

非定常確率過程を条件として含む 確率場のシミュレーション手法について

A Method for Numerical Simulation of Conditional Random Fields
Containing Non-Stationary Stochastic Processes as Conditions

盛川 仁*

Hitoshi MORIKAWA

*正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒 680-8552 鳥取市湖山町南 4-101)

The objective of this study is to develop a theoretical framework for conditional random fields (CRFs) which consists of non-stationary stochastic processes. For this purpose, we use the probability density function of Fourier amplitudes and phases in frequency domain. The problem area of CRFs in this study is limited in the estimation of stochastic processes conditioned by realized values of time series. To represent the properties of non-stationary processes, we will introduce group delay time spectra, which are gradient of phase spectra with respect to frequency. Using the style of likelihood method, the conditional probability density functions of Fourier phases are updated by information of group delay time. On this basis, a method to generate numerically the conditional random fields containing non-stationary processes is developed and it is verified through the numerical examples that the method can give reasonable results.

Key Words : conditional random fields, group delay time, non-stationary Gaussian process, numerical simulation

1. はじめに

空間的、時間的に不規則に生起、あるいは分布する現象や物理量を確率場として取扱い、種々の解析を行う手法は、地震波動場^{1),2)}、風速変動場³⁾、乱流場⁴⁾、海洋の波浪場⁵⁾、材料の応力場⁶⁾等、広い分野にわたって応用されている。本論文では、従来の確率場の理論^{4),7),8)}の拡張として、ある確率場において観測によって得られたサンプル場を条件として含む確率場を「条件付確率場」と定義し、空間内の任意の地点で、時系列波形の実現値が得られている確率場の確率論的性質について議論するものである。

このような「有限個の観測値をもとにして任意の未観測点での値を合理的に推定する」という問題は、その解法として確率論的手法が適当であるか否かを問わず、種々の工学的分野において広く取り組まれている重要な命題である。たとえば、地震工学の分野では、地震時に、都市域における地震動の空間分布を観測記録をもとにしてすばやく推定し、被災地域の特定期間や被災程度の判定を行うといったシステムの必要性が指摘されている。このような問題への一つのアプローチとして確率論的手法の利用が考えられ、「条件付確率場」の問題として定式化することも可能である。

従来、振動数領域で定式化された条件付確率場の理論では、定常過程のみが対象とされていたため、地震動のような非定常現象を扱うには、区分的に定常な区間を仮定し、シミュレーションの後、各区間を再びつなぎあわせるといった工夫が必要であった。本論文は、条件として与えられる時間関数が非定常であるような

確率場についても、振動数領域での解析法の枠組みを広げることによって、これまでの理論の自然な拡張によって表現しようとするものである。このとき、フーリエ位相と原波形の非定常性との関係に着目する。すなわち、フーリエ位相スペクトルの振動数軸上での傾きである、群遅延時間スペクトルを導入することによって、時系列波形の非定常な性質を表現したうえで、最尤法的な手法に基づいて、従来の条件付確率場の理論と組み合わせる。なお、本研究では条件付非定常確率過程を厳密に定式化しようとするものではなく、従来の定常確率過程の理論の枠組みを非定常過程に対していかに自然な形で拡張し得るかに主題をおいて議論を進める。

以下、最初に、条件付確率場の定義と従来の研究について概観したのち、群遅延時間スペクトルの特徴と時系列波形の非定常性との関連について述べる。次に、もっとも基本的な条件付確率場である観測点が1ヶ所、未観測点が1ヶ所の場合について、定常な場合の理論を展開する。そのうえで、群遅延時間スペクトルと従来の条件付確率場の理論との組み合わせについて述べる。最後に、簡単な数値計算を行ってこの手法の妥当性を検証する。

2. 条件付確率場

一般に n 次元 m 変数の確率場は n 次元ベクトルを引数とする m 個の不規則関数のベクトルとして、

$$U(\mathbf{x}, t) = [U_1(\mathbf{x}, t), U_2(\mathbf{x}, t), \dots, U_m(\mathbf{x}, t)]^T \quad (1)$$

と表すことができる⁷⁾。ただし、 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$ で、 $[\cdot]^T$ は転置を表す。今、ある物理現象において、不規則に変動する物理量が式 (1) のように表し得るものとし、ある瞬間 (または時間) にある地点 (または領域) でその物理量の実現値を観測等によって得ることができたとする。そのとき観測点ではその観測値と厳密に一致するような確率場を、「条件付確率場 (conditional random fields)」と定義し、一般に $U(\mathbf{x}, t | \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t_j); i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$ と表されるものとする。ここで $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t_j)$ は、位置 $\mathbf{x}_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{n-1i}]^T$ 、時刻 t_j において得られた、対象としている物理量の実現値である。

既に述べた通り、工学の分野においてしばしば問題となるのは、観測によって得られたあるサンプル場を含む条件付確率場である。このような問題の評価法として、推定誤差が最小となるように線形補間を行う kriging と呼ばれる手法⁹⁾がよく知られている。kriging では、主として空間軸上の観測値間の補間が目的とされ、補間推定量の確率分布特性には注意が払われていなかった。しかし、kriging と同様の手法を用いて、空間軸上で観測値が得られている場合の条件付確率場の確率分布特性に着目した研究もなされている^{10), 11)}。

本論文では、時空間確率場を対象として、空間内の特定の位置において観測された時間関数の実現値を条件とする条件付確率場を扱う。このような条件付確率場を取り扱うにあたっては、振動数領域で解析する方法^{12)~17)}と時間領域で解析する方法^{18)~20)}とが考えられるが、いずれの手法によっても得られる結果は確率論的に等価なものである。ただし、物理的なモデル化のわかりやすさや非定常性の取り扱い方法において、それぞれのアプローチに特徴が見いだされる。

時間領域で扱う方法は、kriging の考え方をそのまま時間-空間領域に拡張するものである。この場合、時間軸上で逐次的に波形を扱うことができるので、データのサンプリング毎のリアルタイム処理が可能であるだけでなく、比較的容易に非定常過程を扱うことが可能である。しかし、実際の物理現象のモデル化にあたっては、時間関数の非定常性のモデルを物理的直感に基づいて行うことが難しい場合も想定される。

一方、時間関数を扱う場合に、周波数領域でフーリエ係数を用いる手法は従来からしばしば利用されてきた。これは、フーリエ振幅や位相が現象の物理的意味を理解する上で明快な解釈を与え得る、という認識に基づくものである。しかしフーリエ変換を行わなくてはならないために、全てのデータの記録が終了してからでなくては解析がはじめられない、という点でリアルタイム性にやや劣る場合がある。データサンプル毎のリアルタイム性が重要になるような現象はあまり考えられないため、このような性質は重要な欠点とはなり得ない。むしろ、フーリエ変換を介して時間関数を処理するため、非定常現象の取り扱いが本質的に困難である、という点が周波数領域での解析における問題点であった。

非定常な性質を追跡できるという点のみに着目すれば、時間領域における逐次的な解析法の方がすぐれているといえるが、現象の物理的な意味のわかりやすさ、

という観点からは、伝統的な振動数領域での解析が果たしている役割は極めて重要である。確率論的手法の多くは、その理論の枠組みのなかでは極めて厳密で精緻な理論展開がなされているにもかかわらず、実際の物理現象を表現しようとした場合に、どのようにしてその確率論的特性をモデル化すべきかという具体的指針を持たない、という重大な問題を抱えている。従って、確率論的手法を用いる場合には、できる限り物理現象との対応がとりやすいような定式化を行っておくことが、工学的な応用において重要であると考えられる。このことが、本論文で振動数領域からあえて非定常過程を扱おうとする主たる動機である。

3. 非定常時系列波形の位相特性

時系列波形の非定常性と位相特性の関係については、いくつかの先駆的な優れた研究が行われている。大崎²¹⁾は隣り合うフーリエ位相の差である位相差分のヒストグラムの形状がもとの時系列波形の包絡線形状と良く似ているということを示した。続いて、和泉・勝倉²²⁾、Katsukura et al.²³⁾は、Papoulis²⁴⁾によって導入された群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ を用いて、 $t_{gr}(\omega)$ の振動数軸上で求めた平均値と標準偏差が時刻歴波形の重心位置と広がり方に対応することを解析的に示した。また、曾田²⁵⁾は確率論に基づく理論的考察を行い、振幅の時間的変化を表す関数が、位相の傾きの確率密度関数の具体的な形ではなく、その2次までのモーメントにのみ依存して決定されることを示し、位相傾斜の特性を利用して非定常外乱を模擬する際の確率論的特性が理論的に得られることを示した。

これらの先駆的な研究の後、10年ほど位相に関する研究は跡絶えたように見えたが、近年、時系列波形の非定常性のモデル化のための手法の一つとして再認識され、再び位相に関する研究が広く行われるようになってきた^{26)~28)}。以下では、群遅延時間スペクトルの特徴について述べる。

$U(t)$ を時系列波形、 $\mathcal{U}(\omega)$ を $U(t)$ のフーリエ変換とすると、

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= C(\omega) e^{-i\Phi(\omega)}\end{aligned}\quad (2)$$

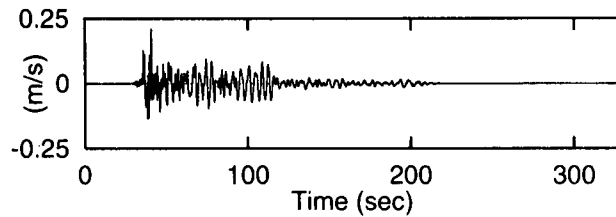
が成り立つ。ここで、 i は虚数単位、 $C(\omega)$ 、 $\Phi(\omega)$ はそれぞれフーリエ振幅と位相である。このとき、 $C(\omega)$ と $\Phi(\omega)$ は、 $\mathcal{U}(\omega)$ の実部と虚部 $\mathcal{U}_R(\omega)$ 、 $\mathcal{U}_I(\omega)$ を用いて次のように書くことができる。

$$C(\omega) = \sqrt{\mathcal{U}_R^2(\omega) + \mathcal{U}_I^2(\omega)}, \quad (3)$$

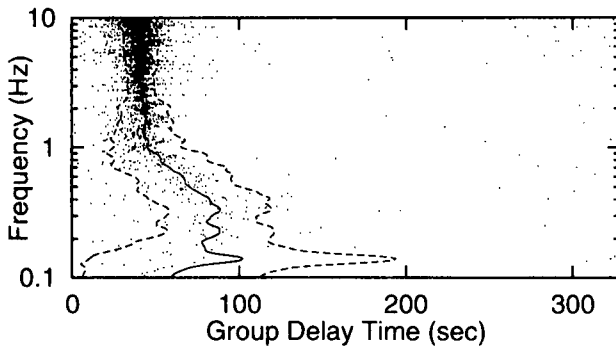
$$\Phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\mathcal{U}_I(\omega)}{\mathcal{U}_R(\omega)} \quad (4)$$

このとき、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ は、位相スペクトルの振動数に関する傾きとして定義され、

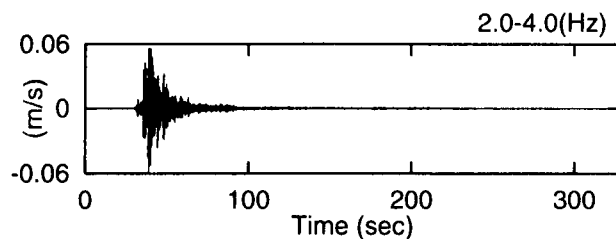
$$t_{gr}(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} \quad (5)$$



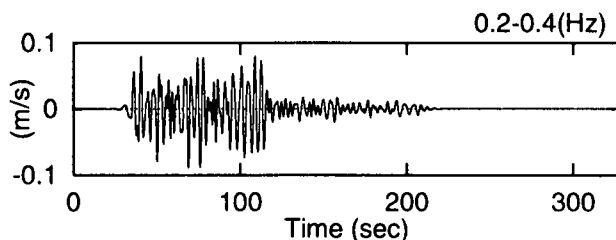
(a) 地震動波形



(b) 群遅延時間スペクトル



(c) 地震波形の短周期成分波 (2.0-4.0Hz)



(d) 地震波形の長周期成分波 (0.2-0.4Hz)

図-1 地震波形の群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の例

となる^{24),29)}。なお、 $U(t)$ が有限な区間 $[0, T]$ で定義される場合には、 $t_{gr}(\omega)$ も物理的要請から通常は有限な区間 $[0, T]$ に値を持つことが期待される。

ここで、特別な関数の群遅延時間スペクトルについて述べておく。 $t = t_0$ で値を持つインパルス関数 $\delta(t - t_0)$ の群遅延時間スペクトルは、 $t_{gr}(\omega) = t_0$ となり、振動数によらず、ちょうどそのインパルスが発生したのと同じ時刻で一定値を示す。また、対称でなめらかな一つの山を持つ関数、たとえば Gauss 型の関数 $U(t) = \exp[-(t - t_1)^2]$ の場合も $t_{gr}(\omega) = t_1$ となり、振動数によらず位相が $t = t_1$ でそろっていることが明示的に示される。このように群遅延時間スペクトルは時系列波形の位相がそろっているかどうかを陽に示しており、 $t_{gr}(\omega)$ の振動数領域でのばらつきから、もとの時系列波形の時間軸上での広がりがある程度予測できる。このことは、和泉ら^{22),23)}によって指摘されているとおりであり、群遅延時間スペクトルの平均が波群の平均的

な到着時刻に対応しており、また、標準偏差は時刻歴波形の継続時間にほぼ対応している。よって、 $t_{gr}(\omega)$ の確率密度関数の形状が、時系列波形の包絡線形状と良い対応を示すといえる。

図-1 に地震波の群遅延時間スペクトルの一例を示す。図-1(a) がもとの地震波形で、それから計算された群遅延時間スペクトルが (b) である。図-1(a) の波形をよくみると、短周期成分の波の継続時間は短く、長周期成分の波の継続時間は長いことがわかる。このことは、各周波数帯でバンドパスフィルタを通した波形 ((c) および (d) 図) から理解される。群遅延時間スペクトルのばらつきの様子を周波数帯別にみると、短周期帯では、全体にプロットが前よりの位置にかたまっているのに対して、長周期帯では広くばらついて中心位置もかなり後ろよりになっている。これは、バンドパスフィルタを通過させた2つの波形の特徴をよく反映しているといえる。なお、(b) 図の実線は平滑化によって求めた振動数毎の群遅延時間スペクトルの平均的な位置を示し、破線はそこからの標準偏差を平滑化のために用いた窓関数の範囲内で計算し、平均からの標準偏差の幅を示したものである。この図からも群遅延時間スペクトルが各振動数成分毎に時系列波形の重心位置および広がりがある程度表現していることが理解される。

4. 問題設定

以下では、最も簡単な条件付確率場について定式化を進めていく。すなわち、観測点が1ヶ所、波形を推定しようとする地点も1ヶ所で計2ヶ所の地点での時系列波形を扱う場合を考える。

最初に、理論解析を行うにあたって、以下のような仮定を導入する。

- 空間的に離散的な位置で与えられる次元、平均値0の非定常正規確率過程を扱う。
- 条件として与えられる確定波 $\tilde{u}_1(t)$ は確率過程 $U_1(t)$ の実現値の一つであると見なす。
- 群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ とフーリエ位相 $\Phi(\omega)$ は互いに独立であるとする。
- 各観測点における時系列波形 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ のパワースペクトル密度関数、およびこれらの間の相互スペクトル密度関数は既知であるものとする。
- 群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の確率分布もまた既知であるとする。一般に、この分布形は振動数の関数となるが、以下では、簡単のために振動数によらず同じ平均・分散を有する正規分布であると仮定する。

最初の3つの仮定は、一般性を失うことなく確率論的な取扱いを容易にするためのものであり、残りの2つの仮定は、現象の物理的考察から規定され得るものであると考えて既知量として扱う。

以上のような仮定のもとで、確定波 $\tilde{u}_1(t)$ によって条件付けられた確率過程 $U_2(t)$ のフーリエ振幅と位相の確率密度関数を誘導することが最終的な目標となる。そこで、まず、定常確率過程の場合について、1地点で確定波が与えられた場合の別の地点での条件付確率過程のフーリエ振幅と位相の条件付確率密度関数を誘

導する。次に、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ を用いた非定常過程のシミュレーション法を示したのち、 $t_{gr}(\omega)$ とフーリエ位相の確率密度関数とを組み合わせることによって条件付非定常確率過程のフーリエ位相の確率密度関数を誘導する。

5. 条件付定常確率過程

5.1 フーリエ係数の確率密度関数

時系列波形として再び $U_i(t)$ ($i = 1, 2$) を考える。 $U_2(t)$ は確定波 $\tilde{u}_1(t)$ によって条件付けられているということを表現するために、 $U_2(t|\tilde{u}_1(t))$ と書くことにする。これは、2. 節で一般の場合について定義した条件付確率場の表現を簡単にしたものである。このとき、 $U_2(t|\tilde{u}_1(t))$ をフーリエ級数展開すると、

$$U_2(t|\tilde{u}_1(t)) = \sum_k (A_{2k} \cos \omega_k t + B_{2k} \sin \omega_k t) \quad (6)$$

となる。ここで、 A_{2k} 、 B_{2k} は振動数 ω_k でのフーリエ係数である。確定波 $\tilde{u}_1(t)$ についても同様に、

$$\tilde{u}_1(t) = \sum_k (\tilde{a}_{1k} \cos \omega_k t + \tilde{b}_{1k} \sin \omega_k t) \quad (7)$$

と書ける。ここで、 $\tilde{a}_{1k}$ 、 $\tilde{b}_{1k}$ は、確率過程 $U_1(t)$ の振動数 ω_k でのフーリエ係数 A_{1k} 、 B_{1k} の実現値である。

確定波が無い場合には、仮定より、フーリエ係数 A_{ik} 、 B_{ik} ($i = 1, 2$) はいずれも平均値 0 の正規確率変数である。このとき、異なる振動数間での相関はなく、 $E[A_{ik}A_{jl}] = E[A_{ik}B_{jl}] = 0$ ($k \neq l$) である。また、同一振動数におけるフーリエ係数の間には、

$$\begin{aligned} E[A_{ik}A_{jk}] &= E[B_{ik}B_{jk}] \\ &= \begin{cases} G_i(\omega_k)d\omega \equiv \sigma_{ik}^2 & \text{if } i = j \\ K_{ij}(\omega_k)d\omega \equiv \sigma_{ik}\sigma_{jk}\rho_{Kk} & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[A_{ik}B_{jk}] &= -E[B_{ik}A_{jk}] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ -Q_{ij}(\omega_k)d\omega \equiv \sigma_{ik}\sigma_{jk}\rho_{Qk} & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

なる相関関係がある。ここで、 $G_i(\omega_k)$ は $U_i(t)$ の片側パワースペクトル密度関数、 $K_{ij}(\omega_k)$ 、 $Q_{ij}(\omega_k)$ は、 $U_i(t)$ と $U_j(t)$ の間のクロススペクトル $S_{ij}(\omega_k)$ を用いて、

$$S_{pq}(\omega_k) = K_{pq}(\omega_k) + i Q_{pq}(\omega_k) \quad (10)$$

によって定義されるコ・スペクトルおよびクオドラチャ・スペクトルである。

このとき、フーリエ係数 A_{ik} 、 B_{ik} ($i = 1, 2$) に関する 4 次元正規確率密度関数は、

$$\begin{aligned} f_{A_{1k}, B_{1k}, A_{2k}, B_{2k}}(a_{1k}, b_{1k}, a_{2k}, b_{2k}) \\ = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_{1k}^2 \sigma_{2k}^2 (1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\hat{Q}} \quad (11) \end{aligned}$$

と表される。ここで、

$$Q = \frac{p_1 \sigma_{2k}^2 + p_2 \sigma_{1k}^2 - 2\sigma_{1k}\sigma_{2k}(\gamma_K \rho_{Kk} + \gamma_Q \rho_{Qk})}{\sigma_{1k}^2 \sigma_{2k}^2 (1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2)} \quad (12)$$

$$\begin{cases} p_1 &= a_{1k}^2 + b_{1k}^2 \\ p_2 &= a_{2k}^2 + b_{2k}^2 \\ \gamma_K &= a_{1k}a_{2k} + b_{1k}b_{2k} \\ \gamma_Q &= a_{1k}b_{2k} + a_{2k}b_{1k} \end{cases} \quad (13)$$

である。

5.2 フーリエ振幅と位相の確率密度関数

フーリエ振幅と位相の条件付確率密度関数は、以下の関係式を用いてフーリエ係数 A_{ik} 、 B_{ik} ($i = 1, 2$) をフーリエ振幅 C_{ik} と位相 Φ_{ik} に変換することによって得られる。

$$\begin{cases} A_{ik} &= C_{ik} \cos \Phi_{ik} \\ B_{ik} &= C_{ik} \sin \Phi_{ik} \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

式 (14) の C_{ik} 、 Φ_{ik} に関する Jacobian は $C_{1k} \cdot C_{2k}$ となるので、 C_{ik} 、 Φ_{ik} ($i = 1, 2$) に関する 4 次元同時確率密度関数は、

$$\begin{aligned} f_{C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}, \Phi_{2k}}(c_{1k}, \phi_{1k}, c_{2k}, \phi_{2k}) \\ = c_{1k}c_{2k} \cdot f_{A_{1k}, B_{1k}, A_{2k}, B_{2k}}(c_{1k} \cos \phi_{1k}, \\ c_{1k} \sin \phi_{1k}, c_{2k} \cos \phi_{2k}, c_{2k} \sin \phi_{2k}) \\ = \frac{c_{1k}c_{2k}}{4\pi^2 \sigma_{1k}^2 \sigma_{2k}^2 (1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\hat{Q}} \quad (15) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \left\{ \sigma_{2k}^2 c_{1k}^2 + \sigma_{1k}^2 c_{2k}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma_{1k}\sigma_{2k}c_{1k}c_{2k} \sqrt{\rho_{Kk}^2 + \rho_{Qk}^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(\phi_{1k} - \phi_{2k} + \theta_k) \right\} \\ &\quad / \left\{ \sigma_{1k}^2 \sigma_{2k}^2 (1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2) \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

$$\tan \theta_k = \frac{\rho_{Qk}}{\rho_{Kk}} = -\frac{Q_{12}(\omega_k)}{K_{12}(\omega_k)} \quad (17)$$

である。式 (17) よりわかるとおり、 θ_k はクロススペクトル $S_{12}(\omega_k)$ のアーギュメントとして与えられ、振動数 ω_k における $U_1(t)$ と $U_2(t)$ の間の位相差の期待値である。

5.3 実現値によって条件付けられたフーリエ振幅と位相の確率密度関数

実現値として与えられた時系列波形 $\tilde{u}_1(t)$ によって条件付けられた確率過程 $U_2(t)$ のフーリエ振幅および位相 C_{2k} 、 Φ_{2k} の条件付確率密度関数を誘導する。

式 (15) を C_{2k} および Φ_{2k} について積分することによって、 C_{1k} と Φ_{1k} に関する 2 次元周辺確率密度関数を得る。

$$\begin{aligned} f_{C_{1k}, \Phi_{1k}}(c_{1k}, \phi_{1k}) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_{C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}, \Phi_{2k}}(c_{1k}, \phi_{1k}, \\ &\quad c_{2k}, \phi_{2k}) d\phi_{2k} dc_{2k} \quad (18) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{c_{1k}}{\sigma_{1k}^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{1k}}{\sigma_{1k}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

式 (18) は $[0, 2\pi]$ で定義される一様分布と Rayleigh 分布の積になっていることがわかる。このことは、条件が無い場合の振幅 C_{1k} と位相 Φ_{1k} が互いに独立で、かつ、それぞれが Rayleigh 分布、一様分布に従うことに対応している。

C_{1k} および Φ_{1k} の実現値 $\tilde{c}_{1k}$, $\tilde{\phi}_{1k}$ によって条件付けられた C_{2k} , Φ_{2k} の条件付確率密度関数は、式 (15), 式 (18) を用いて、

$$\begin{aligned} f_{C_{2k}, \Phi_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}}(c_{2k}, \phi_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}) &= \frac{f_{C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}, \Phi_{2k}}(\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, c_{2k}, \phi_{2k})}{f_{C_{1k}, \Phi_{1k}}(\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k})} \\ &= \frac{c_{2k}}{2\pi\sigma_{2k}^2(1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2)} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{1k}^2\sigma_{2k}^2(1 - \rho_{Kk}^2 - \rho_{Qk}^2)} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ \sigma_{2k}^2(\rho_{Kk}^2 + \rho_{Qk}^2)\tilde{c}_{1k}^2 + \sigma_{1k}^2c_{2k}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma_{1k}\sigma_{2k}\tilde{c}_{1k}c_{2k}\sqrt{\rho_{Kk}^2 + \rho_{Qk}^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(\tilde{\phi}_{1k} - \phi_{2k} + \theta_k) \right\} \left. \right] \quad (19) \end{aligned}$$

となる。

条件付確率過程 $U_2(t|\tilde{u}_1(t))$ の C_{2k} に関する条件付確率密度関数は、式 (19) を ϕ_{2k} について積分することで、

$$\begin{aligned} f_{C_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}}(c_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}) &= \int_0^{2\pi} f_{C_{2k}, \Phi_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}}(c_{2k}, \phi_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}) d\phi_{2k} \\ &= \frac{c_{2k}}{\sigma_{2k}^2(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \cdot I_0 \left(\frac{\tilde{c}_{1k}c_{2k}\sqrt{Coh_{12}(\omega_k)}}{\sigma_{1k}\sigma_{2k}(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{2k}^2\tilde{c}_{1k}^2Coh_{12}(\omega_k) + \sigma_{1k}^2c_{2k}^2}{\sigma_{1k}^2\sigma_{2k}^2(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

のように導かれる。ここで、 $I_0(\cdot)$ は 0 次の第 I 種変形ベッセル関数で、 $Coh_{12}(\omega_k)$ はクロススペクトルから

以下のようにして定義されるコヒーレンス関数である。

$$\begin{aligned} \rho_{Kk}^2 + \rho_{Qk}^2 &= \frac{K_{12}^2(\omega_k) + Q_{12}^2(\omega_k)}{\sigma_{1k}^2\sigma_{2k}^2} d\omega^2 \\ &= \frac{|S_{12}(\omega_k)|^2}{G_1(\omega_k)G_2(\omega_k)} \quad (21) \\ &\equiv Coh_{12}(\omega_k) \end{aligned}$$

また、フーリエ位相 Φ_{2k} はフーリエ振幅 C_{2k} の実現値に依存するので、 Φ_{2k} の条件付確率密度関数は、式 (19), (20) を用いて、

$$\begin{aligned} f_{\Phi_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}}(\phi_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k}) &= \frac{f_{C_{2k}, \Phi_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}}(\tilde{c}_{2k}, \phi_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k})}{f_{C_{2k} | C_{1k}, \Phi_{1k}}(\tilde{c}_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{I_0 \left(\frac{\tilde{c}_{1k}\tilde{c}_{2k}\sqrt{Coh_{12}(\omega_k)}}{\sigma_{1k}\sigma_{2k}(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right)} \\ &\quad \cdot \exp \left[\frac{\tilde{c}_{1k}\tilde{c}_{2k}\sqrt{Coh_{12}(\omega_k)} \cos(\tilde{\phi}_{1k} - \phi_{2k} + \theta_k)}{\sigma_{1k}\sigma_{2k}(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

となる。

$U_1(t)$ と $U_2(t)$ が互いに独立な場合、コヒーレンス関数 $Coh_{12}(\omega) \equiv 0$ であるから、式 (20) と (22) はそれぞれ、Rayleigh 分布と一様分布に一致する。すなわち、

$$f_{C_{2k}}(c_{2k}) = \frac{c_{2k}}{\sigma_{2k}^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{2k}}{\sigma_{2k}} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$f_{\Phi_{2k}}(\phi_{2k}) = \frac{1}{2\pi} \quad (24)$$

である。これらの分布形は条件がない場合のフーリエ振幅および位相の確率密度関数に一致していることがわかる。

6. 条件付非定常確率過程の定式化

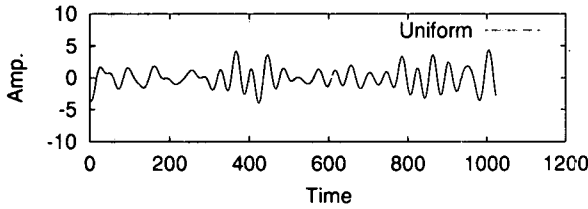
6.1 非定常過程の数値シミュレーション法

群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の確率密度分布がもとの時刻歴波形の包絡線形状とよい対応を示すという事実を用いて、非定常確率過程を数値的にシミュレートするための簡単な手法を示す。

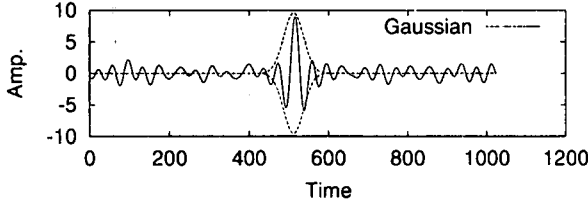
$t_{gr}(\omega)$ の確率密度関数は $f_{t_{gr}}(t)$ ($t \in [0, T]$) と表されるものとする。 T は時刻歴波形の有限な継続時間である。このとき、ある振動数における位相の実現値は、

$$\phi_k = \tilde{\phi}_{k-1} + \tilde{t}_{gr}(\omega_k) d\omega \quad (25)$$

によって得られる。ここで、 $\tilde{t}_{gr}(\omega)$ は $f_{t_{gr}}(t)$ に従う $t_{gr}(\omega)$ の実現値の一つである。従って、確定波による条件がない場合、 $t_{gr}(\omega)$ の分布を考慮した非定常時刻歴波形のサンプルは以下のような手順によってシミュレートすることができる。



(a) 一様分布の場合



(b) 正規分布の場合 (平均 = 512, 標準偏差 = 25)

図-2 群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の分布を考慮してシミュレートした時系列波形の例

- (1) 式 (23) を使って、各振動数毎のフーリエ振幅の実現値をシミュレートする。
- (2) 式 (24) を使って、最小振動数 ω_{min} におけるフーリエ位相の実現値をシミュレートする。
- (3) 式 (25) を使って、 $\omega_k > \omega_{min}$ なる振動数について、各振動数毎にフーリエ位相の実現値をシミュレートする。
- (4) フーリエ振幅と位相の実現値 $\tilde{c}_k$ と $\tilde{\phi}_k$ から、フーリエ逆変換によって非定常時系列波形を求める。

このような手続きにより、期待された包絡線形状を有する非定常な時系列波形を生成することができる。しかしながら、上で示した手順に従って生成された時系列波形は、因果性を厳密には満足しない点に注意が必要である。なぜなら、この手法自体が定常確率過程の枠組みのなかで、単に位相がもつ特徴を採り入れて定式化されただけであり、最小位相の性質まで保証しているわけではないからである。

なお、特別な場合として、 $f_{tgr}(t)$ が一様分布である場合には、フーリエ位相の分布はすべての振動数 ω_k において式 (24) に一致する。従って、この場合、時系列波形は非定常な性質を持たず、従来の定常過程のシミュレーション法と完全に一致する。

以上の手続きにしたがってシミュレーションによって求めた時系列波形の例を図-2に示す。図-2(a)は $f_{tgr}(t)$ が $[0, 1024]$ で定義される一様分布の場合の例で、(b)図は、 $f_{tgr}(t)$ が平均 512、標準偏差 25 の正規分布である場合の例である。前者のサンプル波は定常過程のように見えるが、後者は中央部分でのみ大きな振幅を有する非定常な特徴を示している。(b)図に示した破線は、 $f_{tgr}(t)$ の分布形状であるが、この破線がほぼサンプル波の包絡線となっていることがわかる。これは、群遅延時間スペクトルの性質から期待される特徴を正しく反映したものとなっている、と考えることができる。しかし、中央付近の振幅の大きい部分の前後を見ると、 $f_{tgr}(t)$ の分布がほとんど 0 となっているにもかかわらず

ず、サンプル波には小さいながらも定常的な波形が存在しており、上に述べたような簡単なシミュレーション法では、因果的な性質を厳密に満足させることが難しいことも予想できる。

6.2 非定常過程のフーリエ位相の条件付確率密度関数

群遅延時間スペクトルの確率密度分布 $f_{tgr}(t)$ と振動数 ω_k におけるフーリエ位相 Φ_k の確率密度関数を組み合わせることによって、非定常な条件付確率過程 $U_2(t)$ を求めることが最終的な目標であった。そこで、まず最初に、確定波による条件が無い場合の Φ_k の確率密度関数について記述する。

式 (25) および 4. 節で述べた仮定より、 Φ_k の確率密度関数は、

$$\begin{aligned} f_{\Phi_k|\Phi_{k-1}}(\phi_k|\tilde{\phi}_{k-1}) \\ = \frac{1}{S} f_{\Phi_k}(\phi_k) \cdot f_{tgr}\left(\frac{\phi_k - \tilde{\phi}_{k-1}}{d\omega}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

とすることができる。ここで、 S は、

$$S = \int f_{\Phi_k}(\phi_k) \cdot f_{tgr}\left(\frac{\phi_k - \tilde{\phi}_{k-1}}{d\omega}\right) d\phi_k \quad (27)$$

で与えられ、式 (26) の ϕ_k に関する $(-\infty, \infty)$ での積分が 1 となるようにするための係数である。この定式化は最尤法において用いられる手法と良く似ており、 Φ_k を独立に規定する 2 つの確率密度関数の両方の特徴を採り入れて、最も「もっともらしい」分布形を得ようとしていることになる。

$f_{\Phi_k}(\phi_k)$ は確定波による条件が無い場合には、 $1/(2\pi)$ なる一定値をとるので、式 (26) は $\tilde{\phi}_{k-1}$ だけの位相ずれを除くと $t_{gr}(\omega)$ の分布と完全に一致する。さらに、 $t_{gr}(\omega)$ が $[0, T]$ において一様に分布するならば、式 (26) は、

$$f_{\Phi_k}(\phi_k) = f_{\Phi_k|\Phi_{k-1}}(\phi_k|\tilde{\phi}_{k-1}) = \frac{1}{2\pi} \quad (28)$$

となる。このことは、式 (26) が定常過程の場合の定式化を包含しており、従来の定常過程の考え方の自然な拡張として、群遅延時間スペクトルの特性を採り入れ得ることを示している。

次に、式 (26) と同様のアプローチを条件付問題に対して適用する。すなわち、式 (22) を

$$\begin{aligned} f_{\Phi_{2k}|\Phi_{1k}, \Phi_{1k}, \Phi_{2k}, \Phi_{2k-1}}(\phi_{2k}|\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k}, \tilde{\phi}_{2k-1}) \\ = \frac{1}{S_c} f_{\Phi_{2k}|\Phi_{1k}, \Phi_{1k}, \Phi_{2k}}(\phi_{2k}|\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k}) \\ \cdot f_{tgr}\left(\frac{\phi_k - \tilde{\phi}_{k-1}}{d\omega}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

によって置き換える。ただし、

$$\begin{aligned} S_c = \int f_{\Phi_{2k}|\Phi_{1k}, \Phi_{1k}, \Phi_{2k}}(\phi_{2k}|\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k}) \\ \cdot f_{tgr}\left(\frac{\phi_k - \tilde{\phi}_{k-1}}{d\omega}\right) d\phi_{2k} \end{aligned} \quad (30)$$

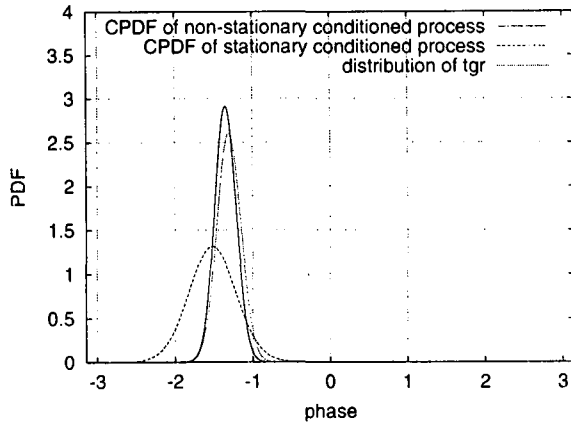


図-3 ある振動数における位相の確率密度関数と群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の分布の比較
実線：非定常性を考慮した位相の条件付確率密度関数(式(29)), 破線：非定常性を考慮しない位相の条件付確率密度関数(式(22)), 点線： $t_{gr}(\omega)$ の分布(式(26))

で, $f_{\Phi_{2k}|C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}}(\phi_{2k}|\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k})$ は式(22)によって与えられる。

図-3はある振動数における式(22), (26), (29)の確率密度関数を示したものである。ここで, 群遅延時間 $t_{gr}(\omega)$ は正規分布に従うものとした。この図より以下のことがわかる。最尤法において最尤分布が最もおこりやすい部分で大きな値を有するのと同様に, 式(29)は, 定常な場合の条件付確率過程(式(22))と, 非定常性を与える群遅延時間スペクトルの分布が重なる部分で大きな値をとっており, 両方の性質を満足しやすいような分布形となっている。また, 群遅延時間スペクトルの分布を考慮したことによって, 位相の確率分布の分散が小さくなっている。これは, 非定常性を考慮する, という制約条件が加わったために位相のばらつきが狭められたことを意味している。

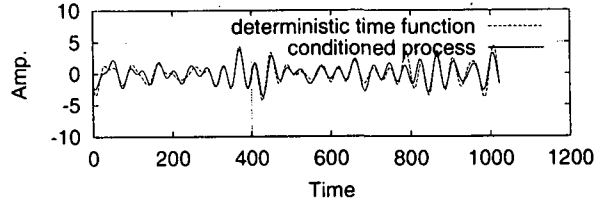
6.3 数値計算例

上に示した, 非定常条件付確率過程のシミュレーション法を用いて行った簡単な数値計算結果を示す。シミュレーションにあたっては, コヒーレンス関数として,

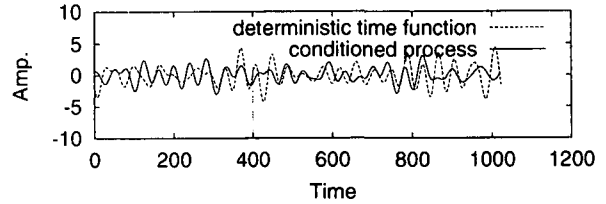
$$Coh_{12}(\omega) = \exp[-\alpha\omega] \quad (31)$$

なる関数を用いた。ここで, α は2つの時系列波形のコヒーレンスの大きさを決める係数である。実際の現象をモデル化するには, α の大小は2点間の距離の大小等に対応する。また, 2点間の波形の変化の様子が見やすいように, 式(17)に示した2点間の平均的な位相ずれ θ_k は0とした。また, パワースペクトル密度関数は, 狭帯域で振動数によらず一定値をとり, それ以外の振動数では0とした。

以上のように確率過程を規定するスペクトル特性を与えたのち, まず, 条件無しの波形を式(23), (24), (26)を用いてシミュレートし, これを確定波 $\tilde{u}_1(t)$ とする。そのうえで, 得られた $\tilde{u}_1(t)$ を条件とする条件付確率過程 $U_2(t)$ をシミュレートした。その結果を図-4および

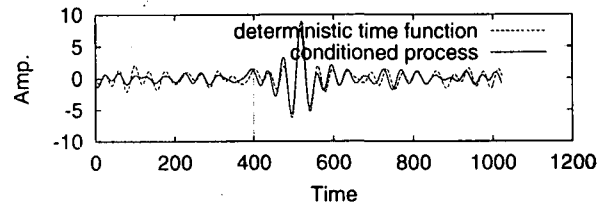


(a) 相関が高い場合 ($\alpha = 3$)

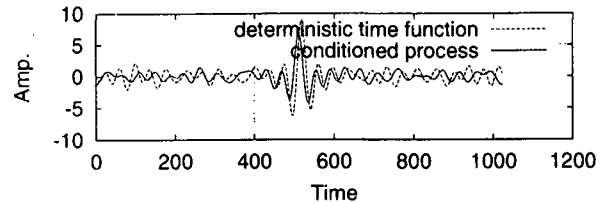


(b) 相関が低い場合 ($\alpha = \infty$)

図-4 条件付確率過程のシミュレーション例 (群遅延時間スペクトルが一様分布に従う場合)



(a) 相関が高い場合 ($\alpha = 3$)



(b) 相関が低い場合 ($\alpha = \infty$)

図-5 条件付確率過程のシミュレーション例 (群遅延時間スペクトルが正規分布に従う場合)

図-5に示す。図-4では, 群遅延時間スペクトルが一様分布の場合, 図-5では, 正規分布の場合で, その分布形は図-2と同じとしている。いずれの図においても(a)図は2つの時系列波形 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ の間の相関が高い場合, (b)図は互いに相関が無い場合を示している。これらの図において, 破線は条件として与えた確定波 $\tilde{u}_1(t)$ で, 実線がその確定波によって条件付けられた確率過程のサンプル波 $u_2(t)$ である。(a)図では $\tilde{u}_1(t)$ と $u_2(t)$ は(b)図に比べて非常に良く似た形状となっており, 2つの波形の間の相関が高いという条件をよく反映した結果となっている。図-4は, 群遅延時間スペクトルの分布形として一様分布を用いたため, 従来の定常過程の理論と同等の結果が得られている。それに対して, 図-5では, 相関の大小にかかわらず, 非定常性を期待通り示していることが分かる。

7. 結論

非定常な確率過程を含む条件付確率場を数値的にシミュレートするための手法を示した。これには、定常確率過程に対する方法の自然な拡張として定式化され、群遅延時間スペクトルの確率密度分布が時系列波形の包絡線形状に対応づけられるというフーリエ位相の性質を用いた。

また、非定常な時系列波形によって条件付けられた時系列波形の非定常性を考慮した数値シミュレーションを簡単な例について実施した。これにより、本研究で提案した手法がこれまでの理論との整合性を保ちながら、かつ、非定常な性質をある程度反映したシミュレーションが可能であることが明らかとなった。

参考文献

- 1) Deodatis, G., Shinozuka, M. and Papageorgiou, A., "Stochastic wave representation of seismic ground motion. I: F-K spectra," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 11, ASCE, 1990, pp.2363-2379.
- 2) 原田隆典:地震動の確率波モデルとそのシミュレーション, 第2回 構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム (JCOSSAR '91) 論文集, A-16, 1991, pp.129-136.
- 3) 岩谷祥美:任意のパワースペクトルとクロススペクトルをもつ多次元の風速変動のシミュレーション, 日本風工学会誌, 第11号, 1982, pp.5-18.
- 4) 今村勤:確率場の数学, 岩波書店, 1976.
- 5) B. キンズマン:海洋の風波(下), 築地書館, 1972.
- 6) 西谷章・菅沼信也・佐野伊彦:直交異方性を対象とした確率場のシミュレーション, 日本建築学会構造系論文報告集, 第437号, 1992, pp.33-40.
- 7) Shinozuka, M., "Stochastic fields and their digital simulation," *Stochastic Mechanics* (ed. by M. Shinozuka), Department of Civil Engineering & Engineering Mechanics, Columbia University, New York, Vol. I, 1987, pp.1-44.
- 8) Vanmarcke, E., *Random Fields — Analysis and Synthesis* —, MIT Press, Massachusetts, 1983.
- 9) Journel, A.G. and Huijbregts, Ch.J., *Mining Geostatistics*, Academic Press, 1978, pp.303-443.
- 10) Ditlevsen, O., "Random field interpolation between point by point measured properties," *Computational Stochastic Mechanics* (ed. by P. D. Spanos et al.), Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991, pp.801-812.
- 11) Hoshiya, M., "Kriging and conditional simulation of Gaussian field," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 2, ASCE, 1995, pp.181-186.
- 12) 川上英二:一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーション, 土木学会論文集, 第410号/I-12, 1989, pp.435-443.
- 13) Borgman, L. E., Allender, J., Krogstad, H., Barstow, S., and Audunson, T., "Conditional simulation of ocean wave kinematics and comparisons with storm field measurement," *Water Wave Kinematics*, NATO ASI Series, Series E, Vol. 178, 1990, pp.247-263.
- 14) Vanmarcke, E. and Fenton, G., "Conditioned simulation of local fields of earthquake ground motion," *Structural Safety*, Vol. 10, 1991, pp.247-264.
- 15) 川上英二・小野牧夫:一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション, 土木学会論文集, 第441号/I-18, 1992, pp.167-175.
- 16) Kameda, H. and Morikawa, H., "An interpolating stochastic process for simulation of conditional random fields," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 7, No. 4, 1992, pp.243-254.
- 17) Kameda, H. and Morikawa, H., "Conditioned stochastic processes for conditional random fields," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 4, ASCE, 1994, pp.855-875.
- 18) Hoshiya, M. and Maruyama, O., "Stochastic interpolation of earthquake wave propagation," *Proc. of '93 ICOSSAR — The 6th International Conference on Structural Safety and Reliability* (ed. by Schuëller, G. I. and Shinozuka, M. and Yao, J.T.P.), A. A. Balkema, Rotterdam, 1993, pp.2119-2124.
- 19) 星谷勝:条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No. 459/I-22, 1993, pp.113-118.
- 20) Ren, Y. J., Elishakoff, I., and Shinozuka, M., "Conditional simulation of non-Gaussian random fields for earthquake monitoring systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 5, No. 1, 1995, pp.91-101.
- 21) Ohsaki, Y., "On the significance of phase content in earthquake ground motions," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, 1979, pp.427-439.
- 22) 和泉正哲・勝倉裕:地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第327号, 1982, pp.20-27.
- 23) Katsukura, H., Watabe, T., and Izumi, M., "A study on the Fourier analysis of non-stationary seismic wave," *Proceedings of 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, USA, 1984, pp.525-532.
- 24) Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Application*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- 25) 曾田五月也:非定常ランダム振動解析に対する位相傾斜の確率特性の応用に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第365号, 1986, pp.48-57.
- 26) 佐藤智美・植竹富一・菅原良次:群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第493号, 1997, pp.31-39.
- 27) 盛川仁・澤田純男・土岐憲三・金子康史:ランダムに生起するインパルス列の位相特性に関する確率論的考察, 第25回地震工学研究発表会講演論文集, 1999, pp.93-96.
- 28) 佐藤忠信・室野剛隆・西村昭彦:観測波を用いた地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集, No. 612/I-46, 1999, pp.201-213.
- 29) Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

(2000年4月21日受付)