

粒状体の剛塑性極限解析とその支持力問題への応用

A Rigid-Plastic Analysis for Granular Materials and
its Application to Bearing Capacity Problems

山田辰男*・田村 武**

Tatsuo YAMADA and Takeshi TAMURA

*学生員 工学士 京都大学大学院修士課程 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

A rigid-plastic analysis of an assembly of regularly arranged circular elements with an equal diameter was made to consider the relationship between the micro- and macro-mechanisms of cohesive granular materials. No elastic constant for elements was employed whereas rolling and plastic sliding at the contact points were considered. It is the main subject to estimate bearing capacity by this model.

Key Words : granular material, limit analysis, linear programming, bearing capacity

1. はじめに

砂や粉体などの粒状体の数値解析法には、連続体力学に立脚する方法と要素の集合体と見なす方法がある。前者の連続体モデルではヤング率などの巨視的な材料定数を仮定し、個々の要素の運動は考慮されない。このモデルは広範囲の粒状体の挙動を知るには適しているが、その仮定のために粒状性を取り込んだ現実的なモデルとは言えない。一方、後者の粒状体モデルでは、個々の要素に作用する力に着目し、各要素の局所的な挙動から要素全体の大局的な挙動を追跡するため、より現実的なモデルと言えるが、要素数が増すと必然的に計算量が膨大になる。しかし最近の著しいハードウェアの発達により、粒状体モデルの数値解析は画期的に進んでおり地盤工学の分野では種々の改良モデルが採用されている。個々の要素が変形した結果、ある運動が生じたと捉えたと問題は難解なものになるが、その運動が剛体の要素のすべりやころがりの結果と捉えたと問題は単純なモデルで表現できる。そこで本研究では要素を円形の剛体と仮定し、全体の運動は摩擦のみに支配される要素の「すべり」と「ころがり」によって生じるとして、水平面上に置かれた二次元の等半径粒状体モデルにおける剛塑性極限解析を行なう。さらにこのモデルにおける支持力を評価する。以上このモデルにより粒状体の性質の把握が最大のテーマである。

2. 解析方法

2.1 解析モデル

本研究では円形要素集合体が水平面上に図-1,2 のように x 軸から α の角度で規則的に配置され、部分的に固定壁に接している 2 種のモデル (以下では前者を L

型モデル、後者を U 型モデルと呼ぶことにする) について次のように仮定する。

1. 要素-要素、要素-壁などの接触点は離れることはなく常に接触している。
2. これらの接触点には図-3 に示すように、法線方向に軸力 N と、法線方向に摩擦によるせん断力 T が働く。
3. 各要素は剛体であり、全体の運動は要素の「すべり」と「ころがり」のみによって生じる。

極限解析では変形は十分小さく無視できるものであり、せん断変形のみを考慮しているので 1 のように仮定しても構わない。本研究におけるモデルは内部摩擦角 ϕ を考慮しない、粘着力のみの c 材料である。図-1,2 において載荷板を矢印の方向に速度 $\dot{\delta}$ で押した時の極限荷重 P とその時の崩壊のメカニズムを決定する。さらに個々の要素の「ころがり」を止めた仮想的な非回転モデルを考えることで、回転する条件が大局的な運動にどのような影響を及ぼすのか調べた。

2.2 2×1 要素の場合

まず図-3 に示すような 2 つの剛体要素の崩壊のメカニズムについて考察する。次節において、より一般的な要素数の場合を検討する。

(1) つりあい式と適合条件式

図-3 のような等しい半径 R をもつ 2 つの円形剛体要素の要素が x 軸から一定の角度 α で接触しているとす。要素 i には x, y 方向の移動 ($\dot{u}_i, \dot{v}_i$ なる速度場)、回転 ($\dot{\theta}_i$) の 3 つの自由度が存在する。要素 2 は y 軸に平行な載荷板により荷重 P のもとで一定変位速度 $\dot{\delta}$ を受け、接触を保って準静的に運動する。ここで各接触点 j における軸力とせん断力をそれぞれ N_j, T_j とする。 F_i, G_i, M_i をそれぞれ各要素に作用する x, y 軸方向の

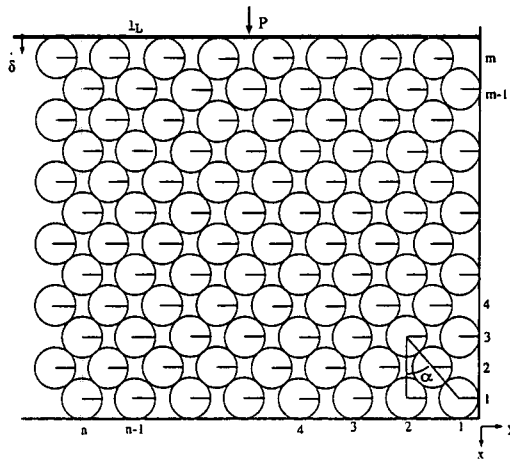


図-1 初期状態 (L 型モデル)

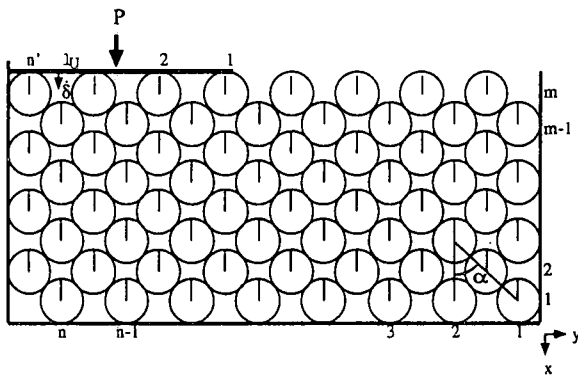


図-2 初期状態 (U 型モデル)

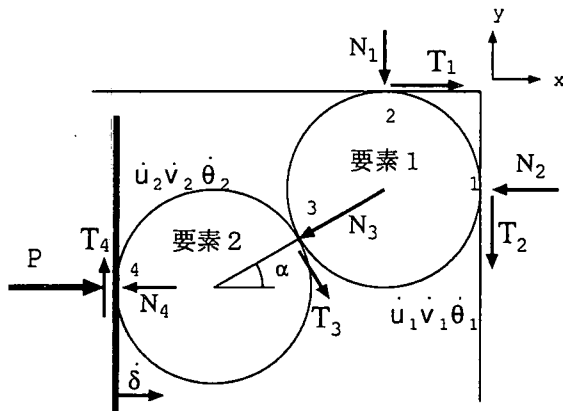


図-3 2つの円形要素

外力および反時計方向のトルクとすると、要素2の x, y 方向の力のつりあい式は

$$\begin{cases} N_3 \cos \alpha - T_3 \sin \alpha - N_4 = F_2 \\ N_3 \sin \alpha + T_3 \cos \alpha - T_4 = G_2 \end{cases} \quad (1)$$

である。次に要素1, 2のそれぞれの重心回りのモーメントのつりあい式は

$$\begin{cases} R(T_1 + T_2 + T_3) = M_1 \\ R(T_3 + T_4) = M_2 \end{cases} \quad (2)$$

である。ところで載荷板の x 方向の力のつりあいから

$$N_4 = P \quad (3)$$

なる関係を得る。以上3種類のつりあい式をまとめると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -1 & \sin \alpha & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ P \end{pmatrix} \quad (4)$$

他方、変形の適合条件を考えると要素1は壁との接触条件のため回転のみを生じる。要素1と2が接触を保つとき、重心間の相対速度は0なので

$$\dot{u}_2 \cos \alpha + \dot{v}_2 \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

となる。そして、載荷板と要素2が接触を保つとき、それぞれの速度は δ であるから

$$-\dot{u}_2 + \delta = 0 \quad (6)$$

となる。ここで要素間の相対すべり速度を考える。すべり速度 $\dot{S}_j (j = 1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = R\dot{\theta}_1 \\ \dot{S}_2 = R\dot{\theta}_1 \\ \dot{S}_3 = R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \dot{u}_2 \sin \alpha + \dot{v}_2 \cos \alpha \\ \dot{S}_4 = R\dot{\theta}_2 - \dot{v}_2 \end{cases} \quad (7)$$

となり、これらの適合条件式を行列表示すると下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \dot{S}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & R & R & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & R & 0 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \delta \end{pmatrix} \quad (8)$$

(2) 上界定理

式(4)、式(8)で得られたつりあい式、適合条件式は式(4)左辺にある行列を D として

$$\begin{cases} Dq = p \\ s = D^T r \end{cases} \quad (9)$$

と表すことができる。ただし

$$p = \begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \dot{S}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \delta \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ P \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。これらを用いて s^T と q の内積をとると

$$s^T q = (D^T r)^T q = r^T (Dq) = r^T p \quad (11)$$

と変形できる。つまり

$$P\dot{\delta} + F_2\dot{u}_2 + G_2\dot{v}_2 + M_1\dot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_2 = \sum_{j=1}^4 T_j \dot{S}_j \quad (12)$$

なる式が得られる。これはつりあい式を満たす任意の系と適合条件式を満たす任意の速度場に対して一般に成り立つ。ここで図-3における4つの接触点における最大せん断力、つまりせん断強度を接触点ごとに一定の値 C_j ($j = 1, 2, 3, 4$) とする。この値は「軸力 N_j に依存しない摩擦抵抗」と考えることもできるが、粘着力という物理量に相当する。次に載荷板を一定の変位速度 $\dot{\delta}$ で移動させるために必要な外力 P を決定するような問題を考える。いま、任意の運動学的に存在する速度場 $q^T = (\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{\theta}_i)$ を仮定し、

$$P\dot{\delta} + F_2\dot{u}_2 + G_2\dot{v}_2 + M_1\dot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_2 = \sum_{j=1}^4 T_j (\dot{S}_j) \dot{S}_j \quad (13)$$

という式を作る。ここで $T_j(\dot{S}_j)$ は

$$T_j(\dot{S}_j) = \begin{cases} -C_j & (\dot{S}_j < 0) \\ -C_j \leq T_j \leq C_j & (\dot{S}_j = 0) \\ C_j & (\dot{S}_j > 0) \end{cases} \quad (14)$$

と定義されるものである。正のすべりが生じているときには、そのせん断強度に等しい正（時計方向）の向きのせん断力を、負のすべりが生じているときには、そのせん断強度に等しい負の向きのせん断力を、そしてすべりが生じていない場合にはその間のある大きさのせん断力を表す。従って

$$T_j(\dot{S}_j) \dot{S}_j = C_j |\dot{S}_j| \quad (15)$$

と書くことが可能となる。こうして可容な速度場を1つ与えると式(13)で P 以外の値が決定され、したがって P の値が計算される。言い換えると極限荷重 P は速度場の関数として求められ、任意に選んだ速度場の関数として決定された極限荷重 P は真のメカニズムにおける極限荷重 P^* の上界値であり、この上界値を最小化することがこの問題の正解値を得ることである。上界値の最小化には線形計画法(シンプレックス法¹⁾)を用いる。また P の最小化はつりあい条件と等価であることは田村ら²⁾の研究により分かっている。

2.3 $m \times n$ 要素の場合

前節で述べてきた2要素での問題は縦の要素数 m が偶数であれば適合条件式を満たす任意の速度場と、つりあい式を満たす任意の系に対して仮想仕事式が成り立つので、一般の $m \times n$ 要素での問題にも拡張される。

2.4 支持力問題

図-1のような粒状体モデルにおいて、 x, y 方向の要素の数をそれぞれ m, n 、要素の半径を R で与え、要素同士の粘着力を C_p 、要素全体の大局的な粘着力を c_G 、載荷板に作用する応力を q_d 、載荷板の長さ l_L を

$$l_L = 4(n-1)R \sin \alpha + R \quad (16)$$

で決定する。ただし n が十分に大きくなると

$$l_L \approx 4nR \sin \alpha \quad (17)$$

なる近似が成り立つ。大局的な粘着力 c_G は、数値解析により求められた極限荷重を P として

$$c_G(m) = \frac{q_d}{2} \quad (18)$$

$$= \frac{P}{2l_L} \quad (19)$$

で求められる。ここで m の値に応じて

$$c_G(m) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha} \times \frac{C_p}{R} & (m = 2) \\ \frac{3 + \cos \alpha}{12 \sin^2 \alpha} \times \frac{C_p}{R} & (m = 4) \\ \frac{m + \cos \alpha - 1}{4(m-1) \sin^2 \alpha} \times \frac{C_p}{R} & (m \geq 6) \end{cases} \quad (20)$$

で大局的な粘着力が求まり、さらに m が大きくなると

$$c_G = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \times \frac{C_p}{R} \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{3} \right) \quad (21)$$

なる近似が成り立つことが田村ら³⁾により明らかになっている。大局的な粘着力 c_G は接触角 α のみで決定され、図-2において、載荷板に接触している要素数を n' として

$$l_U = 4(n' - 1)R \sin \alpha + R \quad (22)$$

なる式で載荷板の長さを決定すると、載荷板に作用する単位面積当たりの応力 q_d は

$$q_d = \frac{P}{l_U} \quad (23)$$

であり、次に図-2のU型モデルにおけるの支持力係数を N_c とすると

$$q_d = c_G N_c \quad (24)$$

である。式(23)と式(24)より

$$N_c = \frac{P}{c_G l_U} \quad (25)$$

なる式で支持力係数が求められる。

3. 解析結果および考察

3.1 回転U型モデル

縦の要素数 m 、横の要素数 n 、載荷板に接する要素数が n' のときの崩壊メカニズムを「メカニズム

(m, n, n') 」, そのときの極限荷重 P を m, n, n' の関数として「 $P = P(m, n, n')$ 」と表現することにして, 最も簡単な要素が 4 個の場合の崩壊のメカニズムを図-4 に示す. 破線は初期状態における要素の上端の位置を示している. 同図においてすべりが生じている接触点

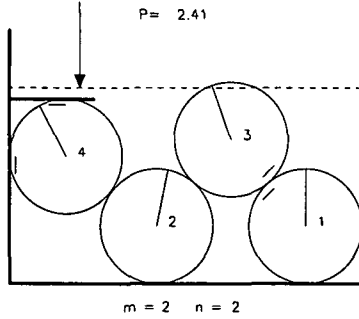


図-4 メカニズム (2, 2, 1)

には印をつけてある. すべり点では最大せん断強度が発揮され, それをもとにして軸力, せん断力を順次計算したものが図-5 である. つりあい式を解いた結果得られた極限荷重値 P は, 数値解析の結果の極限荷重値 P と一致している. 載荷板に作用する軸力, すなわち

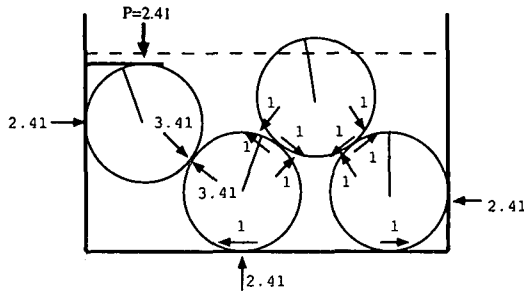


図-5 4 要素の力のつりあい

極限荷重 P は,

$$P(2, 2, 1) = (1 + \sqrt{2})C_p \quad (26)$$

と求められる.

次に要素数が 16 個の場合のメカニズムを図-6, 7 に示す. 同様にメカニズム (4, 4, 1), (4, 4, 2) においては, 同図に示すように印をつけた点ですべりが生じ, 極限荷重 P はそれぞれ

$$P(4, 4, 1) = (1 + \frac{7}{2}\sqrt{2})C_p \quad (27)$$

$$P(4, 4, 2) = (1 + 5\sqrt{2})C_p \quad (28)$$

と求められる. ただし, つりあい式を解いていく過程で軸力に負の値, すなわち引っ張りが生じたものもあるが, つりあい式を満たす限り負の値も許されるとした.

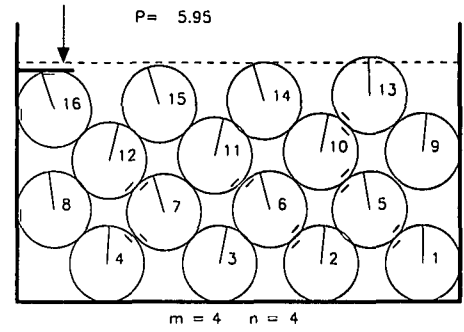


図-6 メカニズム (4, 4, 1)

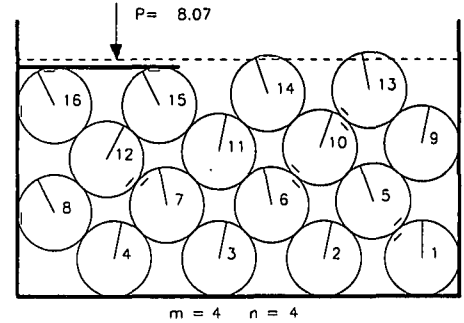


図-7 メカニズム (4, 4, 2)

さらに要素を増加させ, 数値解析の結果得られた極限荷重値を表-1 に示す. ただし, 今回の計算において $m = n$ の場合にのみシムプレックス計算が収束し, $m \neq n$ の場合は収束しなかったため, $m = n$ の場合のみの極限荷重値を示した. また, 要素数を $m \times n = 10 \times 10$ にした場合の崩壊のメカニズムを図-8 で, それに対応する個々の要素の重心の動きを図-9 に示す. メカニズム (10, 10, 1) においては, 要素全体が弧を描くようなほぼ同様の要素の流れが見られた. ここで $k = m = n$, すなわち縦と横の要素数が等しいとき, 極限荷重値の表-1 を参考にして規則性を考えると極限荷重 P は,

$$P(k, k, n') = (1 + \rho\sqrt{2})C_p \quad (29)$$

の形式で決定されることが分かる. この解を帰納的理論解と呼び表-2 で示す. この値は計算の結果得られた数値解 (表-1) と一致している.

表-2 において k の行の $n' = 1$ の列を見ると, ρ は

$$\rho(n' = 1) = \frac{2(\frac{k}{2})^2 - 1}{\frac{k}{2}} \quad (30)$$

なる式で表現できる. さらに k の行の n' 列目を見ると ρ は

$$\rho(n') = \frac{2(\frac{k}{2})^2 - 2n'^2 + 4n' - 3}{\frac{k}{2} - n' + 1} \quad (31)$$

なる式で表現できる. したがって, 縦と横の要素数 m, n が $k = m = n$ のとき, 式 (29) と式 (31) より極限荷

表-1 極限荷重値 P (数値解)

$m, n/n'$	1	2	3	4	5	6	7
2,2	2.41	-	-	-	-	-	-
4,4	5.95	8.07	-	-	-	-	-
6,6	9.01	11.60	13.72	-	-	-	-
8,8	11.96	14.59	17.26	19.38	-	-	-
10,10	14.53	17.37	20.33	22.92	25.04	-	-
12,12	17.53	20.18	23.27	25.98	28.57	30.69	-
14,14	20.60	22.99	26.14	28.93	31.64	34.23	36.36

表-2 極限荷重値 P (帰納的理論解)

$k, k/n'$	1	2	3	4	5	6	7
2,2	$1+\sqrt{2}$	-	-	-	-	-	-
4,4	$1+\frac{7}{2}\sqrt{2}$	$1+5\sqrt{2}$	-	-	-	-	-
6,6	$1+\frac{17}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{15}{2}\sqrt{2}$	$1+9\sqrt{2}$	-	-	-	-
8,8	$1+\frac{31}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{29}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{23}{2}\sqrt{2}$	$1+13\sqrt{2}$	-	-	-
10,10	$1+\frac{49}{5}\sqrt{2}$	$1+\frac{47}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{41}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{31}{2}\sqrt{2}$	$1+17\sqrt{2}$	-	-
12,12	$1+\frac{71}{6}\sqrt{2}$	$1+\frac{69}{5}\sqrt{2}$	$1+\frac{63}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{53}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{39}{2}\sqrt{2}$	$1+21\sqrt{2}$	-
14,14	$1+\frac{97}{7}\sqrt{2}$	$1+\frac{95}{6}\sqrt{2}$	$1+\frac{89}{5}\sqrt{2}$	$1+\frac{69}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{65}{3}\sqrt{2}$	$1+1+\frac{47}{2}\sqrt{2}$	$1+25\sqrt{2}$

重 P は

$$P(k, k, n') = \left\{ 1 + \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 2n'^2 + 4n' - 3}{\frac{k}{2} - n' + 1} \sqrt{2} \right\} C_p \quad (32)$$

なる式で決定されることが分かった。そこでいま、載荷板に接触する要素数 n' と縦横の要素数 k との関係を $n' = sk$ (ただし k は十分に大きく、 $0 < s < \frac{1}{2}$) とおいて、式 (23) に式 (22), (32) を代入して k を消去し、更に式 (20), (21) を用いると、載荷板に作用する単位長さ当たりの応力 q_d は

$$q_d = \left(2 + \frac{1}{s} \right) c_G \quad (33)$$

となり、支持力係数は

$$N_c = 2 + \frac{1}{s} \quad (34)$$

となることが分かり、 N_c と s の関係をグラフに描くと図-10 の *rolling* と記した曲線になる。連続体モデルにおける支持力係数 $N_c = 5.14$ になるのは、 $s = 0.32$ のときである。また、 s を小さく、すなわち全要素幅に対する載荷板の長さを小さくしていくと N_c は無限に大きくなるのが連続体モデルと異なる点である。要素全体に塑性すべりが生じる原因として、接触条件と、全要素の接触角 α を一定値 α にしていることが挙げられる。 α が一定のとき、要素が規則的に配置されるため、軸力が直線状に伝わり易く、要素数を大きくしても要

素全体にまで軸力が伝わっていく。したがって種々の大きさの要素を無秩序に混在させたモデルであれば、軸力は一方向だけでなく多方向にも伝わり、徐々に減少し、要素の流れは載荷板からある一定の範囲内で収束すると予想される。今後の課題として、(1) $k = m = n$ の場合だけでなく、一般の要素数 m, n の場合においてもシンプレックス法が収束するようにプログラムを改良すること、(2) 混在モデルについて検討していくことが挙げられる。

3.2 非回転モデル

(1) L 型モデル

次に、非回転の場合のメカニズム (10, 10, 2) を図-11 で、縦の要素数 n と極限荷重 P の関係を図-12 に示す。要素が回転できないので、要素同士のすべての接触点にすべりが生じるメカニズムになっている。図-12 によると m の値が小さいときは極限荷重は n の 2 次関数的に増加しているが、 m が無限に大きくなると図-12 における $m = large$ のように直線に近似できる。すると極限荷重 P は n の線形関数となるため、 n が無限に大きくなるとき、式 (17), (19) を考慮すると要素全体の大局的な粘着力 c_G は一定値に収束し、その値は約 0.9 となった。

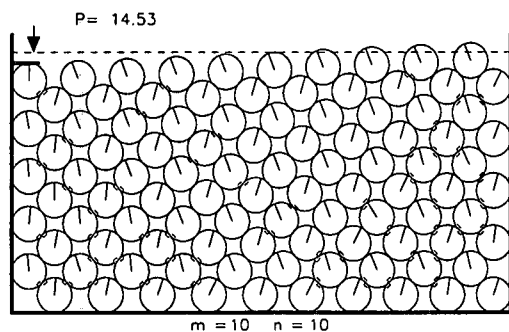


図-8 メカニズム (10,10,1)

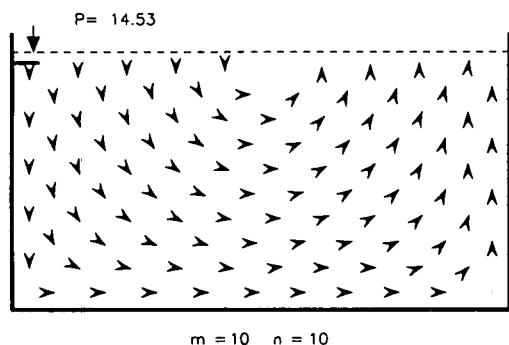


図-9 100 要素の重心の動き

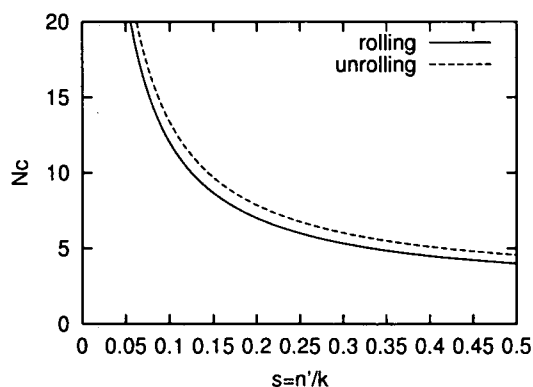


図-10 N_c と s の関係

(2) U 型モデル

(1) の結果を踏まえて非回転の U 型モデルを考える。最も簡単な要素数が 4 個の場合のメカニズムを図-13 に示し、次に要素数が 16 の場合のメカニズムを図-14 に示す。さらに要素を増加させた場合の極限荷重値を表-3 に示し、崩壊のメカニズムを図-15,16 で示す。ただしここではメカニズムと重心の動きを同時に描いている。メカニズムを見ると、載荷板の長さに応じた幅で直線状に要素の変位が見られる。載荷板直下のくさび形領域、それに接した剛体的に変位する長方形領域、さらにその長方形領域が底辺の三角形せん断領域を右方向に押し出している。三角形せん断領域がその右上

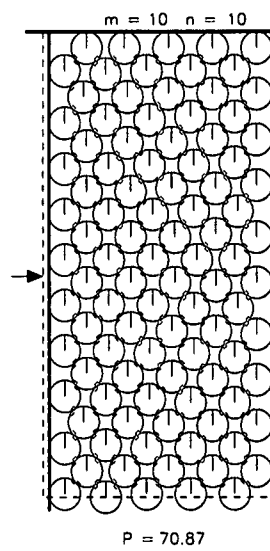


図-11 非回転メカニズム L 型

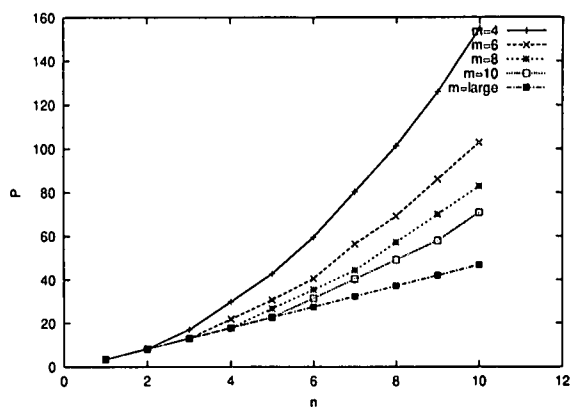


図-12 極限荷重 P -横の要素数 n

に接する長方形領域を剛体的に変位させ、最後にその長方形領域がその右上のくさび形領域を上方に押し出す。以上のように 5 個のブロックが剛体的に変位し、そのブロックの周辺のみですべりが生じていることが分かる。要素数が 4 個の場合の極限荷重は、

$$P(2, 2, 1) = (2 + 2\sqrt{2})C_p \quad (35)$$

であり、要素数が 16 個の場合の極限荷重は、

$$P(4, 4, 1) = (2 + 6\sqrt{2})C_p \quad (36)$$

と求められる。 $k = m = n$, すなわち縦と横の要素数が等しく、 $n' = 1$ のとき、極限荷重は

$$P(k, k, 1) = \{2 + (2k - 2)\sqrt{2}\}C_p \quad (37)$$

なる形式で決定されることが分かり、その形式を用いて P の値を表-4 で示す。ただし $n' \geq 2$ においてはメカニズムから理論解を導くことが不可能だったので、解

表-3 極限荷重値 $P(k, k, n')$ (非回転 U 型)

$k, k/n'$	1	2	3	4
2,2	4.83	-	-	-
4,4	10.49	8.07	-	-
6,6	16.14	22.14	-	-
8,8	21.80	27.80	33.80	-
10,10	27.46	33.46	39.46	45.46

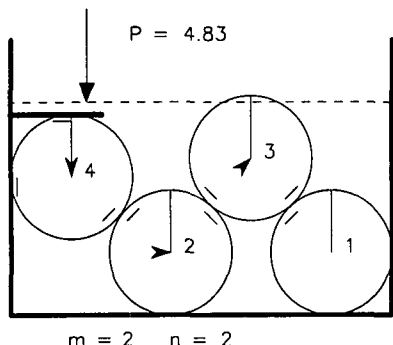


図-13 非回転メカニズム (2,2,1)

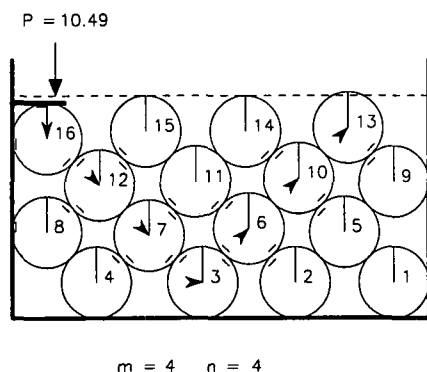


図-14 非回転メカニズム (4,4,1)

析解の表-3 をもとにした推定値である。ここで回転モデルと同様に表-4 から極限荷重の帰納的理論解が

$$P(k, k, n') = \{(2k - 2)\sqrt{2} + 6n' - 4\}C_p \quad (38)$$

なる式で決定されることが分かった。

前節より、縦横の要素数が無限に大きいとき、非回転モデルにおける大局的な粘着力 c_G は 0.9 であることが分かっており、要素同士の粘着力は $C_p = 1$ である。したがって非回転モデルと同様の計算をすると、載荷板に作用する応力 q_d は

$$q_d = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{10}{9s}\right)c_G \quad (39)$$

となり、支持力係数 N_c は

$$N_c = \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{10}{9s} \quad (40)$$

表-4 理論値 $P(k, k, n')$ (非回転 U 型)

$k, k/n'$	1	2	3	4
2,2	$2 + 2\sqrt{2}$	-	-	-
4,4	$2 + 6\sqrt{2}$	-	-	-
6,6	$2 + 10\sqrt{2}$	$8 + 10\sqrt{2}$	-	-
8,8	$2 + 14\sqrt{2}$	$8 + 14\sqrt{2}$	$14 + 14\sqrt{2}$	-
10,10	$2 + 18\sqrt{2}$	$8 + 18\sqrt{2}$	$14 + 18\sqrt{2}$	$20 + 18\sqrt{2}$

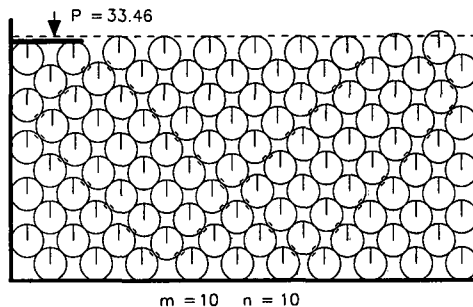


図-15 非回転メカニズム (10,10,2)

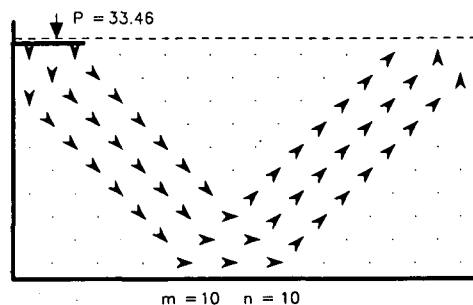


図-16 非回転重心の動き (10,10,2)

と決定される。この形式は回転モデルと同様であり、これを図-10 の unrolling と記した曲線に示す。支持力係数は回転モデルよりも約 11% 大きな値を取る。メカニズム自体は回転モデルとは異なるが、 s を無限に小さくしていくと、 N_c は無限大に発散し、塑性すべりの影響がある幅を持って要素全域に及ぶのは回転モデルに共通している。要素を非回転にすると、回転の自由度が奪われるため、全体としての変形の自由度を失う。したがって、非回転モデルでは軸力の伝達は回転モデルよりも局所方向に集中し、変形は回転モデルよりも狭い幅で集中し要素全体に及ぶことになる。

4. 本研究のまとめ

本研究では粒状体の大局的な挙動を局所的な粘着力のみを仮定して説明することを主たる目的とし、支持

力問題を円形要素集合体の粒状体から評価した。さらに要素が回転をしないとした場合の挙動についても調べた。以下に本研究で得られた結論について述べる。

- 要素数を無限大にすると、縦横の要素数と載荷板に接触する要素数の比に応じて支持力係数が決定される。
- 要素の回転条件は系の変形を滑らかにする作用と軸力を分散させる作用を持つ。

今後の課題としては、

- 要素を規則的に配列するのではなく、無秩序に混在させる。
- 軸力に引っ張りが生じたらその接触点における接触条件を除外する。

- 重力や内部摩擦角の影響を考慮する。
- 一般の要素数で極限荷重の解析値、理論値を求める。といった事項があげられる。

参考文献

- 1) 福島雅夫：数理計画入門 システム制御情報学会編，朝倉書店，2章，pp. 23-41, 1998.
- 2) 田村武，小池渉，櫻井義之：剛体要素からなる粒状体の上界法とその応用，応用力学論文集，Vol. 1, pp. 407-416, 1998.
- 3) Tamura, T & Yamada, Y : A Rigid-Plastic Analysis for Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. 36, No.3, pp. 113-121, 1996.

(2000 年 4 月 21 日 受付)