

非線形動的 FEM 解析の並列計算のための非反復時間積分法

Non-iterative Time Integration Scheme for the Parallel Computation of Nonlinear Dynamic FEM Analysis

本田利器*・澤田純男**

Riki HONDA and Sumio SAWADA

*正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

Demand for the large scale nonlinear FEM analysis is increasing and the efficient computation of such FEM is becoming important. This paper proposes a non-iterative time integration scheme that is applicable to the dynamic FEM analysis, in which the model is partitioned into subdomains for the purpose of parallel computation.

The proposed scheme is implemented as the combination of the explicit scheme and the implicit scheme. Detail of the algorithm of the proposed scheme is described and some aspects of the proposed method such as its stability is discussed based on the numerical study. Applicability of the method is shown by numerical examples of the dynamic analysis of the model which is partitioned into two subdomains. The computation results show the efficiency and accuracy of the proposed method.

Key Words : time integration, nonlinear dynamic analysis, non-iterative implicit scheme, parallel computation

1. はじめに

地震工学をはじめとする多くの分野において、大規模な非線形動的解析の重要性は非常に高まっている。そのような問題を解くための重要な手段として並列化計算機による解析があげられる。

並列計算により大規模な有限要素法を扱う場合の方法として、対象とするモデルを複数の領域に分割してそれぞれの領域の計算を並列処理する手法¹⁾があげられる。ここで、領域間の相互作用は、その時点における全ての領域の状態量の関数となる。したがって、その時点での状態量と相互作用が整合をとるように解析を進める必要がある。

このような問題を数値的に解く場合、中央差分法等の陽解法を用いれば収束計算は必要ない。ただし、離散時間間隔を小さくする必要があり、多くの計算時間を要する。一方、Newmark の β 法²⁾等の陰解法による解析を行う場合は比較的安定性が高く、したがって、離散時間間隔を大きく設定できる。しかし、陰解法により非線形問題を扱う場合には、各時間ステップにおいて収束計算が必要になるため、やはり多くの解析時間を要する。

本研究では、このような領域分割する有限要素法に適用することが可能な効率的な解析手法として、陰解法と陽解法の結合により、収束計算を伴わずに非線形系の時間積分を行う手法を提案する。

陽解法と陰解法の結合については、解析対象領域を、陽解法による領域と陰解法による領域に分割する手法が提案されている³⁾⁴⁾が、系全体を非線形系として扱う解析においては有効ではない。時間積分の手順を陽解法と陰解法に分割する方法も、予測子・修正子法と

Newmark の β 法を組み合わせる Operator Splitting 法 (OS 法)⁵⁾や、これに変更を加えた手法⁶⁾⁷⁾等が提案されている。

本論文で提案する手法も時間積分の計算を陽解法と陰解法に分割するものである。ただし、後述するように、分割の方法が既存の手法とは異なる。

提案する手法は、陰解法での時間積分手法で解析を行う場合に必要となる収束計算を陽解法に置換することで収束計算のプロセスを省くものである。同様の手法がすでに Sun⁸⁾や酒井⁹⁾らにより提案されているが、これらは変位依存の非線形性を有する問題を扱うものであり、速度依存性を有する問題は扱えないものであった。粘性減衰を有する問題を領域分割した有限要素法で解析する場合には、領域間の相互作用は速度依存性を有することになる。このような問題には、Sun や酒井らの方法は適用できない。提案する手法は酒井らの手法を拡張し、速度依存性を有する問題に対しての適用をはかったものである。

以下では、まず、提案する有限要素法の解析手法で必要となる、速度依存性を有する非線形問題に適用可能な非反復時間積分法について述べる。次に、これを領域分割する有限要素法の動的解析に適用する方法について説明し、最後に数値解析例を示す。

2. 非反復時間積分法

2.1 アルゴリズム

提案する時間積分法のアルゴリズムについて、運動方程式

$$M\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + K(x, \dot{x})x = p(t) \quad (1)$$

(M, C, K は質量, 減衰及び剛性の各マトリクスを表し, x, p, t はそれぞれ変位, 外力の各ベクトル及び時間を表す。) を対象として述べる。

このように, 変位及び速度に依存する非線形性を有する問題は, 例えば, 剛性の変位や速度に依存する部分を右辺に移行するなどして, 一般性を失わずに,

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t, x, \dot{x}) \quad (2)$$

と表すことができる。

この式 (2) において, 時刻レベルを t_n から t_{n+1} に更新する手順について述べる。時間 t_n における変位 x を x_n などのように表すと, 時刻 t_{n+1} における運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{n+1} + C\dot{x}_{n+1} + Kx_{n+1} \\ = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) \\ = f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n) + \Delta f_x + \Delta f_{\dot{x}} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,

$$\Delta f_x = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_n) - f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n) \quad (4)$$

$$\Delta f_{\dot{x}} = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) - f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_n) \quad (5)$$

と書ける。

提案する手法では, 式 (3) の右辺第 1 項 $f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n)$ に対する応答を陰解法である Newmark の β 法で算出する。(Sun ら⁸⁾と同様に Wilson の θ 法を用いることも可能である。) 第 2 項 Δf_x および第 3 項 $\Delta f_{\dot{x}}$ に対する応答は, それぞれ, 変位および速度で定式化した中央差分法により算出する。中央差分法は陽解法であり, 収束計算は伴わない。これら 3 つの項に対する応答の和をとることで時刻 $t = t_{n+1}$ における値が求められる。なお, 第 2 項 Δf_x および第 3 項 $\Delta f_{\dot{x}}$ に対する応答は, 第 1 項だけが作用した場合の応答に対する「差分」に相当するものである。

具体的な手順を以下に示す。

まず, 式 (3) の第 1 項 $f(t_{n+1}, x, \dot{x})$ に対する応答を, Newmark の β 法により算出すると, その応答は,

$$\begin{aligned} x'_{n+1} = & \left(K + \frac{2}{\Delta t}C + \frac{4}{\Delta t^2}M \right)^{-1} \left\{ f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n) \right. \\ & + M \left(\frac{4}{\Delta t^2}x_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{x}_n + \ddot{x}_n \right) \\ & \left. + C \left(\frac{2}{\Delta t}x_n + \dot{x}_n \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{x}'_{n+1} = -\ddot{x}_n + \frac{2}{\Delta t}(x_{n+1} - x_n) \quad (7)$$

$$\ddot{x}'_{n+1} = -\ddot{x}_n - \frac{4}{\Delta t}\dot{x}_n + \frac{4}{\Delta t^2}(x_{n+1} - x_n) \quad (8)$$

と得られる。

また, 式 (3) の第 2 項 Δf_x 及び第 3 項 $\Delta f_{\dot{x}}$ に相当する外力を考慮する事による応答の増分については, 時刻 $t < t_{n+1}$ においては静止している系を想定し, これに $\Delta f_x, \Delta f_{\dot{x}}$ で表される力が時刻 $t = t_{n+1}$ におけるインパルスとして作用した場合の応答を算出すればよい。

Δf_x に対する応答値を変位を用いて定式化した中央差分法により算出すると,

$$\Delta^x x_{n+1} = 0 \quad (9)$$

$$\Delta^x \dot{x}_{n+1} = \left(M + C \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \Delta f_x \frac{\Delta t}{2} \quad (10)$$

$$\Delta^x \ddot{x}_{n+1} = \left(M + C \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \Delta f_x \quad (11)$$

となる。ここで得られる変位の応答は 0 であるため, 変位 x に関しては収束計算は不要となる。次に, $\dot{x}_{n+1}$ を用いて評価した $\Delta f_{\dot{x}}$ に対する応答値を, 速度を用いて定式化した中央差分法により算出する。なお, $\Delta f_{\dot{x}}$ の評価に用いる $\dot{x}_{n+1}$ は, 式 (10) による更新後の値を用いる。これは, $\Delta f_{\dot{x}}$ の評価を行う場合に用いる $\dot{x}_{n+1}$ の値は最終的な値である必要があるからである。この解は,

$$\Delta^{\dot{x}} x_{n+1} = 0 \quad (12)$$

$$\Delta^{\dot{x}} \dot{x}_{n+1} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta^{\dot{x}} \ddot{x}_{n+1} = M^{-1} \Delta f_{\dot{x}} \quad (14)$$

と与えられる。変位の場合と同様に, この解は $x_{n+1} = \dot{x}_{n+1} = 0$ を与えるため, x 及び $\dot{x}$ に関する収束計算は不要である。以上の手順により, 変位, 速度及び加速度が収束計算を伴わずに算出される。

具体的には, 式 (6) - (14) の値を用いて

$$x_{n+1} = x'_{n+1} \quad (15)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}'_{n+1} + \Delta^x \dot{x}_{n+1} \quad (16)$$

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}'_{n+1} + \Delta^x \ddot{x}_{n+1} + \Delta^{\dot{x}} \ddot{x}_{n+1} \quad (17)$$

という解が得られる。

2.2 既存の時間積分法との差異

前述したように, 陰解法と陽解法を結合させることによる時間積分法は提案する手法以外にも提案されている。ここでは, OS 法を例にとり, 提案する時間積分法との違いについて述べる。

対象とする問題として, 変位依存の剛性を有する系の運動方程式

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K(x)x = p(t) \quad (18)$$

を考える。

OS 法の場合, K を変位に依存しない線形部分 K^I と非線形部分 K^E に分ける。まず, 次の時間ステップにおける変位 x'_{n+1} を

$$x'_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_n \Delta t^2 \quad (19)$$

により予測する。そして, この x'_{n+1} を用いて復元力 $K^I(x'_{n+1})$ を評価する。これを用いて

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K^E x = p(t) - K^I(x'_{n+1})x'_{n+1} \quad (20)$$

を, Newmark の β 法などを用いて時間ステップを更新させる。

この手法の場合、まず陽解法により予測値を算出し、次に陰解法により近似解を求めるものとなっている。したがって、 $K(x_{n+1})$ と $K^E + K^I$ は一致しない。収束計算により、これらを一致させることは可能であるが、計算量が増えるだけなので一般にはそのような収束計算は行われない。一方、提案する手法では先に陰解法による状態量の更新を行い、その後に陽解法で解を算出している。したがって、剛性マトリクス K はひとつしか存在しない。このような更新手順の違いが、両者の差異である。

2.3 安定性について

提案する手法の安定性について述べる。提案する手法は、非線形外力のない場合の解析については、Newmarkの β 法と同一の解法となるため、線形解析においては安定条件を満たす。以下、非線形性がある場合について述べる。

単純な系の運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (21)$$

に基づき、手法の安定性を検討することができる。ここで、対象とする問題の速度と変位への依存性を変化させるためのパラメタ θ_c 及び θ_k を導入し、式(21)を

$$m\ddot{x} + (1 - \theta_c)c\dot{x} + (1 - \theta_k)kx = -\theta_c c\dot{x} - \theta_k kx \quad (22)$$

と変形する。

このとき、式(22)の右辺は速度と変位に依存する外力と見なすことができ、提案する手法を適用して時間積分を行うことができる。よって、パラメタ θ_c, θ_k を変化させることにより、非線形性の程度が変化した場合の解析手法の特性について検討することができる。例えば、 $\theta_k > 1$ ならば、剛性が硬化する場合に相当し、 $\theta_k < 1$ ならば剛性が軟化する場合に相当する。

また、式(22)は式(21)と同値であり、パラメタ θ_c, θ_k を変化させても、対象とする系は変化しない。つまり、上記のような式の変形には、対象とする系の諸特性(固有周期等)を式(21)で表される系の値に固定したまま非線形性の影響を考慮することができるという利点もある。

右辺を外力 f として、Newmarkの β 法を用いて時間領域で離散化すると、時間間隔を Δt として

$$m\ddot{x}_{n+1} + (1 - \theta_c)c\dot{x}_{n+1} + (1 - \theta_k)kx_{n+1} = f_{n+1} \quad (23)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{2}\ddot{x}_n\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{n+1}\Delta t \quad (24)$$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{x}_n\Delta t^2 + \beta\ddot{x}_{n+1}\Delta t^2 \quad (25)$$

が得られる。式(22)の右辺の速度、変位依存項が、1ステップ前の時間における値によるものであるとして解くには

$$f_{n+1} = -\theta_c c\dot{x}_n - \theta_k kx_n \quad (26)$$

とすればよく、これをマトリクス表示すると

$$AX'_{n+1} = BX_n \quad (27)$$

ただし、

$$X_n = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_n \\ \dot{x}_n \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad X'_{n+1} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}'_{n+1} \\ \dot{x}'_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$A = \begin{bmatrix} m & (1 - \theta_c)c & (1 - \theta_k)k \\ -\frac{1}{2}\Delta t & 1 & 0 \\ -\beta\Delta t^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_c c & -\theta_k k \\ \frac{1}{2}\Delta t & 1 & 0 \\ (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2 & \Delta t & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

が得られる。

これに変位及び速度の変化分による修正を加える。変位に起因する修正 $\Delta^x X$ は、式(9)-(11)において

$$\Delta f_x = -\theta_k k\Delta x \quad (31)$$

として

$$\begin{aligned} \Delta^x X &= \begin{Bmatrix} \Delta^x \ddot{x} \\ \Delta^x \dot{x} \\ \Delta^x x \end{Bmatrix} \\ &= -\left(m + (1 - \theta_c)c\frac{\Delta}{2}\right)^{-1} \theta_k k \begin{Bmatrix} 1 \\ \Delta t/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta x \end{aligned} \quad (32)$$

となる。したがって、

$$\Delta^x X_{n+1} = H_x(X_{n+1} - X_n) \quad (33)$$

ただし、

$$H_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_x \\ 0 & 0 & h_x\Delta t/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$h_x = -\left(m + (1 - \theta_c)c\frac{\Delta}{2}\right)^{-1} \theta_k k \quad (35)$$

と得られる。

また、速度の補正による修正 $\Delta^{\dot{x}} X$ は、式(12)-(14)において

$$\Delta f_{\dot{x}} = -\theta_c c\Delta \dot{x} \quad (36)$$

とすることにより、

$$\Delta^{\dot{x}} X = \begin{Bmatrix} \Delta^{\dot{x}} \ddot{x} \\ \Delta^{\dot{x}} \dot{x} \\ \Delta^{\dot{x}} x \end{Bmatrix} = -m^{-1}\theta_c c \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta \dot{x} \quad (37)$$

として求められる。なお、ここで用いる $\Delta \dot{x}$ は、式(27)により求められる $\dot{x}$ の増分と式(33)により算出される $\Delta^x \dot{x}$ との和である。したがって、

$$\Delta^{\dot{x}} X_{n+1} = H_{\dot{x}}(X'_{n+1} - X_n + \Delta^x X_{n+1}) \quad (38)$$

ただし、

$$H_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & h_{\dot{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$h_{\dot{x}} = -m^{-1}\theta_c c \quad (40)$$

である。

式 (27), (33), (38) をまとめて表すと,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X'_{n+1} + \Delta^x X_{n+1} + \Delta^{\dot{x}} X_{n+1} \\ &= \left[A^{-1}B + H_x(A^{-1}B - I) \right. \\ &\quad \left. + H_{\dot{x}} \{ (A^{-1}B - I) + H_x(A^{-1}B - I) \} \right] X_n \end{aligned} \quad (41)$$

となる。

式 (41) における $[\]$ 内を D とすると

$$\|X_{n+1}\| = \|D\| \cdot \|X_n\| \quad (42)$$

となるので, これが提案する時間積分法により算出される自由振動の挙動を定める増幅マトリクスに相当する。したがって, D の固有値の絶対値を調べることにより, 時間積分法の安定性を検討することができる。 D の固有値 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ の絶対値がすべて 1 以下であれば式 (41) を漸化式として算出される時系列は発散しない。したがって, 固有値の絶対値の最大値 (以下, 半径 (radius) と呼ぶ) が 1 以下なら解析法としては安定であると言うことができる。

パラメタを一般化するため, 周期および減衰定数を示すパラメタを

$$\omega = \sqrt{k/m}\Delta t \quad (43)$$

$$h = c/m\Delta t \quad (44)$$

とする。

Newmark の β 法のパラメタを $\beta = \frac{1}{4}$ とし, $\theta_c = 0, h = 0.01$ として, θ_k の値を -2 から 1 まで, また, ω を 0 から 2π まで変化させた場合における半径をプロットしたものを図-1 に示す。これは, $\theta_c = 0$ としているので, 酒井ら⁹⁾の方法に相当するものである。

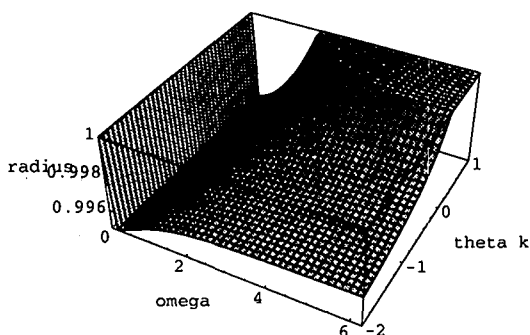


図-1 周期 ω とパラメタ θ_k を変化させた場合の半径の分布。
($\beta = 1/4, \theta_c = 0, h = 0.01$ とした。)

同図から, ほとんどの場合において半径は 1 以下になっており安定であることが分かる。ただし, ω と θ_k がともに大きい場合に, 半径が大きくなっている領域がある。この領域においては, 解析が不安定となる。

が大きい場合とは, 非常に高い周波数領域に相当する。また, θ_k が大きい値をとる場合は, 変位による剛性の修正が正, すなわち, 剛性硬化を生じる場合に相当する。つまり, 提案した手法は, かなり大きい剛性硬化が生じる場合に, 高周波成分が不安定となることが分かる。

なお, 中島ら⁷⁾は, 既存の手法 (OS 法) においても無条件安定が示せるのは剛性が軟化するときのみであることを指摘している。

解析対象の有する周波数特性は, 例えばモード解析により知ることが可能である。しかし, 非線形応答解析を行う場合には, 一般に, 非常に高い周波数成分まで出現しうる。したがって, 解析が安定であるためには, 全ての周波数帯において半径が 1 以下である必要がある。例えば, 図-1 においては, $k=1$ の場合, 低振動数領域で振幅が 1 以下となっている。しかし, このような解析では, 初期状態に関わらず, 解析の過程で高周波成分が混入してくる。混入した成分の周波数における半径が 1 を越える場合, これが発散傾向を有するため, 解析は不安定になる。ただし, 時間的に離散化された解析では, 解析に生じる周波数は上限があり, 式 (43) のように時間間隔で無次元化された周波数でいえば 2π 以上の周波数成分はない。したがって, 無次元化された周波数範囲 0 から 2π において常に 1 以下である場合には解析は安定的である。

一方, 剛性が軟化する場合については半径は常に 1 より小さい値をとっており, 提案手法が剛性が低下する問題に対しては安定であることを示している。軟化する場合について, より広範に検討するため, θ_k の値を -100 から 0 まで変化させた場合について同様の検討をする。 $\theta_k = -100$ の場合とは, 剛性が非線形硬化により初期剛性の約 1% にまで低下する場合に相当する。結果を図-2 に示す。同図は, 剛性が低下する場合については, 解析法は事実上安定性を失わないことを示している。

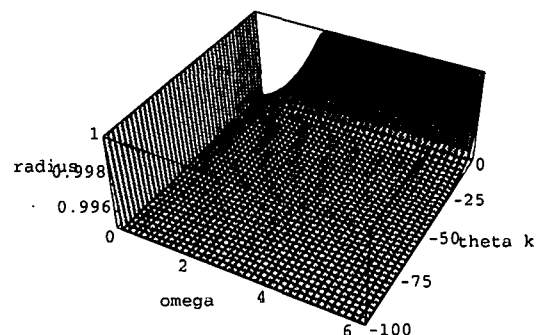


図-2 軟化する場合における半径の周期 ω 及びパラメタ θ_k との関係。
($\beta = 1/4, \theta_c = 0, h = 0.01$ とした。)

以上では, $\theta_c = 0$ としていたので, 酒井らの手法⁹⁾の安定性について検討したことに相当する。次に, 速度依存性を有する問題に適用可能であるという, 提案している手法の特性を考慮した検討を行うため, $\theta_c = 0.2$

とする。 θ_c の値以外の条件は上述したものと同一に設定した場合について、半径の分布を図-3に示す。同図は、図-1と同様の傾向を与えており、提案する手法も、剛性が軟化する場合には安定であることを示している。

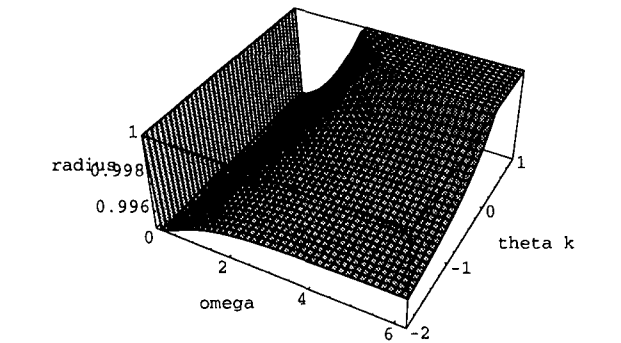


図-3 周期 ω とパラメタ θ_c を変化させた場合の半径の分布.
($\beta = 1/4, \theta_k = 0.2, h = 0.01$ とした.)

また、問題の速度依存性の程度による影響について検討するため、 $\theta_k = 0.1$ に固定し、 θ_c の値を -2 から 1 まで、また、 ω を 0 から 2π まで変化させた場合における半径をプロットしたものを図-4に示す。同図より、一般に半径は 1 以下であり、解析が安定であることが分かる。

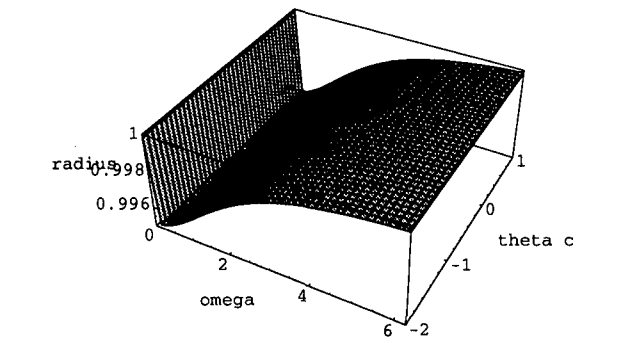


図-4 周期 ω とパラメタ θ_c を変化させた場合の半径の分布.
($\beta = 1/4, \theta_k = 0.1, h = 0.01$ とした.)

なお、実際の問題に適用する場合に注意すべき点として、不安定性による解析の発散傾向は大きい減衰を付加しても必ずしも安定化するものではないということがあげられる。例として、図-3と同様の条件で減衰定数 $h = 1.0$ とした場合について、半径の分布を図-5に示す。この場合でも剛性硬化を生じる場合に高周波数領域で、半径が 1 を越える範囲があり、減衰の付加だけで解析を安定化させることは困難であることを示唆している。

なお、提案している手法の妥当性を検証するため、2自由度のばね-質点非線形系（軟化型剛性）の動的応答

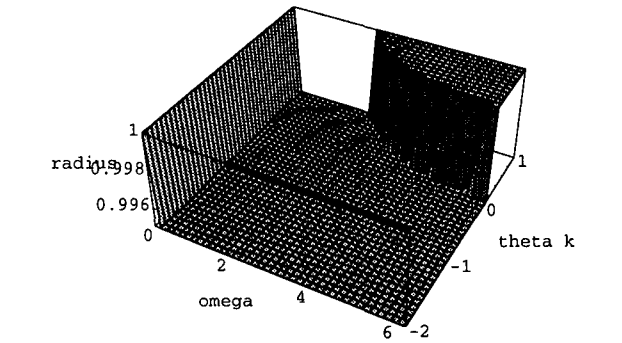


図-5 大きい減衰を付加した場合の、パラメタ θ_k 、周期 ω 及び半径の関係. ($\beta = 1/4, \theta_c = 0.2, h = 1.0$ とした.)

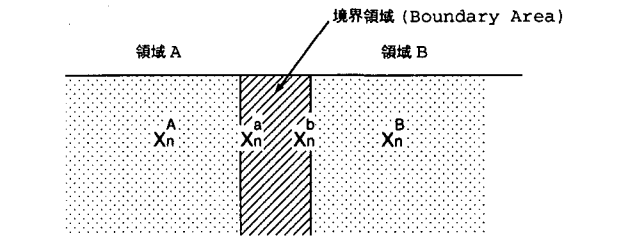


図-6 対象とする領域の分割

解析に適用した解析¹⁰⁾が行われている。この解析例では、離散時間間隔を $\Delta t = 0.01$ として、中央差分法で計算すると不安定性のために発散する解析が、提案する手法で安定的に計算できること、また、その解は中央差分法で $\Delta t = 0.001$ として得られる解と一致することが示されており、提案する手法の有効性を示すものとなっている。

3. 領域分割した有限要素法

提案する時間積分法を、有限要素法の並列計算などで用いられている領域分割する有限要素法に適用することを考える。

ある領域が隣接する領域から受ける力は、その領域における変位や速度の関数として定まる。つまり、隣接する領域が相互に作用する影響は、境界における状態量の非線形関数として表すことができる。したがって、提案する時間積分法を適用することが可能である。以下に、解析手順を示す。

図-6に示すように、分割される領域を A と B とする。また、それぞれの境界を a 及び b とする。領域 A に属する節点の時刻 $t = t_n$ における変位、速度、加速度をそれぞれ、 $x_n^A, \dot{x}_n^A, \ddot{x}_n^A$ とする。また、領域 A のうち、境界上の点の変位、加速度等を特に示すときには $x_n^a, \ddot{x}_n^a$ のように表す。同様に、領域 B に属する節点の値は x_n^B 、境界上の点については x_n^b のように表す。

領域 A 及び境界を含む範囲の領域を記述する運動方

程式を空間的に離散化すると外力を $p(t)$ として,

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = p(t) \quad (45)$$

ここで

$$\{x\} = \{x_n^A, x_n^b\}^T \quad (46)$$

$$\{p\} = \{p_n^A, p_n^b\}^T \quad (47)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M^{AA} & M^{Ab} \\ M^{bA} & M^{bb} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C^{AA} & C^{Ab} \\ C^{bA} & C^{bb} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{AA} & K^{Ab} \\ K^{bA} & K^{bb} \end{bmatrix} \quad (50)$$

となる.

時刻レベルを $t = t_{n-1}$ から, $t = t_n$ に更新する場合を想定する. 提案する手法は, 整合質量マトリクスを考える場合にも適用可能である. これについては後述するものとし, ここでは, 集中質量マトリクスを考える. このとき,

$$M^{Ab} = M^{bA} = O \quad (51)$$

となるので, 領域 A についての部分のみ表記すると

$$M^{AA}\ddot{x}^A + C^{AA}\dot{x}^A + K^{AA}x^A = p^A(t) - C^{Ab}\dot{x}^b - K^{Ab}x^b \quad (52)$$

となる. これは, 領域 B に属する境界上の点における変位及び速度に依存する外力の作用する問題となっている. 領域 B における変位や速度の値は, 領域 A における変位等と同時並行で算出されていくものであるため, これは非線形外力の作用する問題となっている.

具体的な計算手順を以下に示す.

1. 時刻 $t = t_n$ における式 (52) の右辺を

$$p^A(t_n) - C^{Ab}\dot{x}_{n-1}^b - K^{Ab}x_{n-1}^b \quad (53)$$

として領域 A おける変位, 速度, 加速度を算出する. (同様に領域 B における変位なども算出される.)

2. 算出された領域 B における変位を用いて

$$\Delta f_x^b = -K^{Ab}(x_n^b - x_{n-1}^b) \quad (54)$$

を算出し, これに対する応答を式 (10), (11) のように算出する. 境界領域において粘性項が無い ($C = 0$) 場合はこれにより, 計算は終了する.

3. 一般には粘性項があるため, その影響を考慮する必要がある. この場合, 外力の増分

$$\Delta f_x^b = -C^{Ab}(\dot{x}_n^b - \dot{x}_{n-1}^b) \quad (55)$$

に対する応答を考慮して, 式 (14) により, $\Delta \ddot{x}$ を求め, これを加えて最終的な加速度値が求められる.

次に, 整合質量マトリクスを用いた場合について述べる.

この場合, 質量マトリクスを, 対角行列 M' 及び $PP^{-1} = I$ となる正則行列 P を用いて

$$M = PM'P^{-1} \quad (56)$$

と分解する. 式 (1) に左から P^{-1} を乗じると

$$M'P^{-1}\ddot{x} + P^{-1}CPP^{-1}\dot{x} + P^{-1}KPP^{-1}x = P^{-1}p \quad (57)$$

となる. そこで,

$$y = P^{-1}x \quad (58)$$

$$p' = P^{-1}p \quad (59)$$

$$C' = P^{-1}CP \quad (60)$$

$$K' = P^{-1}KP \quad (61)$$

とすると,

$$M'\ddot{y} + C'\dot{y} + K'y = p' \quad (62)$$

となる. M' は対角行列なので, 集中質量マトリクスの場合と同様に解くことができる. この時, 求めるべき変位 x は

$$x = Py \quad (63)$$

として求められる.

上述した説明では, M' を対角行列としているが, これは必要条件ではない. 提案する時間積分法を, 整合質量マトリクスを有する問題に適用する場合に必要な条件は, 式 (45) から式 (52) が導かれること, つまり, 境界部分の質量マトリクスが対角化されていることである. したがって, 式 (51) を満たすものであれば, M' 及び P の組合わせは任意である.

同様に, 領域分割の方法は, 式 (51) を満たすものであれば任意であり, 物理的に可能な分割である必要はない. 例えば, 一つの節点の水平成分と鉛直成分を分割させることなども可能である. したがって, 純粋に計算負荷のみを考慮して合理的にマトリクスを分割することが可能である.

4. 数値解析例

提案する時間積分法を領域分割した有限要素法に適用する場合について, 小規模なモデルを対象とした解析例を示す.

対象としたモデルは, 図-7 にしめすような 5×5 節点のモデルである. その諸元を表-1 に示す. モデルは Rayleigh 減衰を有しているため, 境界部分で速度依存性を有する力の伝達を考慮する必要がある.

入力波は, 水平成分が卓越周期 0.5 秒の Ricker 波とし, これをモデル底面に一様に与えた. 鉛直成分は与えていない. 時間間隔は $\Delta t = 0.001$ 秒とした.

なお, 領域分割を考慮したケースでは, 全体のマトリクスを 2 等分した.

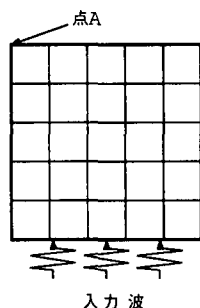


図-7 有限要素法のモデル

表-1 有限要素法で用いたモデルのパラメタ

せん断波伝播速度	100
ポアソン比	0.33
減衰	Rayleigh 減衰 ($\alpha = 0.361, \beta = 0.0155$)
左右境界条件	自由端

(1) 集中質量マトリクス

質量マトリクスとして、集中質量マトリクスを用いた例を示す。まず、Rayleigh 減衰を有しないモデルでの計算結果を示す。この場合、境界で伝達される力は速度依存性を有しないため、酒井らの時間積分法により計算することに相当する。

図-7に点Aと示した節点の水平変位の時刻歴を、図-8に示す。同図には、領域を分割していない場合と、分割した場合の結果を重ねて示した。両者はよく一致している。

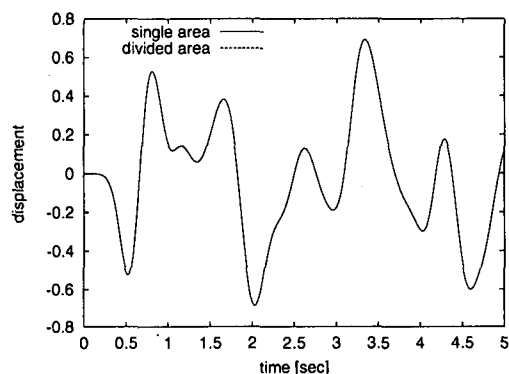


図-8 集中質量マトリクスを用い、減衰を与えない場合の点Aの水平変位の時刻歴

次に、Rayleigh 減衰を与えたモデルでの計算結果を示す。この場合には、境界で伝達される力が速度依存性を有するため、ここで提案している時間積分法を用いている。図-9に、節点Aの水平変位の時刻歴を示す。同図には、領域を分割していない場合と、分割した場合の結果を重ねて示している。両者はよく一致している結果が示されている。

(2) 整合質量マトリクス

次に、整合マトリクスを用いた場合について結果を示す。Rayleigh 減衰を与えた場合を考え、提案してい

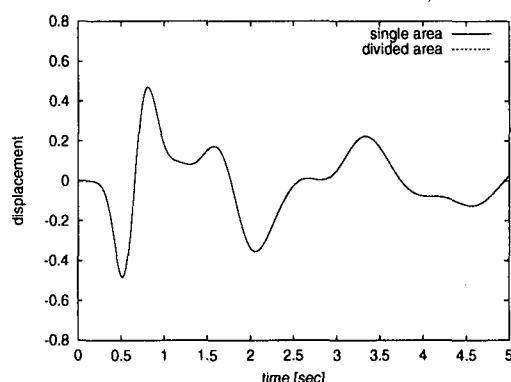


図-9 集中質量マトリクスを用い、Rayleigh 減衰を与えた場合の点Aの水平変位の時刻歴

る時間積分法を用いている。図-10に、節点Aの水平変位の時刻歴を示す。領域を分割していない場合と、分割した場合の結果はほぼ一致している。

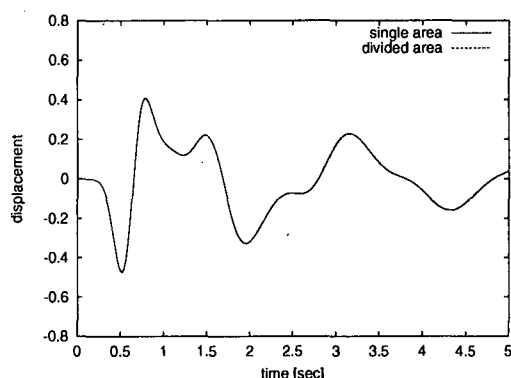


図-10 整合質量マトリクスを用い、Rayleigh 減衰を与えた場合の点Aの水平変位の時刻歴

(3) 計算時間間隔の影響

離散時間間隔 Δt の影響について検討するため、 $\Delta t = 0.001$ とした場合に加え、 $\Delta t = 0.01$ とした場合について同様の解析を行い比較した。集中質量マトリクスを用い、Rayleigh 減衰も付加した。結果を図-11に示す。なお、比較のため、領域分割をせず、計算時間間隔を $\Delta t = 0.001$ と小さく設定した場合の結果も示した。同図は、時間間隔が大きい場合の方が分割による影響が大きいを示す結果になることが分かる。ただし、その差は小さい。

(4) 分割方法の影響

提案した手法において、領域の分割方法の差異が解析に与える影響について述べる。前述したように、提案した手法では領域分割は物理的な領域とは独立に与えることが可能である。ここでは、(i) マトリクスを2等分した場合、と (ii) 片方の領域に2等分した場合より2行多く含ませた場合、の2通りを比較検討した。また、両者の差が大きくなるよう、前項の検討結果もふまえ、離散時間間隔は $\Delta = 0.01$ 秒と比較的大きく設定した。まず、Rayleigh 減衰を付加した場合について、解析結果を、分割が無い場合の結果とともに、図-12に示す。これは、分割方法を変えた場合に解析結果が影響を受

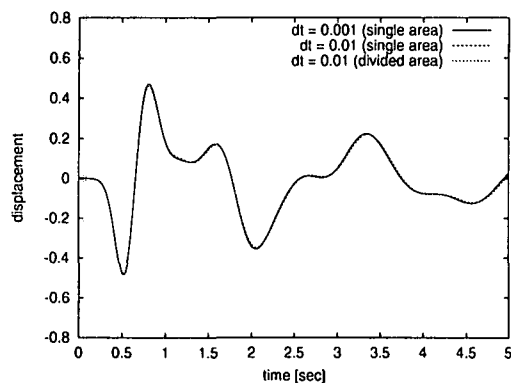


図-11 計算時間間隔を 0.01 秒及び 0.001 秒にした場合の点 A の水平変位の時刻歴の比較. 集中質量マトリクス. Rayleigh 減衰有り.

けることを示す結果を与えている.

また, 減衰を付加しない場合の結果を図-13 に示す. 同図より, 減衰が無い場合の分割方法の影響は, 減衰がある場合に比較して小さいことが分かる.

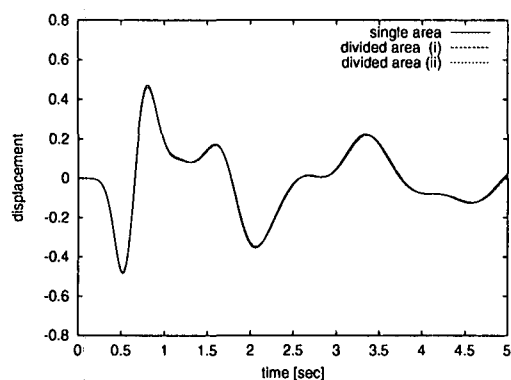


図-12 分割方法を変えた場合の点 A の水平変位の時刻歴の比較. 計算時間間隔は 0.01 秒. 集中質量マトリクス. Rayleigh 減衰有り.

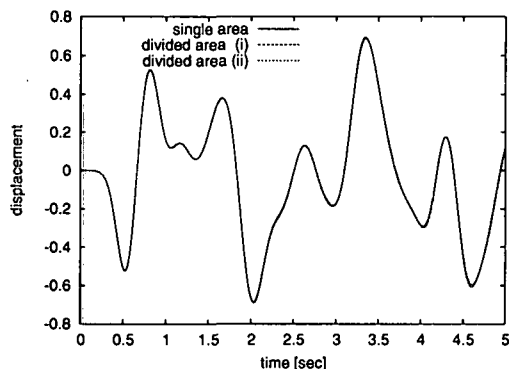


図-13 分割方法を変えた場合の点 A の水平変位の時刻歴の比較. 計算時間間隔は 0.01 秒. 集中質量マトリクス. Rayleigh 減衰無し.

5. おわりに

並列計算による動的非線形有限要素解析のための効率的な時間積分法について検討した. 領域分割した有限要素解析では領域間の作用を考慮する際に, 速度依存の非線形問題を扱う必要がある. ここでは, 陰解法と陽解法を結合することにより, そのような問題に適用可能な収束計算を伴わない時間積分法を提案した. そして, これを並列計算機のための領域分割された有限要素法に適用する手法を示した. 提案した手法は, 剛性硬化が生じない場合には安定性が期待できるものであり, 数値解析が妥当な結果を与えていることでも, その有効性は示されている.

今後は, 解析事例を積み重ねるとともに, 安定性を高めるため, 例えば, 本田ら¹¹⁾による手法と組み合わせること等も検討することが考えられる.

参考文献

- 1) J. Bielak, O. Ghattas and H. Bao : Ground Motion modeling using 3D finite element methods, Proc. 2nd Intl. Sympo. the Effects of Surface Geology on Seismic Motion, Yokohama, Vol.1, pp.121-133, 1998
- 2) N.M. Newmark: A method of computation for structural dynamics, ASCE Proc.,85(EM3), pp.67-94, 1959.
- 3) T. Belytschko, and R. Mullen : Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, pp.1575-1586, 1978.
- 4) T. J. R. Hughes and W.K. Liu : Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis, Stability Theory, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.45, pp.371-374, 1978.
- 5) T. J. R. Hughes, K. S. Pister and R. L. Taylor : Implicit-Explicit Finite Elements in Nonlinear Transient Analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp.159-182, 1979.
- 6) 中島正愛, 石田雅利, 安藤和博 : サブストラクチャ仮動的実験のための数値積分法, 日本建築学会構造系論文報告集, pp.110-117, 第 417 号, 1990.
- 7) 中島正愛, 中澤隆士, 阪口 理 : 誤差制御機能を有したサブストラクチャ仮動的実験のための数値積分法, 日本建築学会構造系論文報告集, pp.61-71, 第 454 号, 1993.
- 8) K. Sun, J. A. Pires and J. R. Tao : A post-correction integration for non-linear dynamic analysis of structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, pp.1083-1097, Vol.20, 1991
- 9) 酒井久和, 澤田純男, 土岐憲三 : 収束計算を伴わない動的非線形 FEM のための時間積分法, 土木学会論文集, No.507/I-30, 1995
- 10) 本田利器, 澤田純男 : 速度依存の非線形性を有する系の収束計算を伴わない時間積分法, 第 54 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第 1 部 (B), pp.70q-71, 1999
- 11) 本田利器, 澤田純男 : デジタルフィルタを内蔵した時間積分法, 応用力学論文集, pp.389-396, Vol.1, 1998.

(2000 年 4 月 21 日 受付)