

水面変動をパラメータとした開水路乱流計算のための 2 方程式乱流モデルの改良

Improvements of Two-Equation Turbulence Model with Surface Fluctuation Used as a Parameter for Calculation of Open-Channel Flows

中山 昭彦*・中瀬 幸典**・横嶋 哲***・藤田 一郎****

Akihiko NAKAYAMA, Yukinori NAKASE, Satoshi YOKOJIMA and Ichiro FUJITA

*正会員 Ph.D. 神戸大学教授 大学院自然科学研究科地球環境科学専攻(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

**学生会員 神戸大学大学院自然科学研究科建設学専攻(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

***学生会員 神戸大学大学院自然科学研究科地球環境科学専攻(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

****正会員 学博 神戸大学助教授 都市安全研究センター(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

Free-surface effects have been incorporated in a two equation turbulence model and applied to computation of fully developed two-dimensional open-channel flow. A semi-empirical relation is used to determine the surface fluctuation and is used as a parameter that reflects the surface effects. A semi-empirical formula for the surface fluctuation has been obtained and used in actual calculations. The results are compared with experiments to show its effectiveness in representing the surface effects for a range of Froude and Reynolds numbers.

Key words: two-equation turbulence model, free-surface effects, $k-\omega$ model

1. はじめに

乱流の数値解析法は幾つかあるが、その選択には、計算負荷と、計算精度を併せて考慮すべきである。工学での応用の場合、計算負荷の比較的少ないレイノルズ応力に乱流モデルを適応するレイノルズ平均Navier-Stokes(RANS)方程式を用いるものが依然として有力である。近年このRANS法の精度は飛躍的に向上して来ている。しかしその殆どが単純な境界形状を持つ内部流で、自由水面をもつ開水路乱流の予測精度は必ずしも向上していない。開水路流の領域は固定されていない代わりに、圧力とせん断応力が規定され、その特性は平均流、乱流諸量とも閉管路流とは異なる。しかし、予測計算に用いられる乱流モデルは閉管路内部流あるいは境界のない外部流の予測に用いられるモデルをそのまま応用したものが殆どである¹⁾。フルード数が小さい場合、水面は固定された水平なスリップ境界面に近い性質を持つ。しかしフルード数が限界値に近

くなると水面が動揺し、また流れ方向に変化する不等流になると、平均水面も変化し、複雑な挙動を呈するが、こういった一般的な開水路乱流に適用出来るモデルについては、いまのところ定説はない。

開水路流の予測計算に用いられる運動方程式が閉管路流のそれと異なるのは重力の項がある事のみである。しかし密度一定の非圧縮流の場合、重力項はたとえ乱流内でも一定であるので、基礎運動方程式にはその効果は直接表れない。水面の影響は、運動方程式に重力項があることより、未知の水面で圧力とせん断応力が規定されるという点である。従ってこれまでのモデルでは境界条件に水面効果を入れるか、モデル式に人為的操作を加えるのが一般的である²⁻⁶⁾。

橋津・中山⁷⁾、中山⁸⁾等の実験によれば、開水路流では渦粘性係数が管路流に比べ大きく減少することが指摘されている。またその影響範囲は水面近傍に留まらず水路中央まで及んでいる。乱流エネルギー、散逸率の値やそれらの輸送式には水面に依存する項などは

ないので、これらの式を用いるのみでは水面の効果は表せない。これは水面に垂直な変動速度成分が水面により拘束され渦粘性係数は大きく影響を受けるが、横方向乱れが増加し乱流エネルギーには殆ど影響しないため、異方性の強い乱流構造に変わるためである。従って、モデルに反映させる最も直接的な方法は、渦粘性係数自体を修正する事である。著者ら⁹⁾はこの渦粘性係数を修正するのに、水面変動をパラメータとしたモデルを提唱した。またこれを水面変動の既知である流れに対し適用し、水面効果の表現が可能な事を示した。この方法では水面変動を巧く推定出来ることが必要条件である。

本研究では、上述の水面効果のモデル化に必要な水面変動を等流について実験的に調べ、変動の振幅を求める方法を検討する。またこれにより得られる半理論的關係を提唱し、それを用いて水面変動が未知の開水路流計算に適用する。またこの方法でレイノルズ数とフルード数の効果が巧く捉えられるかを、実験結果と比較する事により調べ、提唱するモデルの有用性を検討する。

2. 基礎方程式とk- ω 2 方程式モデル

ここでは水面効果のモデル化の基となる低レイノルズ数 k- ω モデルの概要を記述する。支配方程式であるレイノルズ平均された連続の式と運動方程式は

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (2)$$

である。ここで、 x_1 は流下方向、 x_2 は鉛直上向き方向、 x_3 は横断方向の座標、 U_i 、 u_i は x_i 方向の平均流速と変動速度成分、 P は平均圧力、 ρ は流体密度、 ν は動粘性係数、 g_i は重力の加速度の x_i 方向成分である。 $-\overline{u_i u_j}$ はレイノルズ応力で、本研究では等方渦粘性モデルを用い

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3)$$

と表される。ここで ν_t は渦動粘性係数、 k は乱流エネルギーである。 ν_t の計算には k と $\varepsilon/(\beta^* k)$ で定義される ω を用いる k- ω モデル¹⁰⁾ を応用するが、ここで水面効果を導入するため ν_t を

表-1 低レイノルズ数 k- ω モデルの詳細

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{D\omega}{Dt} &= \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \frac{\beta}{\beta^*} \frac{\omega}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ P_k &= -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad \varepsilon = \beta^* \omega k \\ \alpha^* &= \frac{\alpha_0^* + R_t / R_k}{1 + R_t / R_k}, \quad \alpha = \frac{5}{9} \frac{\alpha_0 + R_t / R_\omega}{1 + R_t / R_\omega} (\alpha^*)^{-1} \\ \beta^* &= \frac{9}{100} \frac{5/18 + (R_t / R_\beta)^4}{1 + (R_t / R_\beta)^4}, \quad R_t = k / \omega \nu \\ \beta &= 3/40, \quad \sigma_k = 2.0, \quad \sigma_\omega = 2.0 \\ \alpha_0^* &= \beta/3, \quad \alpha_0 = 1/10 \\ R_\beta &= 8, \quad R_k = 6, \quad R_\omega = 27/10 \end{aligned}$$

$$\nu_t = \alpha^* f_S \frac{k}{\omega} \quad (4)$$

と置く。ここで、 k と ω はそれぞれの輸送式をモデル化したものを解く事により求められるが、それには表-1に詳細がまとめられている Wilcox¹⁰⁾ の低レイノルズ数 k- ω 法に従う。

3. 水面効果のモデル化

上述の2方程式モデルの枠内で水面効果を導入する場合、主パラメータである k や ε の輸送式に水面に関する項は直接現れないので、渦粘性係数に水面の特性を表わすモデルを導入する必要がある。Komori et al.¹¹⁾ や Rashidi¹²⁾ の実験によれば、せん断応力をもつ大規模渦が水面に衝突すると、フルード数が小さい場合鏡面反射的に反射され、水面変動が大きい場合水面波と干渉し、渦構造は弱められる。これらの効果を表わすために、(4)式のように、渦粘性係数に減衰関数 f_s を乗じ修正する。 f_s は

$$\begin{aligned} f_S &= 1 - f_r f_h \\ f_r &= \exp \left\{ -C_r \frac{H - x_2}{L_S} \right\} \\ f_h &= \exp \left\{ -C_h \frac{h'}{L_S} \right\}, \quad L_S = C_L \frac{k_S^{1/2}}{\omega_S} \end{aligned} \quad (5)$$

と置き、反射と干渉の効果を表わす。ここで添え字 S

表-2 実験条件

	Fr ($H(\text{cm})$)							
	0.19	0.30	0.49	0.68	0.75	0.80	0.94	1.06
$Re=6000, U_m H=83(\text{cm}^2/\text{sec})$	(5.89)	(4.26)	(3.07)	(2.49)	(2.33)	(2.22)	(2.00)	(1.85)
$Re=13000, U_m H=173(\text{cm}^2/\text{sec})$	(3.98)	(3.88)	(3.63)	(3.16)	(2.72)	(2.32)	(2.01)	(1.92)
$Re=30000, U_m H=417(\text{cm}^2/\text{sec})$	(5.88)	(5.44)	(4.58)	(4.02)	(3.50)	(3.24)		

は水面での値を表し、低フルード数でも起こる反射効果を表わす f_r と水面変動による緩和効果を表わす f_h の組み合わせとなっている。影響範囲は水面での乱れスケールに依存すると考えられるので L_s を長さスケールとして用いている。フルード数は h' を通して間接的に影響することになる。またレイノルズ数やその他の要素は k と ω の水面での値に影響する事により効果は現れることになる。 C_r , C_h , C_L はモデル定数でそれぞれ 0.5, 5.0, 0.75 の値が用いられている。

水面変動 $h' = \sqrt{h^2}$ は流れ方向に平均量に変化する不等流では運動学的条件より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{h^2}}{\partial t} + U_{1s} \frac{\partial \overline{h^2}}{\partial x_1} \\ &= -2\overline{u_{1s} h} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_{1s} h^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_{2s} h^2} \end{aligned} \quad (6)$$

を満たすが⁹⁾、完全に発達した等流の場合この式からは求められない。フルード数の大きくない等流の場合、変動圧は静水圧分布に比例し、水面近傍で粘性の影響が少ない。従ってベルヌーイの式より水面変動と水面での変動速度との関係は近似的に次のようになる。

$$\frac{h'}{H} = \gamma Fr^2 \frac{\sqrt{k_s}}{U_m} \frac{U_{1s}}{U_m} \quad (7)$$

ここで、 U_m は断面平均流速、 U_{1s} , k_s はそれぞれ水面での平均流速と乱れエネルギー、 Fr は U_m と平均水深 H をもとにしたフルード数である。中山⁸⁾の実験および後述する本実験結果は、 $\gamma=0.2$ で良く近似出来るので、後述の計算にはこの値を用いる。

4. 水面変動の測定実験とその結果

前節で述べた水面効果のモデルでは水面変動振幅が重要なパラメータになっている。水面変動の統計量についてはあまりデータがないので本研究で平坦開水路について超音波式変位計を用い水面変位の計測を行い、その推定法を検討する。

実験は全長7.5m、幅30cm、高さ20cmのガラス壁、可変勾配型循環式直線水路で行った。水路上流端でワイヤーにより乱流遷移させ十分発達した4.5mの位置で計測を行った。実験条件は表-2に示してある。流れの2次元性を確保するため水路幅30cmに対し、水深は6cm以下にし、断面平均流速 U_m と平均水深 H で定義されるレイノルズ数 Re は6000から30000、フルード数 Fr は0.19の常流から2.28の射流までの範囲を設定した。

超音波変位計の出力はA/D変換器を通してコンピュータに取り込まれた。超音波計は確率は小さいが異常値の混入が避けられないので、何らかの補正が必要である。ここでは標準偏差の±3倍の外側のデータは除かれ、前後の正常値の補間値を代入した。

図-1に30秒間の瞬時水面位置の変動 h の時系列を示す。異常値の数はこの30秒間で合計3000のサンプルの内せいぜい50程度で、それらを除いたものは妥当な結果となっている。これによるとフルード数が高くなるにつれ変動幅が大きくなっているのが分かる。次に図-2は h のパワースペクトルを示す。これは図-1の時系列データをFFT法により算定したもので、データ量が十分でないためばらつきがあるが、限界流に近いフルード数の場合、低周波成分が大きくなっているのが見られる。同様な結果は中山⁸⁾の実験結果にも見られ、限界流近傍で水面が不安定になるためと考えられる。

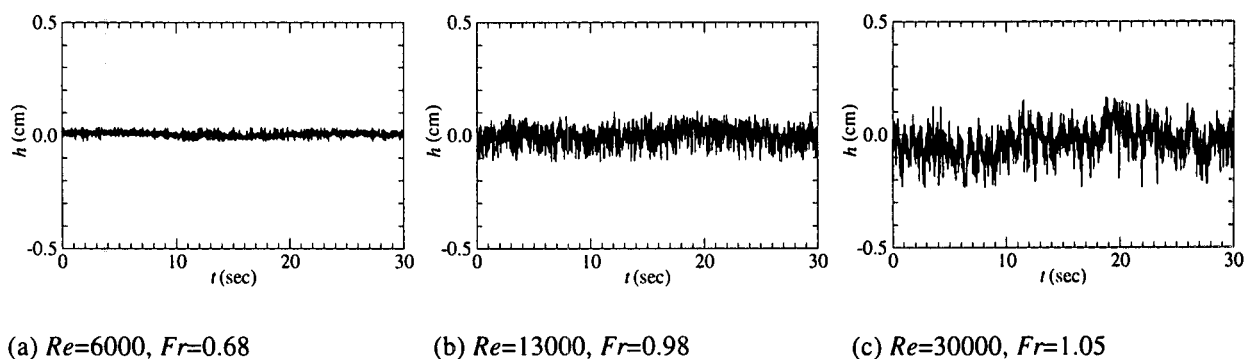


図-1 変動水深 h の時系列

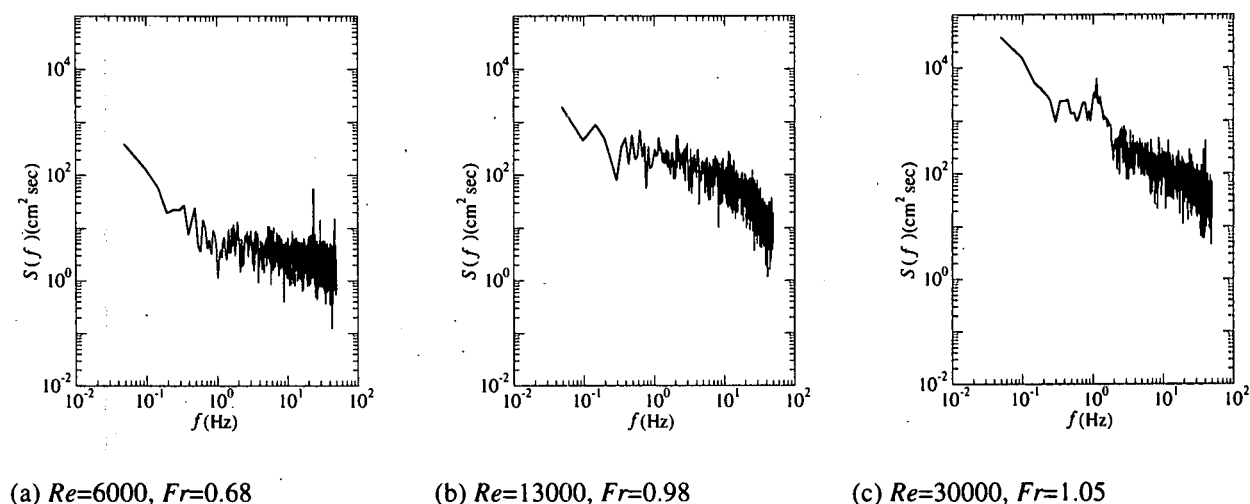


図-2 水面変動のパワースペクトル

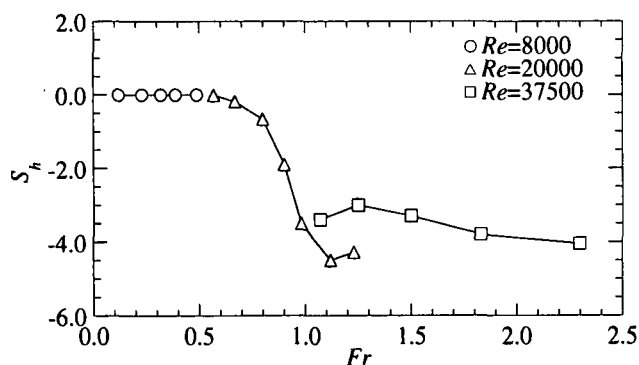
図-3に h の確率分布の 歪度(Skewness), S_h , 図-4に尖度(Flatness) F_h を示す。また中山⁸⁾による同様の計測結果も併せて示してある。中山のデータは本実験データと比べ S_h , F_h とも非常に大きい値を示している。 h の確率分布が正規分布に近ければ S_h はゼロ, F_h は3の値をとる。これらのパラメータはデータの異常値の扱いに大きく影響される。正規分布の値に近い本実験値は妥当であると思われる。また本実験の S_h は低いフルード数領域で正の値をとり、高フルード数領域では負の値をとっている。これは低フルード数では水面下方から移動してくる乱流渦を剛な壁で反射され、高フルード数では乱流渦により水面が盛り上がる状況を意味しており、前述の水面効果のモデル概念の適切さを裏付けている。

図-5は相対水面変動振幅 h'/H をフルード数の関数

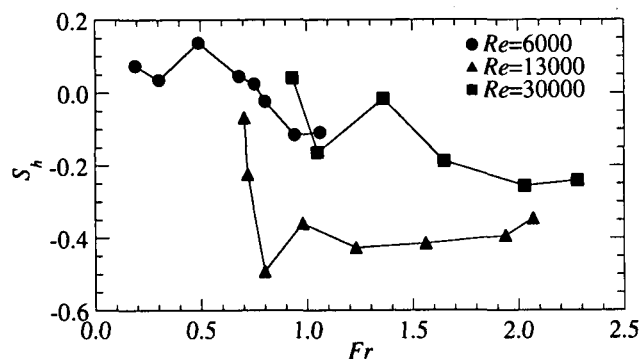
としてプロットしたものである。本実験結果の中山⁸⁾の実験結果は $Fr=1.5$ 以上の射流領域では大きくずれているが、常流領域で概ね一致している。本モデルによる計算では $Fr=1.5$ 程度以下の流れを対象とし、(7)式の γ の値を0.2にとるとこの領域のデータを表すことができ、等流の水面変動の推定式として、減衰関数 f_s に用いられる。

5. 数値計算法

ここでは3. 節で述べた2方程式モデルを用い平坦開水路等流の計算を行った数値計算法を述べる。数値計算法は2次元平均流に限るが、一般的な境界形状

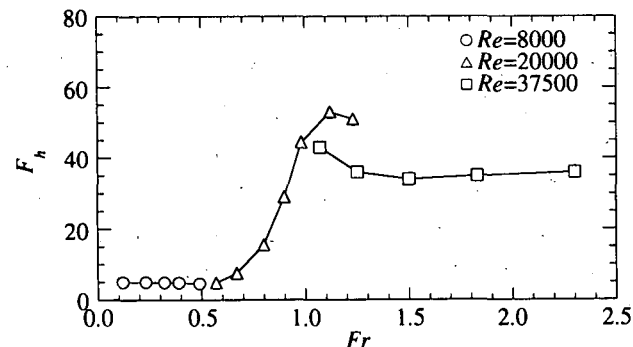


(a) 中山⁸⁾による実験結果

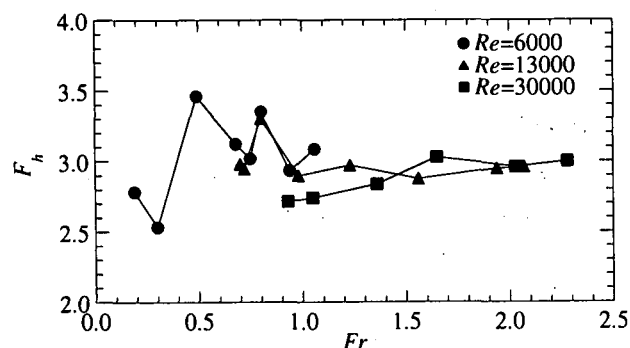


(b) 本実験結果

図-3 h の Skewness



(a) 中山⁸⁾による実験結果



(b) 本実験結果

図-4 h の Flatness

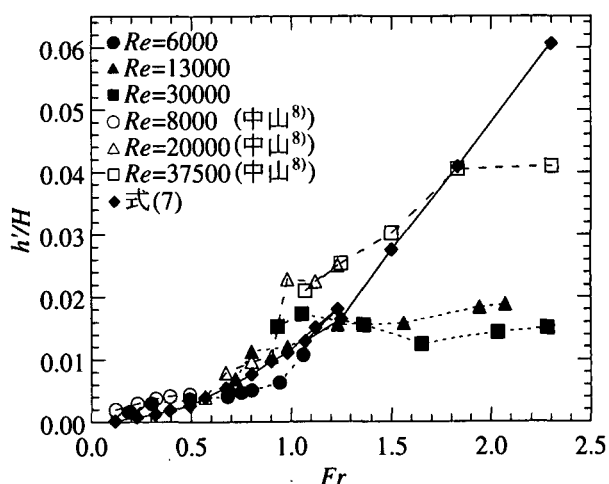


図-5 水面変動

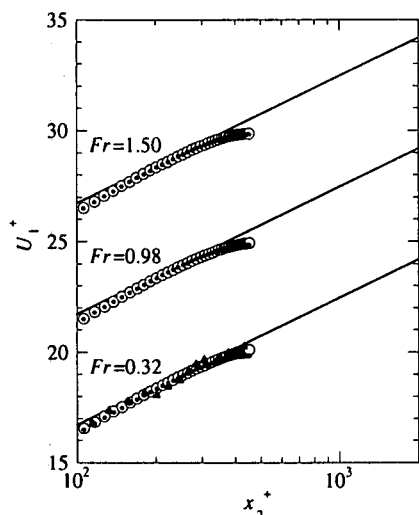
にも使えるよう、不等間隔直交座標の食違い格子上で行われた。圧力解法にはHSMAC法を、時間進行には陽的差分のAdams-Bashforth法を採用し、初期条件として平行流から時間発展計算させた。従って定常状態に至るまでは平均水面の位置も時間変化するので、次式で計算された。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U_{1s} \frac{\partial H}{\partial x_1} = U_{2s} \quad (8)$$

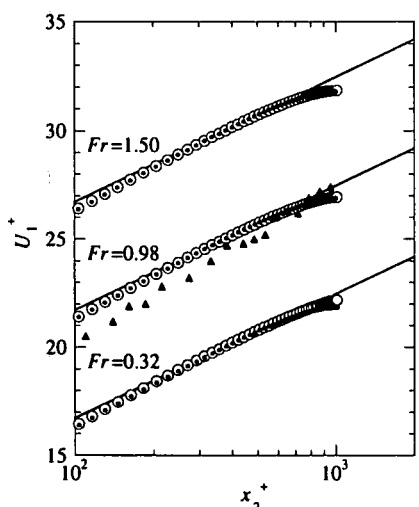
6. 計算結果と考察

計算はフルード数とレイノルズ数の影響が見られるよう Re 数を 8000, 20000, 37500 の 3 つの値, Fr 数を 0.32, 0.98, 1.50 の 3 つの値の組み合わせで合計 9 ケースの計算を行った。

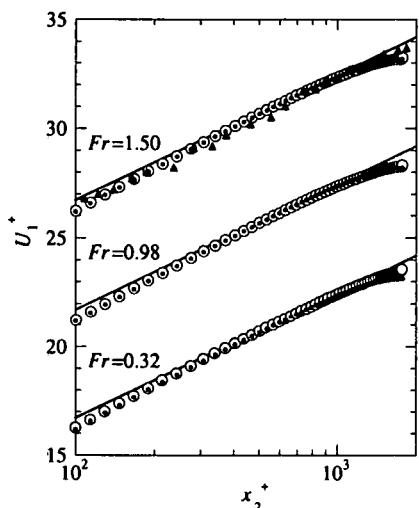
計算結果は図-6から図-8に示してある。実験データのある場合は図示している。図-6は平均流速の計算結果を対数則プロットしたものである。本水面モデルを組み込んだものと水面モデルなしのもの両方を図示している。 U_1^+ , x_2^+ は粘性スケールで無次元化された平均速度と路床からの距離で直線は標準対数則である。開水路水面近傍は閉管路の中心部に似ており、水面効果は無視してスリップ面と仮定すると閉管路の対称面と同一になる。しかし、実験からは平均流速は水面で勾配をもっており、低レイノルズ数、低フルード数では水面までほぼ対数則が成り立つことが知られている。この傾向は本計算により良く再現されている。また中山⁸⁾の実験によるとレイノルズ数が高くなり、フルード数が限界流に近づくとき後流成分が現れ流速は



(a) $Re=8000$



(b) $Re=20000$



(c) $Re=37500$

○ 計算結果 ● 計算結果 (モデルなし)
▲ 実験結果 (中山⁸⁾) — $U_1^+ = 2.5 \ln x_2^+ + 5.2$

図-6 平均流速分布の計算結果

対数則を上回り、また水面での速度勾配が小さくなる。これは渦粘性係数の減衰が抑制されるからで、本モデルはその傾向も捉えている。しかし平均流速は標準対数則より常に下になり後流成分は現れない。後流成分は境界層で顕著に現れる事が知られているが、閉管路では見られず、開水路流でもその強度は小さいと考えられる。また本水面モデルは $k-\omega$ 法を修正したもので、もとの $k-\omega$ 法は対数則領域の下端で標準対数則より低い値をとる傾向がある。

図-7は乱流エネルギー k の計算結果である。水面近傍の計算結果は実験を良く再現している。DNSによれば k は水面近傍で微増することが指摘されているが、本計算の勾配がゼロの境界条件でも十分である事が分かる。

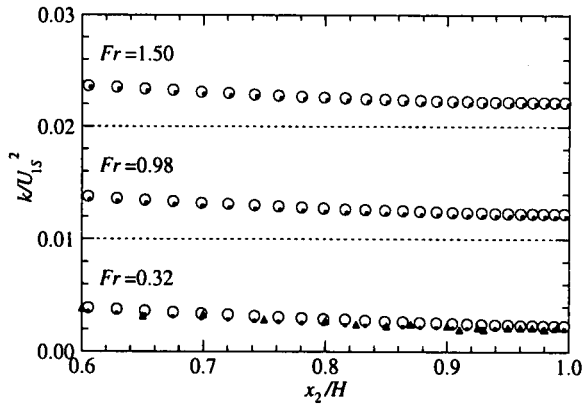
図-8は乱流エネルギーの散逸率 ε の計算結果である。水面近傍以外では実験値に概沿っているが、実験値がフルード数により水面近傍で複雑な変化をしているのは捉えられていない。DNSによれば ε も k 同様水面近傍でほぼ一定値をとるので、本計算結果に問題があるとは言い切れない。

7. 結論

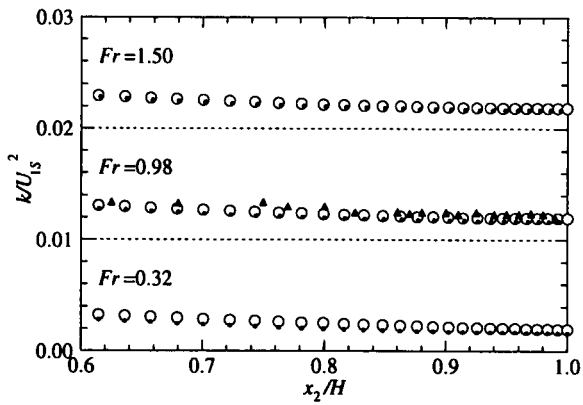
水面変動をパラメータとした水面効果のモデルを2方程式乱流モデルに組み込み等流について計算を行った。水面変動はフルード数と水面での流速、乱れ強度に依存する半理論式を用い算定された。計算結果は実験の傾向を良く捉えている。水面近傍では異方性が強くなるが、等方性渦粘性仮定を用いる2方程式モデルでも渦粘性係数を修正する事でその効果は表せることが分かった。ただ実験で高レイノルズ数で限界流近くで見られる後流成分は再現できないことが分かった。高レイノルズ数のDNSは不可能で精度良い検証は出来ない。今後精度ある実験で検証されるべきであろう。

参考文献

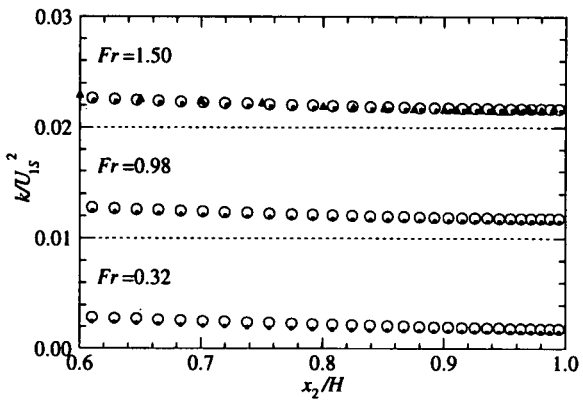
- 1) Rodi, W.: Turbulent Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review -, IAHR, Delft, The Netherlands, 1980.
- 2) 瀬津家久, 中川博次: 一般開水路および閉管路の三次元乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, 369/II-5, pp.89-98, 1986.
- 3) 瀬津家久, 中川博次: 修正 $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, 387/II-



(a) $Re=8000$



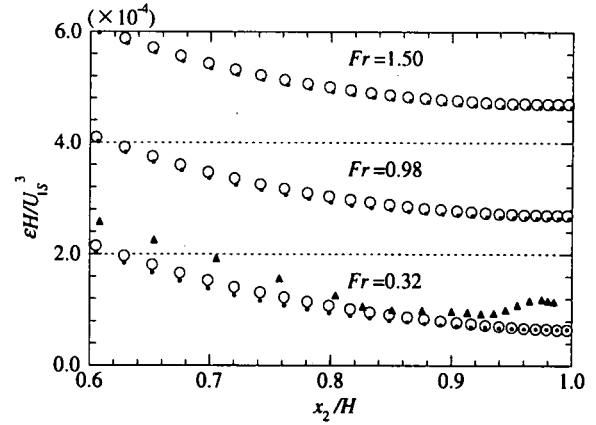
(b) $Re=20000$



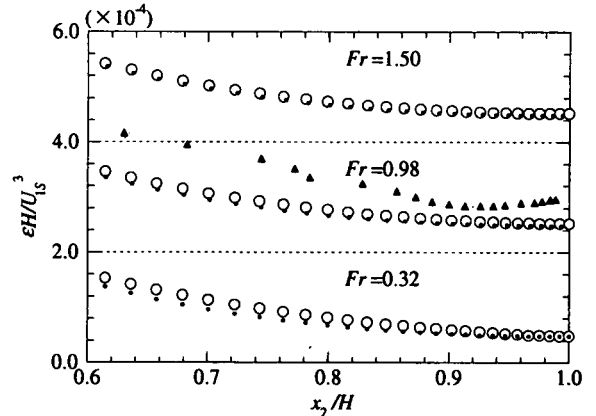
(c) $Re=37500$

- 計算結果
- 計算結果 (モデルなし)
- ▲ 実験結果 (中山⁸⁾)

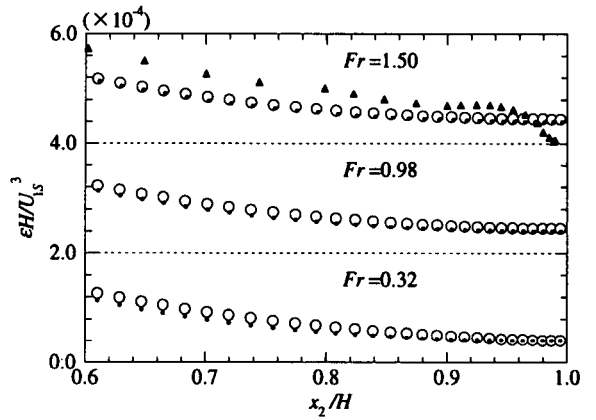
図-7 乱流エネルギーの計算結果



(a) $Re=8000$



(b) $Re=20000$



(c) $Re=37500$

- 計算結果
- 計算結果 (モデルなし)
- ▲ 実験結果 (中山⁸⁾)

図-8 乱流エネルギー散逸率の計算結果

8, pp.125-134, 1987.

- 4) 河原能久, 常山修治: 応力方程式モデルによる十分発達した開水路乱流の解析, 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 299-302, 1993.

- 5) Sugiyama, H. Akiyama, M., Matsubara, T. and Hirata, M.: Numerical Analysis of Three-Dimensional Turbulent Structures in Open Channel Flow, *Comp. Fluid Dynamics J.* Vol.4, pp.239-262,

1995.

- 6) Naot, D. and Rodi, W.: Calculation of Secondary Currents in Channel Flow, *J. Hydraulics Div.*, ASCE, Vol.108, HY-8, pp.948-968, 1982.
- 7) 棚津家久, 中山忠暢: 自由水面近傍の乱流構造と水面変動との関連性に関する研究, 土木学会論文集, 593/II-43, pp.69-78, 1998.
- 8) 中山忠暢: 自由水面近傍の乱流構造と組織渦の水理特性に関する研究, 京都大学修士論文, 平成9年2月.
- 9) 中山昭彦, 横嶋哲: 開水路流れ計算のための水面変動を考慮した乱流モデル, 水工学論文集, 第43巻, pp.389-394, 1999.
- 10) Wilcox, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, Inc. La Canada, 1993.
- 11) Komori, S., Ueda, H. Ogino, F. and Mizushima, T.: Turbulence structure in stably stratified open-channel flow, *J. Fluid Mech.* Vol.130, pp.13-26, 1983.
- 12) Rashidi, M.: Burst-interface interaction in free surface turbulent flows, *Phys. Fluids*, Vol.9, pp.3485-3501, 1997.

(2000年4月21日受付)