

不整形地盤を伝播する SH 波動場の 固有関数展開表示について

Eigenfunction Expansion of SH Wave-Fields
for a Layered Medium Having an Irregular Interface

中川英則*, 東平光生**

Hidenori NAKAGAWA and Terumi TOUHEI

* 学生員 工修 東京大学大学院 社会基盤工学専攻 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

** 正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部 土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

Mathematical viewpoints of the eigenvalue problems provide geometrical aspects for integral equations used in various physical problems. One of the authors Touhei previously showed spectral representation of Green's function concerned with the scattering problem for a layered acoustic half-space. This paper shows a representation of SH wave-fields for a layered medium having an irregular interface in terms of eigenfunctions for the continuous spectra and verifies applicability of these expressions to the boundary integral equations.

Key Words : SH wave-fields , Boundary Integral Equation , Wavenumber Integration , Eigen Function Expansion

1. はじめに

不整形地盤を伝播する波動場の解析では局所的な地震動の増幅、減衰といった現象が指摘されている。しかしながら、この局所的な増幅がどのような原因で現れるかを分析することは今後の課題である。現在では、急速なコンピュータ技術革新により、これら数値計算による不整形地盤の解析はFDM,FEM,BEMをベースとした数値解析により可能となってきた¹⁾。

ところで、これらの数値解析では、伝播してくる様々な種類の波全ての影響を一つにまとめた形で評価している。一方で、ある特有のモードが地盤の振動をより励起することも良く知られた事実である。このことから、地盤を伝播する波動を各モードの重ね合わせとして表現し、それらのモードに対する地盤の影響を評価することのできる表現を本論文では検討した。特に、入射波の形によらない表現をとることができれば、それは地盤特有の性質に根ざした表現と言える。

近年、成層媒質中の散乱体による散乱波動場のスペクトル分解表現が与えられた²⁾。そこでは、境界積分方程式とGreen関数の波数積分をカップリングすることで、散乱体波動場をスペクトル表現する試みがなされている。もともと地震波動場を波数積分として表現し、解析的に実行する試みはそう新しいものではなく、1904年のLamb³⁾に始まる。無限領域域での積分が関係することから、実際にこの積分を実行することは困難を伴う。しかし、近年のコンピュータ技術の急速な発展に伴い、波数積分による波動場表現の数値解析的な評価も可能となりつつある。

本論文では、境界積分方程式中に現れるGreen関数のスペクトル分解表現を用いることで、不整形地盤を伝播するSH波動場を固有関数の重ね合わせとして表現することを検討した。

ここでは、不整形地盤を伝播するSH波動場に対し、境界積分とスペクトル積分の順序交換がそのままでは自由にできなくなることが、この手法を適用する上で大きな問題点となる。散乱波動場のスペクトル分解表現²⁾では、この問題が浮上してこない範囲に限って展開を進めているが、本論文で取扱う問題の本質上この点は避けられない。そこで、急減少関数を被積分関数に掛けることで、積分順序交換の問題を解決し⁴⁾、不整形地盤内の波動を連続スペクトルに対する固有関数によって分解することを試みている。

2. 不整形地盤を伝播する波動場の境界積分方程式による表現

2.1 解析モデルの設定

本論文では、Fig.1に示すような半無限媒体の上にある不整形な境界を有する層に、下方向からSH平面波が入射する問題を考えている。ここで上層は、波数 k_1 をもつ均質で等方性の層であり、基盤層は波数 k_2 をもつ均質で等方性の半無限媒体とする。また入射波 u_i は、波数 k_0 で、 $x-z$ 平面に対して z 方向から θ_0 の角度で入射するとした。したがって、入射波 u_i は、観測点Pの座標を (x_P, z_P) 、入射波の初期位置を (x_{IN1}, z_{IN1}) としたとき次式で与えられる。但し、式(1)の第2項目は鏡像解の影響を表す項となっている。これは、以下で

解析モデルに対する境界積分方程式を立てたとき、自由境界面からの影響を除去するためである。物理的には、自由境界で生じた反射波に対応する。

$$u_1(P) = e^{ik_0(x_P - x_{1N1}) + i\nu_0(z_P - z_{1N1})} + e^{ik_0(x_P - x_{1N1}) - i\nu_0(z_P + z_{1N1})} \quad (1)$$

$$\nu_0 = k_2 \cos \theta_0 = \sqrt{k_2^2 - k_0^2} \quad (2)$$

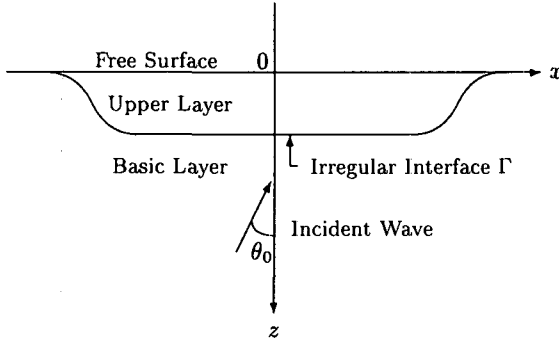


Fig.1 解析モデル

2.2 支配方程式と境界条件

Fig.1 に示される解析モデルに対し、周波数領域での方程式として、次なる Helmholtz 方程式が得られる。なお、以下では便宜上、上層を内部領域 (internal domain) Ω_i 、基盤層を外部領域 (external domain) Ω_e と呼ぶことにする。

$$(\nabla^2 + k_1^2)u_1 = 0 \quad (\text{in } \Omega_i) \quad (3)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)u_2 = 0 \quad (\text{in } \Omega_e) \quad (4)$$

ここに、 u_1 は内部領域 Ω_i での変位量。また u_2 は、外部領域 Ω_e における入射波と境界からの散乱波との重ね合わせによるトータルとしての変位量を表す。このとき、このモデルに対する境界条件は、以下で表される。

(1) 自由表面上において、

$$\mu_1 \frac{\partial u_1(P)}{\partial n_i} = 0 \quad (P \in \Omega_i) \quad (5)$$

$$\mu_2 \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_e} = 0 \quad (P \in \Omega_e) \quad (6)$$

(2) 内部領域 Ω_i と外部領域 Ω_e とが接する境界を Γ と表すと、

$$u_1(P) = u_2(P) \quad (P \in \Gamma) \quad (7)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1(P)}{\partial n_i} = \mu_2 \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_e} \quad (P \in \Gamma) \quad (8)$$

とそれぞれなっている。

ここに μ_1, μ_2 は、内部領域、外部領域におけるせん断係数をそれぞれ表すものとする。また、対象としている領域を左手に見て回る向きに境界の向き付けを定めるとき、境界の法線方向を対象領域に対して外向きに

取り、内部領域に対する法線方向を n_i によって、外部領域に対する法線方向を n_e によってそれぞれ表した。

2.3 境界積分方程式

観測点 P が境界 Γ 上にある場合、表層・半無限層のそれぞれに対する境界積分方程式を用いて表現すると次のような式が立つ。ここに、点 Q は境界 Γ 上を動くソースを、 $G(P, Q)$ は Green 関数を、 $\frac{\partial}{\partial n_Q}$ は点 Q での法線方向微分をそれぞれ表すものである。

$$(\text{in } \Omega_i): \frac{1}{2}u_1(P) = \int_{\Gamma} [G(P, Q) \frac{\partial u_1(Q)}{\partial n_{iQ}} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_{iQ}} u_1(Q)] ds_Q \quad (9)$$

$$(\text{in } \Omega_e): \frac{1}{2}u_2(P) = \int_{\Gamma} [G(P, Q) \frac{\partial u_2(Q)}{\partial n_{eQ}} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_{eQ}} u_2(Q)] ds_Q + u_1(P) \quad (10)$$

2.4 Green 関数の波数積分表示

式 (9), (10) の境界積分方程式に現れる Green 関数は、それぞれ式 (3), (4) で表される Helmholtz 方程式に対する基本解となっている。ただし、入射波と同様に鏡像解の影響を考慮していることに注意する。

このとき、Helmholtz 方程式に対する基本解である 0 次の第 2 種 Hankel 関数の波数積分による表現を用いると、式 (9), (10) の境界積分方程式に現れる Green 関数は以下のように表すことができる。ただし、 Ω_i, Ω_e における Green 関数の違いは、被積分関数に現れる ξ の関数である α にその意味を含ませた。

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi|x_P - x_Q|} E_{\xi}(z_P, z_Q) d\xi \quad (11)$$

$$E_{\xi}(z_P, z_Q) = \frac{1}{2\alpha} [e^{-\alpha|z_P - z_Q|} + e^{-\alpha|z_P + z_Q|}] \quad (12)$$

ここに、

$$(P \in \Omega_i): \alpha = \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \quad (13)$$

$$(P \in \Omega_e): \alpha = \sqrt{\xi^2 - k_2^2} \quad (14)$$

であり、また関数 $E_{\xi}(z_P, z_Q)$ は、以下に示す波数領域の Green 関数の支配方程式を満足するものである (この証明については、後述の Appendix A に記載した)。

$$\left(\frac{d^2}{dz_P^2} + k_1^2 - \xi^2 \right) E_{\xi}(z_P, z_Q) = -\delta(z_P - z_Q) \quad (15)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz_P^2} + k_2^2 - \xi^2 \right) E_{\xi}(z_P, z_Q) = -\delta(z_P - z_Q) \quad (16)$$

ここに、波数領域の Green 関数の支配方程式は、観測点 P が領域 Ω_i にあるときは式 (15) に、観測点 P が領域

Ω_c にあるときは式(16)にそれぞれ対応している。

3. 不整形地盤を伝播する波動場の固有関数展開表示

3.1 Permissible-Sheet の作成

さてここで、境界積分方程式に現れる Green 関数を固有関数展開の形で表現する必要性から、式(11)に現れる積分変数 ξ を実数の範囲から複素数の範囲にまで拡張し、積分経路を取り直す。このとき、式(11)の被積分関数に含まれる α について、変数 ξ に対する多価性を考慮した Riemann 面のとり方が要求されてくる。以下、Riemann 面のとり方に要求される幾つかの条件をみてゆく。

1) . 時間依存性として、 $\exp(i\omega t)$ を考慮した際、式(11)によって表現される波動場が外側に逸散してゆくよう、 $-\infty \sim \infty$ へ向かう実軸に沿った積分経路上で常に $\text{Im}(\alpha) > 0$ が満たされていること。

2) . 外部領域内での波動場が Radiation-Condition を満足するよう、実軸に沿った積分経路上においては、 $\text{Re}(\alpha) > 0$ となっていること。

3) . Riemann 面上に取り直された積分経路上において、式(11)の被積分関数が変数 ξ に対して常に解析的につながっていること。

以上の条件を考慮することで、Riemann 面とその上に取られた積分経路は Fig.2 のようになる。

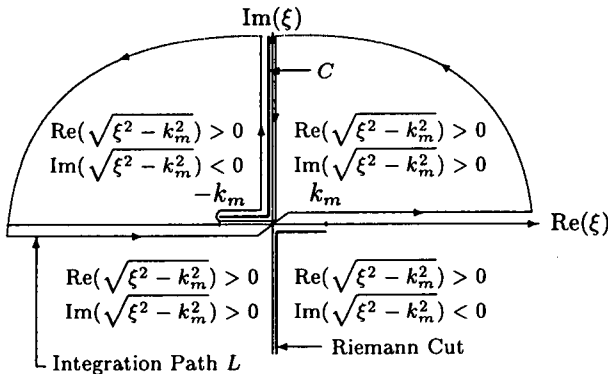


Fig.2 複素 ξ 平面上の Permissible-Sheet と積分経路

3.2 連続スペクトルに関する固有関数で表現された Green 関数

$$\begin{aligned} G(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi|x_P - x_Q|} E_{\xi}(z_P, z_Q) d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} [E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q) - E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q)] d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、式(17)に現れる積分経路 C は、Fig.2 に示す分岐線上に位置する経路である。これは、Fig.2 に示さ

れる分岐線回りの経路 L を、分岐線上に近づけていった際の極限として捉えられるものである。また、式(17)に現れる $E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q)$ および $E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q)$ は、経路 L に沿ってとられる関数 $E_{\xi}(z_P, z_Q)$ の値のうち、第一象限上のものを $+$ で、第二象限上のものを $-$ で表現したものである。これは、第一象限を通る経路上では ξ の関数である α が $\text{Im}(\alpha) > 0$ なる値を、第二象限を通る経路上では $\text{Im}(\alpha) < 0$ なる値をそれぞれとることに対応させて、 $+$ 、 $-$ の符号を当てはめたことによる。したがって、 $E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q)$ に関して $\alpha = i\bar{\alpha}$ 、 $E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q)$ に関して $\alpha = -i\bar{\alpha}$ となる。ただし、 $\bar{\alpha} = \sqrt{k_m^2 - \xi^2}$ と置いた。

ここで、式(17)に現れる $[E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q) - E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q)]$ について、さらに展開をすすめてみる。

($z_P \leq z_Q$ の場合)

$$\begin{aligned} &E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q) - E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q) \\ &= \frac{1}{2i\bar{\alpha}} [e^{-i\bar{\alpha}(z_Q - z_P)} + e^{-i\bar{\alpha}(z_P + z_Q)}] \\ &\quad - \frac{1}{2(-i\bar{\alpha})} [e^{i\bar{\alpha}(z_Q - z_P)} + e^{i\bar{\alpha}(z_P + z_Q)}] \\ &= \frac{4}{2i\bar{\alpha}} \cos(\bar{\alpha}z_P) \cdot \cos(\bar{\alpha}z_Q) \end{aligned} \quad (18)$$

($z_Q \leq z_P$ の場合) 上と同様に、

$$\begin{aligned} &E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q) - E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q) \\ &= \frac{4}{2i\bar{\alpha}} \cos(\bar{\alpha}z_P) \cdot \cos(\bar{\alpha}z_Q) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、式(15),(16)より、

$$\Psi_k(z_P, z_Q) = E_{\xi}^{+}(z_P, z_Q) - E_{\xi}^{-}(z_P, z_Q) \quad (20)$$

$$(\mathbf{L}_z - \xi^2) \Psi_k(z_P, z_Q) = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{L}_z \equiv \frac{d^2}{dz_P^2} + k_m^2 \quad (m = 1, 2) \quad (22)$$

が成立していることが分かる。

このとき、 $\xi \in C$ なる波数の集合は連続スペクトルに対応していることが知られている。

以上より、Green 関数は、

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \cdot \frac{4}{2i\bar{\alpha}} \cos(\bar{\alpha}z_P) \cdot \cos(\bar{\alpha}z_Q) d\xi \quad (23)$$

とまとめることができる。

さらに、

$$\psi_{\xi}(z) = \frac{1}{a} \cos(\bar{\alpha}z) \quad (24)$$

$$a = \sqrt{\frac{\pi\bar{\alpha}}{2}} \quad (25)$$

と置くことによって、式(17)は、

$$G(P, Q) = \frac{i}{2} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi(z_P) \psi_\xi(z_Q) d\xi \quad (26)$$

と書ける。

3.3 固有関数展開された Green 関数を用いた境界積分方程式の表現

式(26)による Green 関数の表現を、境界積分方程式(9),(10)の被積分関数に現れる $G(P, Q)$ に用いることで、境界積分方程式は次のように書くことができる。

(内部領域)

$$u_1(P) = \int_\Gamma \left[\frac{i}{2} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] q_1 ds_Q - \int_\Gamma \mathbf{n}_{iQ} \cdot \nabla_Q \left[\frac{i}{2} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] u_1 ds_Q \quad (27)$$

(外部領域)

$$u_2(P) = \int_\Gamma \left[\frac{i}{2} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] q_2 ds_Q - \int_\Gamma \mathbf{n}_{eQ} \cdot \nabla_Q \left[\frac{i}{2} \int_C e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] u_2 ds_Q + u_1(P) \quad (28)$$

ここに、 $\mathbf{n}_{iQ}$ および $\mathbf{n}_{eQ}$ はそれぞれ内部領域、外部領域に対する境界 Γ 上での単位法線ベクトルを表したものである。また、 ∇_Q は境界 Γ 上でのソース点 $Q(x_Q, z_Q)$ に関する勾配 (gradient) を表している。便宜上、式(9),(10)に現れる法線方向微分を、これらの記号によって書き換えた。

3.4 スペクトル積分と境界積分の順序交換

ここでもし、観測点 $P(x_P, z_P)$ が $x_P \neq x_Q$ を満足する位置にある場合、式(27)および式(28)の被積分関数に現れる指数関数 $e^{i\xi|x_P - x_Q|}$ の影響により、積分経路 C に関する積分は有限の範囲に収まることが分かる。そのことから、式(27)および式(28)の被積分関数は Lebesgue 可積分となり、積分記号の下での微分が可能となる。また、被積分関数の絶対値についての積分も有限の範囲に収まることから、Fubini の定理が適用でき、式(27)および式(28)に現れる積分記号の交換も許されることとなる (Appendix B を参照)。

一方、 $x_P = x_Q$ となる位置では、半無限区間にわたる分岐線上での絶対値量に関する積分は発散してしまい、Fubini の定理に基づく積分記号の交換は、このままでは不可能となってしまう。散乱波動場のスペクトル分解表現²⁾ではこのような点を避け、 $x_P \neq x_Q$ を満足するような位置に限って問題を取扱っている。しかし、本論文で取扱う問題では、 $x_P = x_Q$ となる位置

を避けるわけにはいかないことから、この点の問題は深刻であり、これを回避する方法が必要となる。

そこで、急減少関数を式(27)の被積分関数に掛け、2変数の関数として積分可能な新たな関数をつくることを考えた。以下、具体的にこれを示すと、

($P \in \Omega_i$)

$$u_1(P) = \frac{i}{2} \int_\Gamma \left[\int_C e^{i\xi(|x_P - x_Q| + \varepsilon)} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] q_1 ds_Q - \frac{i}{2} \int_\Gamma \mathbf{n}_{iQ} \cdot \nabla_Q \left[\int_C e^{i\xi(|x_P - x_Q| + \varepsilon)} \psi_\xi \psi_\xi d\xi \right] u_1 ds_Q \quad (29)$$

となる。ここに、 ε は正数とする。

ここで、Fubini の定理を用いて積分記号を交換し、さらに、被積分関数是有界連続であることから $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき Lebesgue の収束定理⁴⁾が使えて(この定理により、積分と $\varepsilon \rightarrow 0$ なる極限操作の交換が可能となる)。

($P \in \Omega_i$)

$$u_1(P) = \frac{i}{2} \int_C A(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi \quad (30)$$

$$A(x_P) = \int_\Gamma e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi(z_Q) q_1(Q) ds_Q - \int_\Gamma \mathbf{n}_{iQ} \cdot \nabla_Q \left\{ e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi(z_Q) \right\} u_1(Q) ds_Q \quad (31)$$

という、結果を得る。

また、 $x_P = x_Q$ なる範囲の外部領域問題についても式(28)に上と同様な操作を施すことで、最終的に

($P \in \Omega_e$)

$$u_2(P) = \frac{i}{2} \int_C B(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi + u_1(P) \quad (32)$$

$$B(x_P) = \int_\Gamma e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi(z_Q) q_2(Q) ds_Q - \int_\Gamma \mathbf{n}_{eQ} \cdot \nabla_Q \left\{ e^{i\xi|x_P - x_Q|} \psi_\xi(z_Q) \right\} u_2(Q) ds_Q \quad (33)$$

と書くことができる。

3.5 不整形地盤を伝播する波動場の固有関数による表現

以上より、最終的に表層および半無限層での変位場はそれぞれ次式の形にまとめることができる。

$$u_1(P) = \frac{i}{2} \int_C A(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi \quad (\text{観測点 } P \in \Omega_i) \quad (34)$$

$$u_2(P) = \frac{i}{2} \int_C B(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi + u_1(P) \quad (\text{観測点 } P \in \Omega_e) \quad (35)$$

4. 数値計算例

4.1 BEM,固有関数展開による数値解の比較

Fig.1において、不整形性を有する境界部の底面に当たるフラットな部分の長さがz軸をさかいに左右2kmの計4km,それに続く両サイド部分が長さ2kmに渡って正弦曲線的に変化する形となっている場合を想定した。表層は、厚み1km,媒質の質量密度が1.9g/cm³,せん断係数が1.539×10⁵ N/cm²。半無限的層は、媒質の質量密度が2.3g/cm³,せん断係数が13.248×10⁵ N/cm²となっている。ここに、振動数1Hzの平面波が境界底部の中心点(x,z)=(0.0km,1.0km)を基準として、一定の距離(99km)からz軸に対しある角度をもって入射するとした。Fig.3, Fig.4は、Fig.1に示す図において観測点Pのz座標を0.001kmに固定したまま、x座標を正方向にずらしていった場合の各観測位置での変位量(m)をBEMおよび本論文で示した固有関数展開の各場合について比較したものである。ここで、Fig.3は入射波が0度方向から、Fig.4は入射波が45度方向からそれぞれ入射した場合に対応している。

X座標(Km)	Z座標(Km)	BEM(m)	固有関数展開(m)
0.0	0.001	(実部) 1.72451 (虚部) -15.39635	(実部) 1.71920 (虚部) -15.37495
1.5	0.001	(実部) -1.27922 (虚部) 1.26517	(実部) -1.27915 (虚部) 1.26104
2.0	0.001	(実部) 0.53063 (虚部) -3.37728	(実部) 0.52981 (虚部) -3.37963
3.0	0.001	(実部) -0.56556 (虚部) 4.00059	(実部) -0.56542 (虚部) 4.00762
5.0	0.001	(実部) 2.08645 (虚部) 1.24624	(実部) 2.08505 (虚部) 1.24445

Fig.3 BEM および固有関数展開を用いた場合の計算解の比較(0度方向から入射の場合)

X座標(Km)	Z座標(Km)	BEM(m)	固有関数展開(m)
0.0	0.001	(実部) 10.02894 (虚部) 3.25857	(実部) 10.01393 (虚部) 3.24706
1.5	0.001	(実部) -2.22194 (虚部) -2.01866	(実部) -2.20627 (虚部) -2.00253
2.0	0.001	(実部) -3.10973 (虚部) 0.22356	(実部) -3.11206 (虚部) 0.21315
3.0	0.001	(実部) -1.29699 (虚部) 1.57723	(実部) -1.28775 (虚部) 1.58292
5.0	0.001	(実部) -2.39214 (虚部) 1.73396	(実部) -2.38971 (虚部) 1.73271

Fig.4 BEM および固有関数展開を用いた場合の計算解の比較(45度方向から入射の場合)

BEMと固有関数展開との結果の誤差は、波数積分の打ち切り、積分ステップ|Δξ|の粗さによるものであり、誤差をさらに小さくすることが可能であるが、これによって計算時間は倍近く増加することを断っておく。Fig.3, Fig.4を得るのに計算に要した時間は、一つの観測点当たりVT-α.500DPで1時間弱である。

4.2 入射角の違いが及ぼす不整形地盤を伝播する波動場への影響

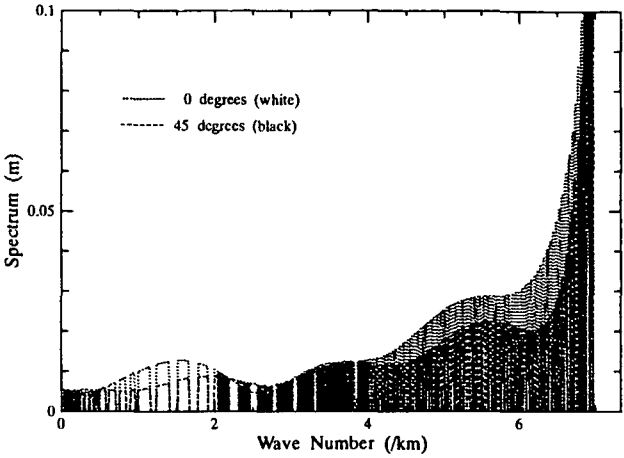


Fig.5 入射角の違いによる実軸上のスペクトル変化

前述したように、境界積分と波数積分の交換は内部領域においても可能であることが分かる。この交換が内部領域についても許されることによって、不整形地盤を伝播する波動場の生成に強く効いてくる波数、つまり地盤固有の周波数を見てとることが可能になるといえる。ここでは、小節4.1の計算で用いた不整形地盤モデルにSH波が入射する際、その入射角度によって波動場のスペクトル分布にどのような変化が生じるのかについてみてゆく。

Fig.5,は、(x_p,z_p)=(0.0km,0.001km)におけるスペクトルの変化を、入射波が0度と45度の角度でもってそれぞれ入射した場合について表したものである。ただし、入射波の振動数は一定であり、1.0Hzとなっている。横軸は、式(34),(35)に現れる積分経路Cの実軸上に位置する波数であり、縦軸は式(34),(35)の積分を離散化した、

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \frac{i}{2} \int_C A \psi_\xi(z_P) d\xi \\ &= \frac{i}{2} \sum_n A_{\xi_n} \psi_{\xi_n}(z_P) |\Delta\xi| \\ &= \sum_n \hat{A}_{\xi_n} \cos(\bar{\alpha}_n z_P) e^{i\xi_n x_P} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} u_2(P) &= \frac{i}{2} \int_C B \psi_\xi(z_P) d\xi + u_1(P) \\ &= \frac{i}{2} \sum_n B_{\xi_n} \psi_{\xi_n}(z_P) |\Delta\xi| + u_1(P) \\ &= \sum_n \hat{B}_{\xi_n} \cos(\bar{\alpha}_n z_P) e^{i\xi_n x_P} + u_1(P) \end{aligned} \tag{37}$$

に対する総和記号内の各項の値に、絶対値をつけたものである。ただし、式(36),(37)の係数はそれぞれその上に書かれた式の係数をまとめた上、x_pに関した指数部分を外に出したものとなっている。ここに、|Δξ|=0.01(/km)とした。よって、横軸の次元は波数(/km)、縦軸の次元は変位(m)となる。

Fig5では式(34),(35)に現れる積分経路 C の実軸に対応する部分のみを示している。外部領域の波動場は波数 $0.0 \sim 2.62$ (/km)の範囲に対応しており、内部領域の波動場は $0.0 \sim 6.98$ (/km)の範囲に対応していることになる。

ここで、実軸上におけるスペクトル振幅に注目する。不整形地盤の物性値から、周波数1Hzの入射に対して内部領域内での表面波の各モードに相当する波数は、基本モードで 6.809 (/km)、高次1次モードで 5.255 (/km)、高次2次モードで 2.623 (/km)と計算される。そこで、これらの波数に対応する変位をみると、入射角度および観測位置によってこれらの振幅スペクトルは複雑に変化していることが分かる。このことは、式(34),(35)の係数が観測点の x_p 座標値に関係していることから、位置の違いによって表面波のモードに対応する各波数での変位が変化することからも理解できる。他の入射振動数を用いた場合や入射角度を変えた結果からも、同様なことが結論付けられた。

以上から、表層での波動場は入射角度と観測位置によって変化し、ある場所で表面波の影響が強く捕らえられたらといって、必ずしもその場所で同じく表面波のみの影響を強く捕らえることができるとは限らないことが分かる。BEMと固有関数展開による数値解の比較からしても、このことは妥当であると結論付けた。

5. 結論

本論文では、固有関数展開されたGreen関数を境界積分方程式に適用し、不整形地盤の解析を試みた。スペクトル表現されたGreen関数のスペクトル積分と境界積分の順序交換の妥当性を示すことで、不整形地盤内の波動が連続スペクトルに関係した固有関数によって分解されることとなった。これによって、不整形地盤内の波動現象の影響評価を、固有関数と関連づけることが可能となる。なお、不整形地盤内の波動場が固有関数によって分解できたことから、不整形地盤に対するGreen関数の波数積分表現、およびその固有関数展開表現が可能になったといえる。この場合、Green関数の具体的な構成に当っては、0次の第2種Hankel関数を入射波の影響として用いればよい。

Appendix-A 波数領域のGreen関数の支配方程式

波数領域のGreen関数 $E_\xi(z_p, z_q)$ が、式(15),(16)を満たすことの証明を行う。ここで、これらの証明は本来超関数の範囲で扱われるべきものであるが、ここでは数学的厳密性に拘ることなく形式的に処理したこと、また、内部・外部領域における媒質の波数 k_1, k_2 をまとめて波数 k として計算を行ったことを断っておく。

関数 $E_\xi(z_p, z_q)$ が、

$$\left(\frac{d^2}{dz_p^2} + k^2 - \xi^2\right) E_\xi(z_p, z_q) = -\delta(z_p - z_q) \quad (A.1)$$

を満足していると仮定する(十分性)。すると、

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2) e^{i\xi|x_p - x_q|} E_\xi(z_p, z_q) \\ &= -\delta(z_p - z_q) e^{i\xi|x_p - x_q|} \end{aligned} \quad (A.2)$$

となる。ここに仮定(B.1)を用いた。したがって、

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2) G(P, Q) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) e^{i\xi|x_p - x_q|} E_\xi(z_p, z_q) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\delta(z_p - z_q) e^{i\xi|x_p - x_q|} d\xi \\ &= -\delta(z_p - z_q) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi|x_p - x_q|} d\xi \\ &= -\delta(x_p - x_q) \cdot \delta(z_p - z_q) \quad \square \end{aligned} \quad (A.3)$$

あるいは、関数 $E_\xi(z_p, z_q)$ の式(12)による具体的な形を用いて、性質の良い関数(急減少関数)を掛け積分することで式(A.1)なる関係を証明してもよい(必要性)。

Appendix-B Fubiniの定理⁴⁾

f を $D = (a, b) \times (c, d)$ 上の可測関数としたとき、

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d |f(x, y)| dy \right\} dx, \int_c^d \left\{ \int_a^b |f(x, y)| dx \right\} dy$$

のいずれかが存在するならば、関数 f は積分可能となり、

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_c^d |f(x, y)| dy \right\} dx \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b |f(x, y)| dx \right\} dy \end{aligned}$$

参考文献

- 1) 額根一起：研究展望 不整形地盤における地震動，土木学会論文集 No.437/I-17, pp.1~18, 1991.10
- 2) T.Touhei: a scattering problem by means of the spectral representation of Green's function, *Computational Mechanics*, vol.25, 2000.
- 3) Lamb. H, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **203**, pp. 1-42, 1904.
- 4) 伊藤清三：ルベーク積分入門，裳華房

(2000年4月21日受付)