

構成則データベースに基づく有限要素解析に関する研究

A Study on Finite Element Analysis based on Constitutive Relationship Database

亀田敏弘*・尾崎孝宏**

Toshihiro KAMEDA and Takahiro OZAKI

*正会員 Ph. D. 筑波大学講師 機能工学系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

**学生会員 筑波大学大学院 理工学研究科 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

New finite element analysis algorithm based on the constitutive relationship database is studied. Since this method does not require the calculation of constitutive equation at each time step, there is huge advantage for the numerical analysis of the material whose constitutive equation is complicated. In this study, the process of database construction and the feasibility of proposed algorithm are discussed.

Key Words : finite element method, constitutive relationship, database, inverse analysis

1. はじめに

有限要素解析が工学の諸分野における数値解法として認知されて久しい。計算機の性能向上に伴い、弾性体はもとより、非弾性体についても、適当な構成則を用いることにより現象を予測することが可能となっている。

これまで、数値計算の分野で計算機の性能を考える際、中央処理装置 (CPU) の性能は計算速度に、記憶装置 (RAM) の大きさは要素数に代表される計算規模に関係付けられてきた。したがって、CPU の性能と RAM の容量の両者の制限の範囲内で解析が行われていた。

近年は、GeoFEM のような、高速な CPU に加えて、TBytes 級の RAM を実装する超並列計算機が登場しており、大規模計算が可能となっている。

しかしながら、従来の有限要素解析で非弾性体を取り扱う場合には、構成則の決定が前提であり、構成則が不十分である場合には、計算自体の精度を向上させても、現象を精度良く予測することは不可能である。

あるいは、極めて複雑な構成則で記述される材料を有限要素解析で取り扱う際には、たとえ要素数が少ない場合でも計算時間が問題となることがある。すなわち、与えられた計算機環境において、RAM は非常に余っているにもかかわらず、CPU の速度が不足するため、解析が困難な状況が起こり得る。たとえば、Kameda and Zikry¹⁾ で用いられている結晶塑性と転位密度に基づいた構成則では、積分点毎に 24 の非線形常微分方程式を解く必要が生じるため、3 次元有限要素解析に適用する場合には要素数が 10^2 のオーダーであっても現実的な時間で解を得ることが困難になる。

構成則が応力とひずみの対応関係を規定するものであるとすれば、想定される様々な条件下での応力とひずみの対応関係をあらかじめ蓄積しておけば (構成則の

データベース化)、有限要素解析における構成則の計算はデータベースへのアクセスに置き換えることができるため、構成則の複雑さに依存しない高速な求解が可能になると考えられる。

本研究では、構成則データベースの作成手法の提案ならびにデータベースを用いた簡単な弾塑性解析を行い、その可能性についての検討を行う。

2. 構成則データベースの構築

構成則データベースの構築が有効と考えられる場合として、次の 2 つが考えられる。

- 構成則を決定することが困難であり、実験的に応力とひずみの対応関係を取得せざるを得ない場合
- 構成則が複雑であるため、逐次計算しては、実用的な計算速度が得られない場合

以下、それぞれの場合におけるデータベース構築手法について述べる。

2.1 実験によるデータベース構築手法

構成則の決定が困難なものとして、地盤材料が挙げられる。これまで、多くの実験が行われており、データの蓄積量は多い。しかしながら、単純な圧縮試験に基づくデータのみでは、実際に起こり得る複雑な変形下での応力状態を予測することが必ずしも可能とは限らない。

データベースの構築のように、ひずみ場と応力場を対応づけることを目的とする場合、等価介在物法を応用した逆解析²⁾を用いるが有効と考えられる。この手法により、変位場と境界条件から非弾性材料の内部の応力場を取得することが可能になる。

等価介在物法により、応力ひずみ関係は一般に次の

ように表すことができる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (1)$$

ここで $\sigma, \epsilon, \epsilon^*$ はそれぞれ応力, ひずみ, 非弾性ひずみ (eigen strain) である。釣り合い式 $\sigma_{ij,j} = 0$ を用いると, 次式を得る。

$$\sigma_{ij,j}^* = \sigma_{ij,j}^v \quad (2)$$

ここで $\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}\epsilon_{kl}^*, \sigma_{ij}^v = C_{ijkl}\epsilon_{kl}^v$ である。平面ひずみ場において, ダイラテンシーに関して定数 k を用いて $\epsilon_{12} = k(\epsilon_{11}^* + \epsilon_{22}^*)$ と仮定すると解くべき方程式は次のようになる。

$$\sigma_{11,11}^* + \sigma_{11,22}^* = \sigma_{11,11}^v - \sigma_{22,22}^v - k\sigma_{12,22}^v \quad (3)$$

$$\sigma_{12,11}^* + \sigma_{12,22}^* = \sigma_{12,11}^v + \sigma_{12,22}^v + \sigma_{11,12}^v + \sigma_{22,12}^v - k\sigma_{12,12}^v \quad (4)$$

式 (3), (4) はそれぞれ境界での $\sigma^* (= \sigma^v - \sigma)$ を境界条件とした, $\sigma_{11}^*, \sigma_{12}^*$ の Poisson's 方程式であるので数値的に解くことができる。したがって, 式 (1) から最終的に応力が得られる。

以下, この手法を豊浦標準砂に適用した例を示す。

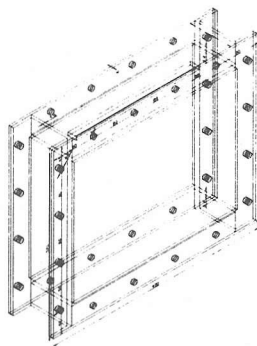


図-1 ステンレス製型枠

図-1 に示す, 内寸 240(H) × 320(W) × 80(D)(単位 mm) のステンレス製型枠の前後面に 10mm 厚のガラスを装着し, 境界条件を取得するため, 40mm 厚のラバーフォームで周囲を囲んだ豊浦砂を充填する。20mm 間隔に格子点を設けたメンブレンを用いて, 供試体の変形を観察する。メンブレンとガラス間には, シリコングリスを塗付し, 摩擦の低減を図る。上部中央に, 80mm 四方の載荷板を設置し, 準静的に 800N まで圧縮荷重を加え, 200N ごとに 35mm カメラで撮影を行う。実験装置を図-2 に示す。

供試体の撮影の後, A4 版に引き伸ばした写真を 600dpi のイメージスキャナで読み取り, 画像処理によ

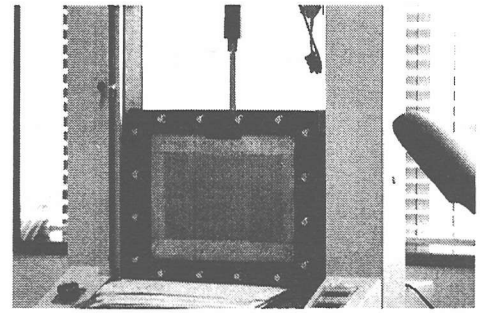


図-2 実験装置

り, 2 値化を行って格子点のみを抽出し, その移動を検出することによって, 変位場を取得する。理論上は $25.4/600/20.0 = 2.12 \times 10^{-4}$ のひずみが検出可能である。境界のラバーフォームの応力ひずみ関係をあらかじめ実験により決定しておくことにより, 境界の応力も同時に取得することが可能となる。このようにして得られた境界条件と変位場をもとに, 式 (3), (4) を解いて (1) を用いることにより, 領域内部の応力が求められる。この一連の作業を示したものが図-3 である。

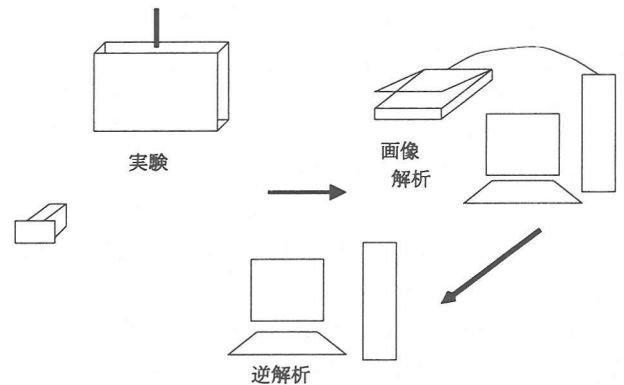


図-3 作業の流れ

実験結果として, 図-4 から図-7 はそれぞれ, 200N, 400N, 600N, 800N の荷重を加えた状態の供試体の変形の様子を示したものである。

現状ではダイラテンシーの測定が不十分であるため, ダイラテンシーは無いものとして逆解析を行った。荷重 200N, 400N, 600N, 800N における σ_{22} の応力場を図-8 から図-11 に示す。

今回は実験が 1 ケースのみであることから, 変位場から応力場を取得することにより, データベース構築手法を示すにとどめている。载荷条件についても検討を加え, 効率的なデータベースを実際に構築することについては今後の課題としたい。

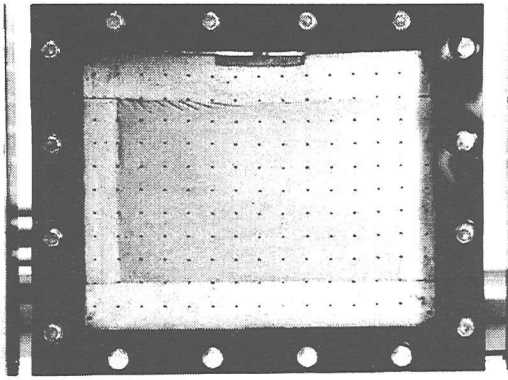


図-4 供試体の変形の様子 (200N)

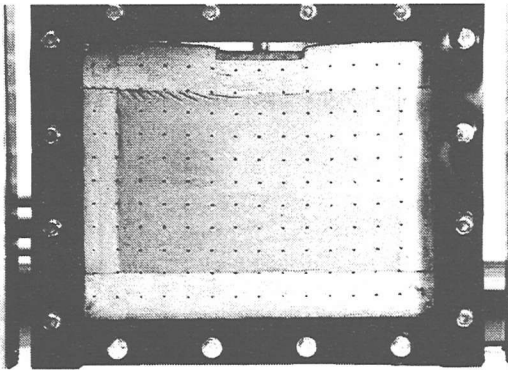


図-5 供試体の変形の様子 (400N)

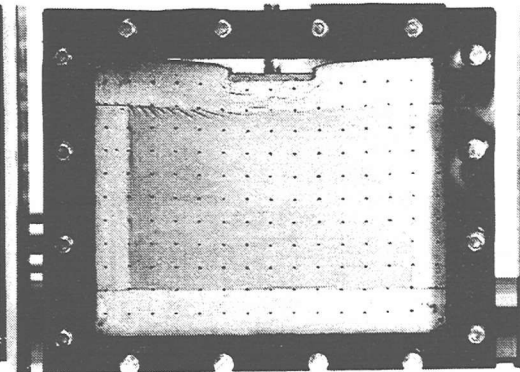


図-6 供試体の変形の様子 (600N)

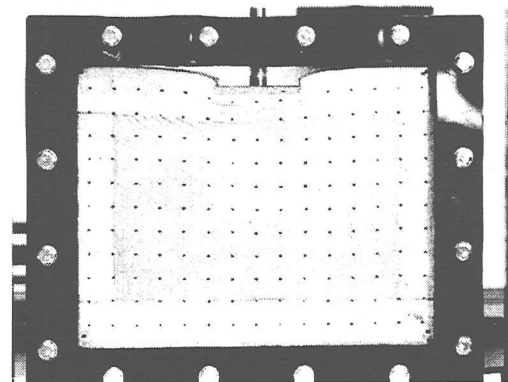


図-7 供試体の変形の様子 (800N)

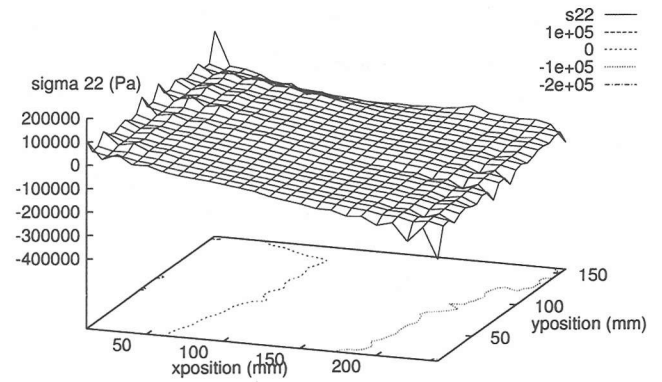


図-8 逆解析により得られた σ_{22} 応力場 (200N)

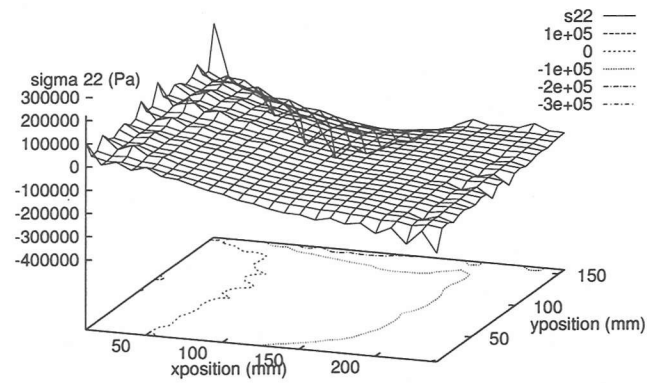


図-9 逆解析により得られた σ_{22} 応力場 (400N)

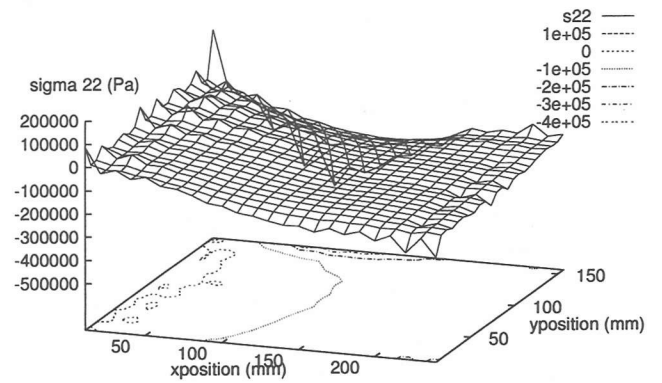


図-10 逆解析により得られた σ_{22} 応力場 (600N)

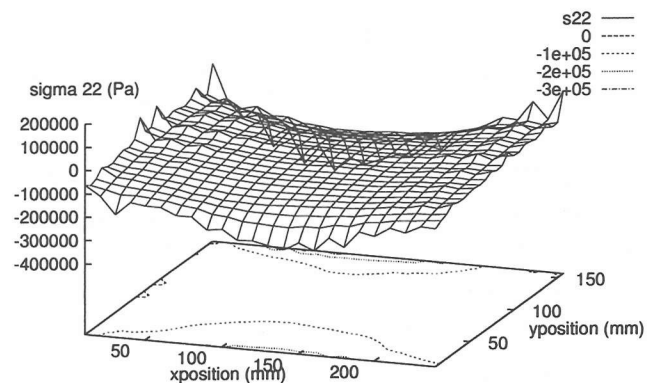


図-11 逆解析により得られた σ_{22} 応力場 (800N)

2.2 構成則が複雑な場合

想定される応力・ひずみについて、あらかじめデータベースを構築するには非常に多くの労力がかかることが予想される。また、構築されたデータベースを記憶・保存するための領域も必要である。現状では、単一の計算機で複雑な構成則に対するデータベースの構築を完了させることは困難であるが、構築を管理するサーバコンピュータを用意して、構築に要する計算の配分を管理させて、構築を複数の計算機に分散させるクライアント-サーバ型の方法を用いると、稼働率が 100%に満たない計算機により多くの計算を分担させることが可能となるため、効率良くデータベースの構築が可能になると考えられる。¹

一旦データベースが構築されてしまえば、共有財産として利用することが可能となるため、使用頻度が高い構成則であれば、データベース構築に要した初期計算コストの回収は可能であろう。

3. 構成則データベースを用いた解析手法

弾塑性解析では、増分荷重ごとの収束にいたるまでの間、剛性マトリクスを更新する必要がある。

物体が塑性領域にあるとき、全体剛性マトリクス K_T は次のように書ける。

$$K_T = \int_V B^T D_{ep} B dV \quad (5)$$

ここで、 B は B マトリクス、 D_{ep} は弾塑性要素剛性マトリクスである。従来の有限要素解析では、各段階での D_{ep} を応力・ひずみ状態から計算することにより求めていたが、 D_{ep} をその都度計算によって求めるのではなく、データベースを用意しておき、その段階におけるひずみ状態から D_{ep} の各成分を参照できれば、 D_{ep} 作成のための計算を単なるメモリアクセスに置き換えることが可能になる。

D_{ep} は 2 次元問題の場合 3×3 の対称行列になる。そこで式 (6) に示すように 6 つの成分を用意する。

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} D_{ep1} & D_{ep2} & D_{ep3} \\ & D_{ep4} & D_{ep5} \\ & & D_{ep6} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ある状態のひずみを表す $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ の 3 つの数値の組み合わせから、式 (6) で示した D_{ep} の 6 つの成分の値が参照できるようにしたものを、ひずみ- D_{ep} 関係のデータベースとする。

あらかじめ、想定される応力・ひずみの変域において、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ を変化させて、対応する D_{ep} を計算し、表-1 のような形でファイルとして保存しておく。

表-1 ひずみ- D_{ep} 関係のデータベース

ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	D_{ep1}	D_{ep2}	...	D_{ep6}
--------------	--------------	---------------	-----------	-----------	-----	-----------

有限要素解析の初期化の部分で、このデータベースを RAM 上に読み込む。この情報は RAM 上に存在するため、非常に高速にアクセスすることが可能である。このとき、ひずみが添字となるため、あらかじめ桁を移動させて整数化する工夫を用いて、以下の配列を用意する。

$$\begin{aligned} dep1[f_1(\epsilon_x), f_2(\epsilon_y), f_3(\gamma_{xy})] &= D_{ep1} \\ dep2[f_1(\epsilon_x), f_2(\epsilon_y), f_3(\gamma_{xy})] &= D_{ep2} \\ &\vdots \\ dep6[f_1(\epsilon_x), f_2(\epsilon_y), f_3(\gamma_{xy})] &= D_{ep6} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $dep\ n$ は配列名、 f_n は整数化のための操作、 $D_{ep\ n}$ はひずみに対応する D_{ep} の成分である。

図-12 にこの方法による弾塑性解析プログラムのフローチャートを示す。

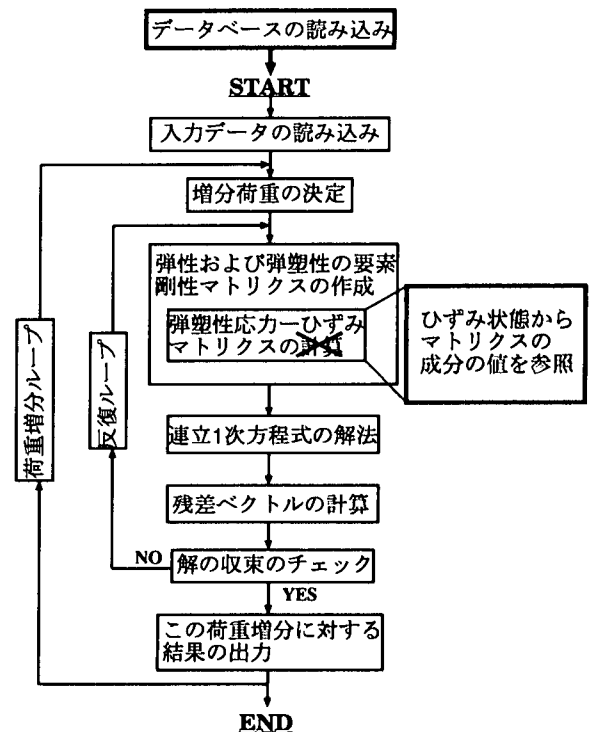


図-12 プログラムのフローチャート

¹ 2000 年 4 月現在、世界で進行中の暗号鍵解読プロジェクト RC5-64 ではこうした分散型の計算が行われている。
<http://www.distributed.net/>

4. 解析結果

4.1 解析対象

解析には、y 軸方向の単軸引っ張りを考え、対象として図- 13 に示す要素数 1,10,50 のものを使用する。用いた物性値を表-2 に示す。

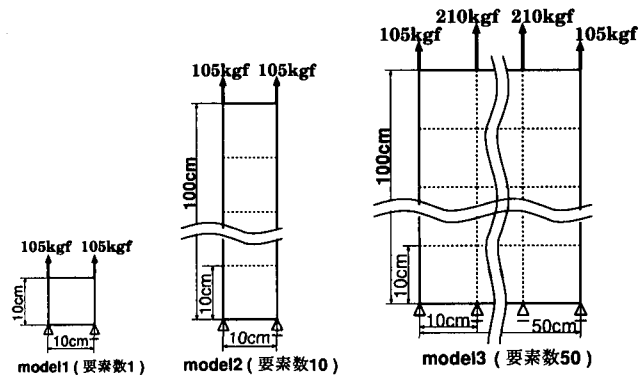


図-13 解析対象

表-2 解析に使用した物性値

物性値 [単位]	記号	数値
ヤング率 [kgf/cm ²]	E	2.1×10^6
ポアソン比	ν	0.3
硬化関数 [kgf/cm ²]	$H' (= A)$	1.36×10^5
単軸降伏応力 [kgf/cm ²]	$\bar{\sigma}$	10

4.2 データベースの作成

計算に用いるコンピュータにはメモリ量に制限があるため、変数となる $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ を想定される範囲で変化させて、容量を制限したデータベースを作成する。本解析では D_{ep} の 6 つの成分それぞれについて、 $100 \times 100 \times 10$ の大きさのデータベースを用意する。単軸引っ張りについて考えるため、せん断成分 γ_{xy} は小さいことを考慮し、 γ_{xy} の変域は、 ϵ_x, ϵ_y の $1/10$ に設定した。

以上の条件で、メモリ上に作成されるデータベースの大きさは、式 (8) によって表される。

1 成分 (単精度浮動小数点) : 4 Bytes
 D_{ep} の成分の個数 : 6
各成分の配列数 : $100 \times 100 \times 10$

$$\begin{aligned} 4 \times 6 \times (100 \times 100 \times 10) &= 2.4 \times 10^6 \text{ Bytes} \\ &= 2.4 \text{ MBytes} \end{aligned} \quad (8)$$

4.3 解析条件

解析に用いた条件を以下に示す。

- 平面応力状態とする。
- 構成則は Von Mises 則を用いる。
- 計算時間の計測の際、構成則データベースはメモリ上にあることを前提とし、読み込む時間は計算時間に含まない。
- 計算時間は 10 回計算した平均値とする。
- 除荷は行わないため、履歴はデータベース化しない。
- 収束条件について、残差応力ベクトル ψ の成分の 2 乗和が任意に定めた基準値以下になったら収束したものと判断する。本解析では引っ張り荷重の 10^{-6} を収束の判断基準とする。

4.4 解析結果および考察

図-14 に、全計算時間ならびに、全計算中の D_{ep} 作成に要する時間の割合を示す。

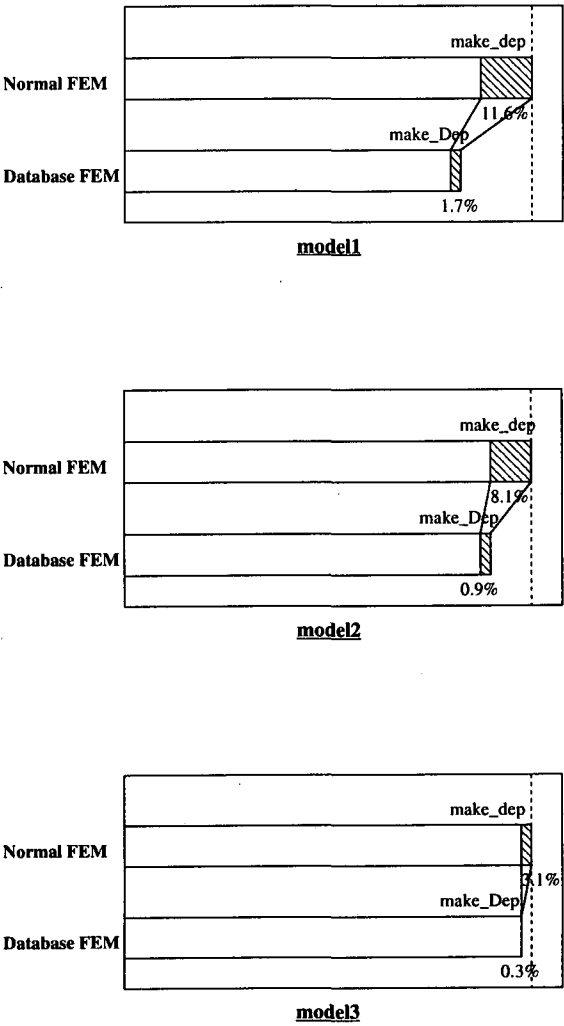


図-14 D_{ep} 作成に要する時間の比較

構成則として Von Mises 則を用いる場合、全計算時間中の D_{ep} 作成にかかる時間の割合は、要素数が増加

するにつれ減少するため、全計算時間の短縮量は大きくない。しかしながら、 D_{ep} 作成に要する時間の短縮率は、表-3に見られるように要素数が増加するにつれ、むしろ向上している。

表-3 データベース化による計算時間の短縮率

	model1 (要素数 1)	model2 (要素数 10)	model3 (要素数 50)
従来	11.6	8.1	3.1
データベース	1.7	0.9	0.3
短縮率 [%]	85	88	90

したがって、より複雑な構成則を用いる場合は、 D_{ep} 作成に要する演算量が増加するため、データベース化することによる計算時間の短縮により、解析全体の計算時間の高速化が期待できる。

データベース化に伴い、本来は連続的な量である D_{ep} が、不連続になるため、収束回数に影響を与えることが考えられる。図-15 から図-17 に、変形が塑性領域に入り、収束計算を始める step20 から step30 までの、各荷重増分ステップにおける収束するまでの反復回数を示す。

いずれの場合も データベースを用いた計算では、step20 での収束に要する回数が大きくなっている。その理由として、本研究で用いたデータベースが小型であるため、材料が降伏する際に収束が困難であったと考えられる。RAM の容量を大きくすれば、よりきめの細かいデータベースが構築できるため、収束に要する回数はさらに短縮できることが考えられる。

最後に、それぞれのモデルについて、両手法により得られた応力-ひずみ曲線を図-18 から図-23 に示す。

5. おわりに

構成則を逐次計算するかわりに、予めデータベースを作成しておき、解析中は RAM アクセスのみを行うことによって、速度の向上を目指す有限要素解析手法を提案した。

データベースの構築手法に関して、構成則の決定が困難な場合と、構成則の計算が困難な場合の 2 通りについての方法を提案した。

Von Mises 則に基づく簡単な弾塑性構成則データベースを作成し、実際にデータベースを用いた有限要素解析を行うことにより、その効果について検討を行った。

収束に要するまでの計算回数がデータベースの使用により増加する結果となったが、大規模なデータベースの使用により、改善できると考えられる。

構成則が複雑である場合には、データベース使用による計算量の減少が顕著であるため、本研究で提案する手法の効果が高いことが示唆された。

本研究の一部は科学研究費補助金 (奨励研究 A) により可能となったため、ここに感謝します。

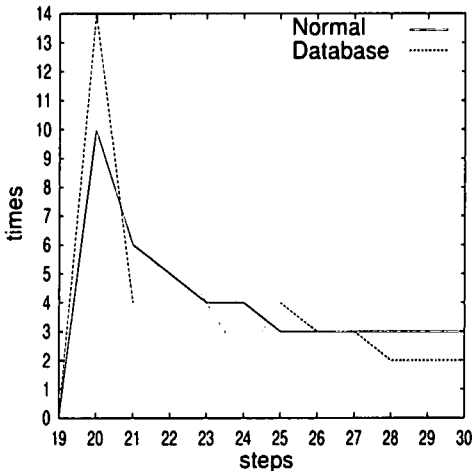


図-15 収束計算の反復回数 (model 1)

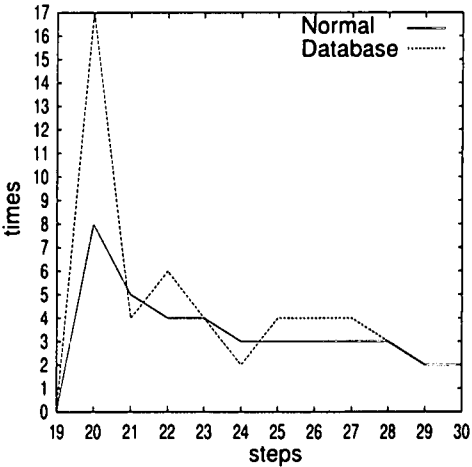


図-16 収束計算の反復回数 (model 2)

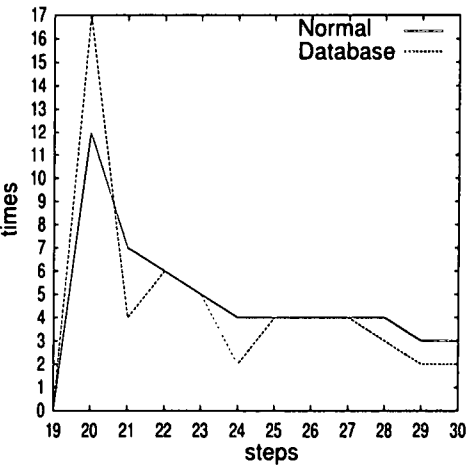


図-17 収束計算の反復回数 (model 3)

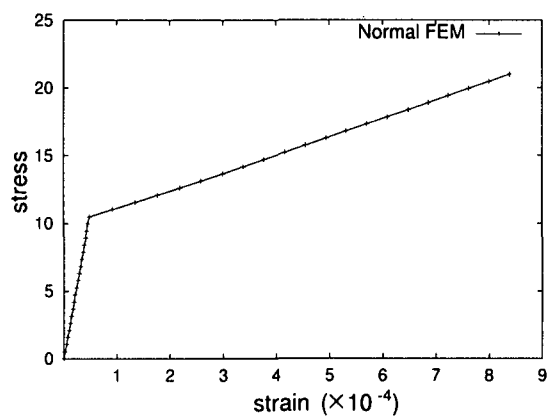


図-18 応力-ひずみ曲線 (model1 従来)

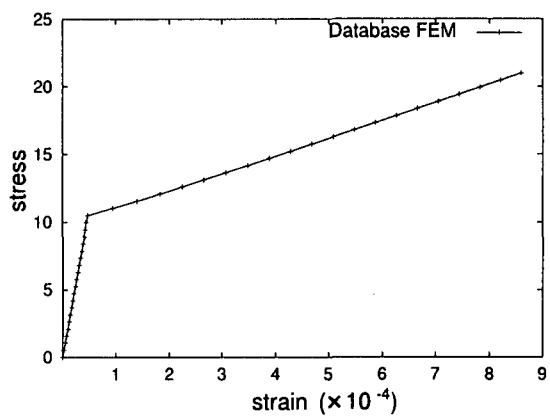


図-21 応力-ひずみ曲線 (model1 データベース使用)

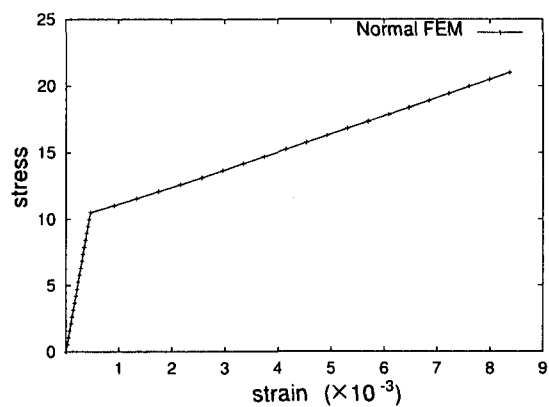


図-19 応力-ひずみ曲線 (model2 従来)

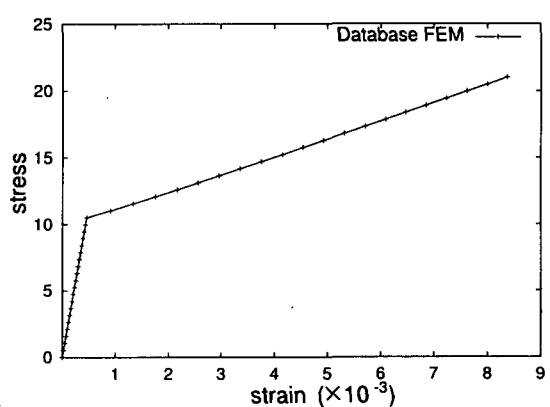


図-22 応力-ひずみ曲線 (model2 データベース使用)

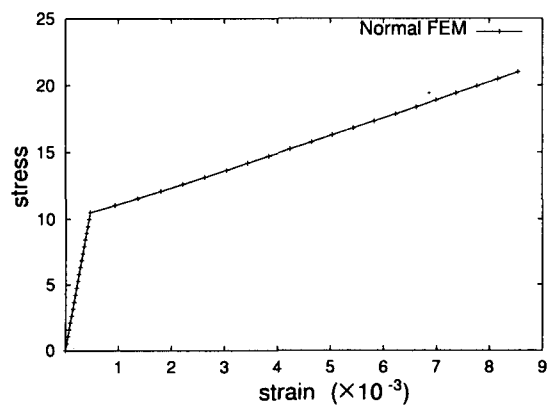


図-20 応力-ひずみ曲線 (model3 従来)

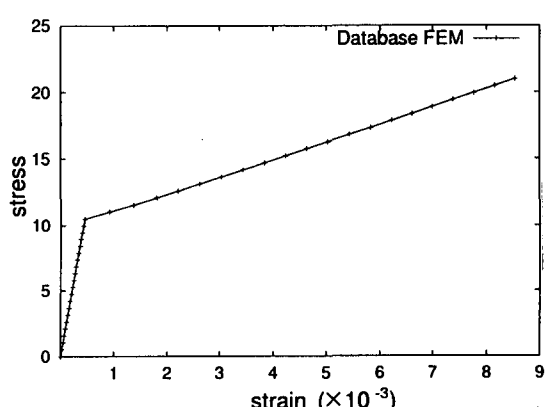


図-23 応力-ひずみ曲線 (model3 データベース使用)

参考文献

- 1) Kameda, T. and Zikry, M. A.: Three Dimensional Dislocation-Based Crystalline Constitutive Formulation for Ordered Intermetallics, *Scripta materialia*, v 38, n 4, pp. 631 – 636, 1998.
- 2) Hori, M., Kameda, T. and Hosokawa, N.: Formulation of Identifying Material Property Distribution based on Equivalent Inclusion Method, *Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE*, Vol. 16, No. 1, pp. 21s–30s, 1999.
- 3) Zinkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *The Finite Element Method 4th ed.*, McGraw-Hill, 1997.
- 4) Malvern, L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, New Jersey 1969.

(2000 年 4 月 21 日 受付)