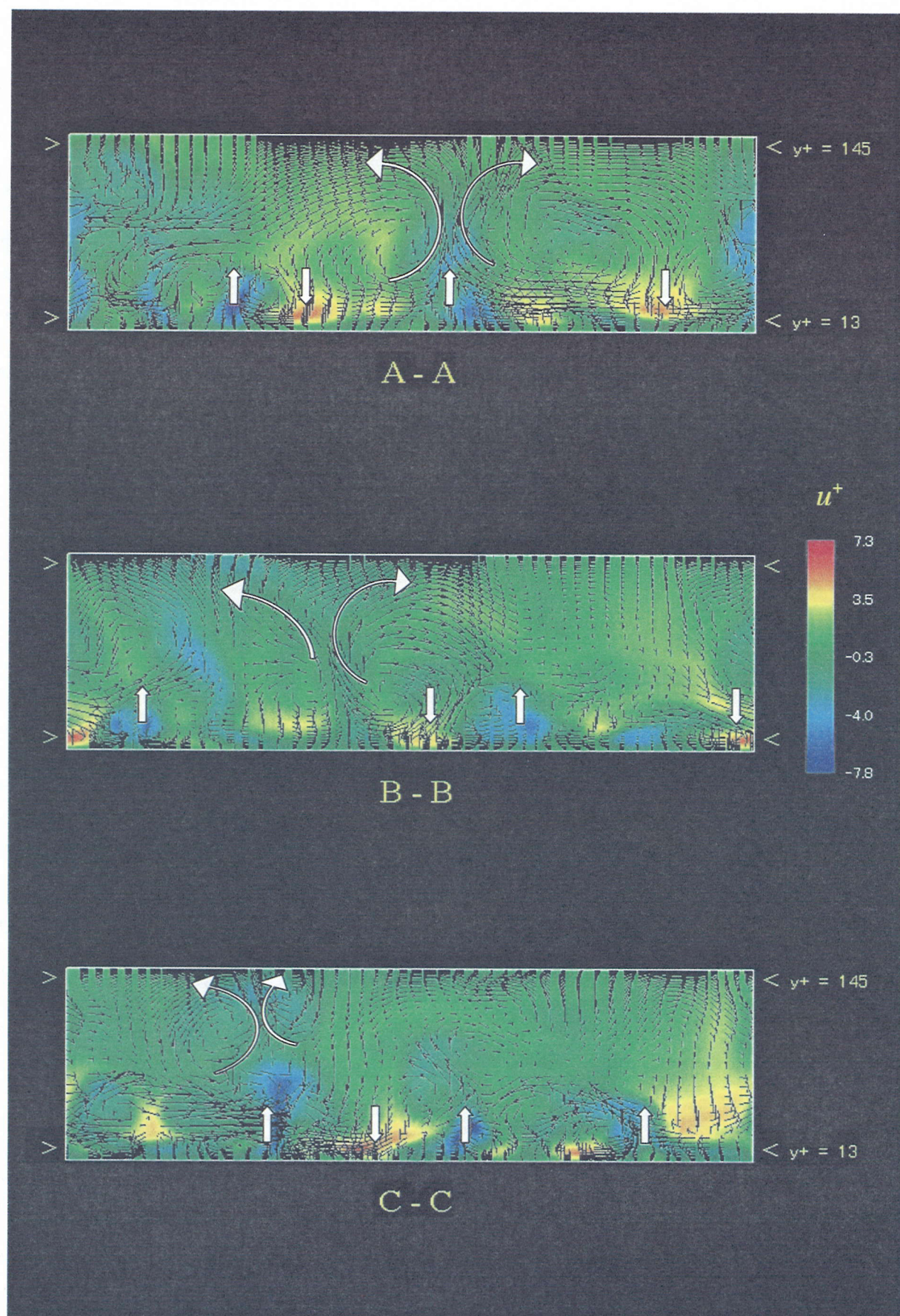
図-18と図-19は、開水路流れおよび平行平板間流れにおける非等方テンソル b_{ij} と乱れエネルギー k の鉛直方向分布をそれぞれ示したものである。開水路流れの乱れエネルギーについては、平行平板間流れと殆ど違いはないが、非等方テンソルについては、平行平板間流れでチャンネル中央の応力場が等方化を指向するのに対し、開水路流れでは、水面近傍で b_{ww} が減少し b_{ww} が増加することにより非等方化が進むと同時に、水平面内の成分については等方化する傾向が見られるなど両者の基本的構造が異なることを顕著に示している。

図-20は、縦軸に $-II$ 、横軸に III をとった不変量マップであり、レイノルズ応力の状態が縮流的軸対称流・拡張流的軸対称流・二次元的状態を示す境界内の点で表現される。これより、開水路と平行平板の底面位置は固体



図－21 速度変動の空間 (x - z 面) 分布

(上図：自由水面近傍, $y^+ \doteq 145$, 下図：バッファ層, $y^+ \doteq 13$)



図一22 速度変動の瞬時構造 (y-z 断面)

壁の存在による影響で二次元的状態を示す境界近くに存在しているのが分かる。非等方テンソル $\mu_{\alpha\beta}$ が卓越する付近において、一次元的な乱れ状態を示す頂点②に一旦近づき、中間領域では主流方向と断面方向の乱れが相対的に近づき拡張的軸対称流の特徴を示すことが分かる。両者の違いは、水面において顕在化する。すなわち、平行平板のチャンネル中央では応力場が三次元等方化する傾向を強めるのに対し、開水路では水面に近づくにつれ壁面同様の二次元的性格を帯びるが、壁面と異なり水平面内で、 u と w が一様化し二次元等方場に近づくことである。これらのことは、境界条件としての壁面と自由水面の特徴を明らかにしており、チャンネル中央を自由水面と見なす解析は不適當であることが分かる。なお、不変量解析は任意境界上の複雑流れ場の乱流状態を知るうえで強力なツールとなることから⁴⁰⁾、単純流れ場における特徴を把握しておくことは、今後、波状性を有する河床流れの構造解析に大いに役立つものと考えられる。

3.6 瞬時構造

最後に、開水路流れの瞬時構造について考察する。図-21(下図)は、ある時刻のバッファー層($y' \approx 13$)における速度変動 u' の空間分布を示したものであり、壁面せん断流れにおいて観察される縞状に伸びた低速ストリークが、wall unitで概ね $100 \sim 150 \nu/u_\tau$ の間隔²⁸⁾で準周期的に存在する様子を捕らえている。図-21(上図)は、自由水面近傍($y' \approx 145$)の速度変動を見たもので、ベクトルが u', w' を、カラーコンターは v' を示し、赤で上昇流、青で下降流を表すものとする。これより、水面近傍においては壁面で観察された準周期的で流下方向に長いストリーク構造は見られないかわり、splitsと呼ばれる湧き出しと、anti-splitsと呼ばれる沈み込みがスポット的に存在し⁴¹⁾、表面更新渦を形成していることが認められる。壁面と自由水面におけるこのような組織構造の違いは、両者の相違点であるせん断の有無が関与しているものと考えられる。

このような組織構造の違いを検討するため、図-21に(▽)印で示すA-A、B-B、C-C各測線の y - z 断面の瞬時構造を見たものが図-22である。この図は u^+ を示すカラーコンターの上に、 v^+, w^+ の瞬時ベクトルを重ね合わせたものであり、併せて図-20で可視化したバッファー層($y' \approx 13$)と自由水面近傍($y' \approx 145$)の位置を(<)印で表示している。先ず、底面近傍で形成された高速ストリーク上では下降流、低速ストリーク上では上昇流を伴っており、スウィープやイジェクションを捕らえていることが分かる。また、垂直速度変動が壁面によるブロッキングによって水平方向成分へ再配分されるスプラッティングの様子も明瞭に見て取れる。

水面においても同様に、自由水面がブロッキングし再配分に寄与している様子を確かめることができるが、壁面では高速ストリーク上への高速流体塊の進入が垂直変動の成因であるのに対し、水面では比較的規模の大きな縦渦状の回転運動がもたらす上昇流が垂直方向の速度変動の成因と

なっている様子が見える。また、この上昇流には底面から伸びるものも見えることから、その起源が底面近傍からのバースティングに関連することがうかがえる。このように、表面更新を含む水面での挙動に縦渦状の回転運動が関与していることから、水面近傍での縦渦の挙動を把握することは水面での乱流構造や物質交換などのメカニズムを知る上で重要なことが分かる。

4. まとめ

本研究では、まず5次精度風上差分の特性を評価するため、高次精度・高解像度スキームとして知られる幾つかの離散化手法とともに、一次元線形対流問題を対象に比較検討を行った。次に、三次元的に変化する複雑境界流れへのDNSの拡張を図るため、regular格子と3次元座標変換による一般座標系風上DNSを構築した。最後に、開水路乱流へ適用し平均流特性や乱流統計量について既存の結果と比較検討を行うとともに、不変量解析や瞬時構造についての考察を行い自由水面流れの特徴を探った。得られた結果は以下の通りである。

- 1) 5次精度風上差分は、高精度・高解像度スキームとして知られる他の手法に較べ何ら遜色はなく、数値粘性が少いと言われるCIP法と同等もしくはそれ以上のパフォーマンスを有するなど、高精度が要求される乱流解析に有効である。
- 2) 一般座標系regular格子による計算格子点の配置であっても、適切な不等間隔格子を用いれば計算の不安定化や解の振動挙動の発生などは全く見られず安定な計算が可能である。さらに、ハンドリングの良さや計算負荷量などを考慮すれば、regular格子も空間的離散化法として十分に活用が期待できる。
- 3) 3次元座標変換へ拡張した一般座標系風上DNSによる結果は、十分に発達した初期値を用いれば高次の乱流統計量において若干の格子依存性が認められた以外、既存の研究結果と良好な一致を示した。
- 4) 平行平板間流れではチャンネル中央で応力場が三次元等方化を指向するのに対し、開水路流れでは水面近くで二次元的性格を帯びるものの、壁面と異なり水平面内での等方化指向が強い。
- 5) 水面近傍の乱流特性は、底面からのバースティングと関連が深い比較的規模の大きな縦渦状の回転運動が特徴付けている。

なお、今回構築した一般座標系風上DNSは、regular格子を採用することで大幅な計算負荷量の軽減が達成された。ちなみに、本論文に掲載したすべての乱流統計量を含めた粗格子の演算時間は、Visual Technology社のVT-Alpha 600で、1タイムステップあたり約7秒であった。

謝辞： 本研究で比較検討に用いた自由水面乱流のDNSデータは、工業技術院資源環境技術総合研究所 永翁龍

一氏から提供を受けたものである。本研究での使用に快諾を頂き厚くお礼申し上げる。

参考文献

- 1) 巽友正：ナビエ・ストークス方程式と乱流，第44回応用力学連合会議演習稿集，pp.7-11，1995.
- 2) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. : Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, vol.177, pp.133-166, 1987.
- 3) 梶島岳夫：対流項の差分形式とその保存性，日本機械学会論文集 (B編)，60巻574号，pp.2058-2063，1994.
- 4) 佐竹信一，笠木伸英：コロケーション grid を用いたチャンネル乱流のダイレクトシミュレーション，第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集，pp.321-324，1994.
- 5) 梶島岳夫，太田貴士，岡崎和彦，三宅裕：コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析，日本機械学会論文集 (B編)，63巻614号，pp.3247-3254，1997.
- 6) 森西洋平：コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法，日本機械学会論文集 (B編)，65巻630号，pp.505-512，1999.
- 7) Kawamura, T. and Kurwahara, K. : Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, *AIAA, 22nd Aerospace Sciences Meeting*, paper.84-0340, 1984.
- 8) 野沢剛二郎，田村哲郎：角柱周りの複雑乱流場に対する LES 適用法の提案とその課題，土木学会論文集，No.591，pp.151-161，1998.4
- 9) 小林敏雄，森西洋平：2次元正方形キャビティ内流れの数値解析における対流項差分の影響，生産研究，40-1，pp.9-15，1988.
- 10) Rai, M.M. and Moin, P. : Direct Simulation of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes, *J. Comput. phys.*, 96, pp.15-53, 1991.
- 11) 宮内敏雄，平田徹，店橋譲：高次精度差分法を用いた三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較)，日本機械学会論文集 (B編)，61巻592号，pp.4400-4405，1995.
- 12) 林俊一郎，大本照憲，矢北孝一，平川隆一：風上差分スキームを用いた直接数値シミュレーションの基礎的研究，応用力学論文集，Vol.2，pp.599-608，1999.
- 13) 林俊一郎，大本照憲，矢北孝一，平川隆一：一般座標系 Regular 格子による開水路乱流の DNS，水工学論文集，第44巻，pp.593-598，2000.
- 14) 例えば，風工学のための流れの数値シミュレーション法入門，土木学会，1992.
- 15) 朝位孝二，細田尚：移流方程式の数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集，土木学会水理委員会，pp.13-21，1999.
- 16) Yabe, T. and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, 66, pp.219-242, 1991.
- 17) Yee, H. : Construction of explicit and implicit symmetric TVD scheme and their application, *J. Comp. Phys.*, 68, pp.151-179, 1987.
- 18) 朝位孝二，小松利光，大串浩一郎，羽田野袈裟義：移流輸送の高精度かつ高解像度数値計算手法の開発，水工学論文集，第43巻，pp.497-502, 1999.
- 19) Leonard, B.P. : A survey of finite differences with upwinding for numerical modelling of the incompressible convective diffusion equation, *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, 2, Pineridge Press, 1981.
- 20) 梶島岳夫：非圧縮流れのための上流補間法，日本機械学会論文集 (B編) 60巻578号，pp.3319-3326，1994.
- 21) 清水康行，Mark, S., Jonathan, M.N. : 2次元河床波上の3次元流れの計算，水工学論文集，第44巻，pp.623-628，2000.
- 22) Lam, K. and Banerjee, S. : On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow, *Phys. Fluids*, pp.306-320，1992.
- 23) Komori, S., Nagaosa, R., Murakami, Y., Chiba, S., Ishii, K. and Kurwahara, K. : Direct numerical simulation of three-dimensional open-channel flow with zero-shear gas-liquid interface, *Phys. Fluids*, pp.115-125，1993.
- 24) Hurdler, R.A., Swann, T.F., Jr., Leighton, R.I. and Swearingen, J.D. : Length scale and the energy balance for turbulence near a free surface, *AIAA*, pp.1998-2007, 1993.
- 25) 永翁龍一，斉藤隆之：十分に発達した安定成層開水路乱流場の構造，日本機械学会論文集 (B編)，63巻608号，pp.1170-1176，1997.
- 26) 永翁龍一，斉藤隆之：十分に発達した自由表面乱流場に出現する組織構造と熱・物質輸送機構との関連性，日本機械学会論文集 (B編)，64巻620号，pp.1025-1032，1998.
- 27) 棚津家久，山本義暢：DNSを用いた開水路キャビティ流れの生成機構とその輸送過程の解析，水工学論文集，第43巻，pp.377-382, 1999.
- 28) 大宮司久明，三宅裕，吉澤徹編：乱流の数値流体力学—モデルと計算法，東京大学出版会，1998.
- 29) Ryuichi Nagaosa : Direct numerical simulation of vortex structures and turbulent scalar transfer across a free surface in a fully developed turbulence, *Phys. Fluids*, pp.1581-1595，1999.
- 30) バタンカー, S.V. (水谷幸夫，香月正司共訳) : コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版，1985.
- 31) Kim, J. and Moin, P. : Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equation, *J. Comp. phys.*, 59, pp.308-323, 1985.
- 32) 笠木伸英：直接数値シミュレーションによる乱流輸送現象のデータベース構築に関する研究，平成3年科学研究費補助金 (総合研究 A) 研究成果報告書，1992.
- 33) Ichisa Nezu and Hiroji Nakagawa : Turbulence in Open-Channel Flows, *IAHR-Monograph*, Balkema, 1993.
- 34) Hunt, J.C.R. and Graham, J.M.R. : Free-stream turbulence near plane boundaries, *J. Fluid Mech.*, Vol.84, pp.209-235, 1978.
- 35) Brumley, B.H. and Jirka, G.H. : Near-surface turbulence in a grid-stirred tank, *J. Fluid Mech.*, Vol.183, pp.235-263, 1987.
- 36) 中山忠暢，棚津家久：開水路流れにおけるバーストの水面近傍での挙動及び乱れ構造との関連性について，土木学会論文集，No.635，pp.31-40，1999.
- 37) 吉澤徹，村上周三，小林敏雄，谷口伸行，戴毅，黒田明慈 他：乱流解析，東京大学出版会，1995.
- 38) Hinze, J.O., *Turbulence*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1975.
- 39) Lee, M.J. and Reynolds, W.C. : Numerical Experiments on the Structure of Homogeneous Turbulence, *Stanford Univ. Rept. TF-24*, 1985.
- 40) 杉山均，秋山光庸，柳沢健：波状壁面を有する三次元管路内の乱流構造解析，日本機械学会論文集 (B編)，63巻612号，pp.65-72，1999.
- 41) Perot, B. and Moin, P. : Shear-free boundary layers: Part I. Physical insights into near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, 295, pp.199-227, 1995.

(2000年4月21日受付)