

剛塑性シェイクダウン解析と多基礎構造物の支持力問題への応用

Rigid Plastic Shakedown Analysis and its Application for a Bearing Capacity Problem of a Multi-footing System

小林俊一*・源城 望**・田村 武***

Shun-ichi KOBAYASHI, Nozomu GENJO and Takeshi TAMURA

*正会員 修士(工学) 京都大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**学生会員 工学士 京都大学大学院修士課程 工学研究科土木工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

***フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Bearing capacity characteristics of a multi-footing system subjected to repeated and combined loads are investigated in this study. As an analogy of a statical shakedown analysis based on Melan's theorem, rigid-plastic shakedown analysis is newly proposed. Theoretical consideration of the proposed method is done, especially in comparison with elasto-plastic statical shakedown analysis. As an example, bearing capacity characteristics of a three-footing system is estimated by the proposed method. Reduction of bearing capacity for repeated loads can be estimated numerically. Instead of theoretical ambiguities, it may be useful for concise design procedure.

Key Words : shakedown analysis, bearing capacity, multi-footing system, repeated loads

1. はじめに

北海の石油掘削リグなどに代表されるように、資源探査を目的とした海洋構造物はしばしば外洋域に建設され、波浪・潮流・流氷などの環境外力が無数の繰返し組合せ荷重として作用する厳しい荷重条件に晒される場合が多い。このような海洋構造物を念頭におき、無数の繰返し組合せ荷重を受ける多基礎構造物の支持特性を簡潔かつ定量的に評価する手法を開発することが本研究の狙いである。

近年、組合せ荷重を受ける基礎の支持特性を簡潔に表現する方法として、荷重空間内の降伏曲面を導入したマクロエレメント法がしばしば用いられている^{1),2),3),4),5),6),7),8),9)}。マクロエレメントとして用いられる荷重空間内の降伏曲面の一般的な形は以下の通りである。

$$f(V, H, M/B) = 0, \quad (1)$$

ここに V , H , M はそれぞれ基礎に載荷する鉛直、水平、モーメント荷重を表し、 B は基礎幅である。これらの実験的あるいは理論的検討を通じて、組合せ荷重を受ける基礎の支持特性については多くの知見が蓄積されてきている。

一方、これらの基礎を複数有するような構造物の支持特性については、遠心載荷実験による検討¹⁰⁾や極限解析を援用した検討¹¹⁾などが行われており、実構造物の経済的かつ合理的な設計手法への応用が試みられているようである。しかしながら、繰返し荷重を受ける多基礎構造物の支持特性を簡潔かつ合理的に評価する方法については、さらに検討の余地があると思われる。

そこで本研究では、繰返し組合せ荷重を受ける多基礎構造物の支持特性を評価する簡易的な方法として、剛塑性シェイクダウン解析による支持特性評価法を提案する。

2. 提案する支持特性評価法

2.1 基本的な考え方

従来の研究により単一基礎の支持特性については多くの知見が得られていることを利用し、単一基礎の支持特性と上部構造物の幾何学形状から多基礎構造物の支持特性を評価する方法を提案する。この際、特に海洋構造物の支持特性を考慮する場合に重要となることは、環境外力が無数の繰返し荷重として載荷する厳しい載荷条件が課せられることにある。このような問題では、時間領域で逐次的な弾塑性解析を行うよりも、シェイクダウン定理に基づくシェイクダウン解析^{12),13)}を利用する方が解析時間およびコストの面で有利であると考えられる。そこで、本研究においては、以下に示す剛塑性シェイクダウン解析法を検討する。

なお、本論文ではテクニカルタームを以下の意味で用いる。シェイクダウンとは、繰返し載荷を受ける系の挙動が十分な載荷回数を経ると弾性応答に落ち着き、塑性変位がそれ以上進展しない現象を指す。したがってシェイクダウン限界荷重を求めることは、繰返し荷重を受ける系が安定するような荷重の限界値を求めることに相当する。一方、終局限界(荷重)とは、単調載荷により系が塑性崩壊する限界の状態(あるいはその荷重)のことである。

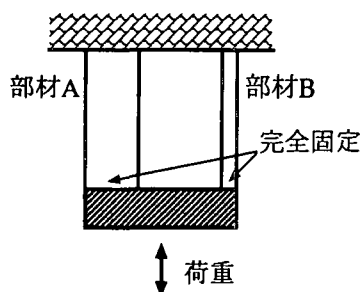


図-1 1次元2部材トラスの例題

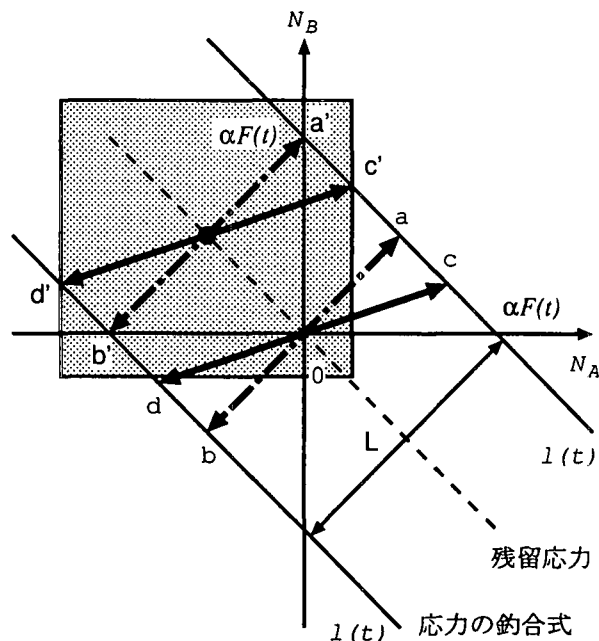


図-2 部材力の荷重空間表示

2.2 静力学的なシェイクダウン解析の幾何的説明

ここではメランの定理に基づく静力学的なシェイクダウン解析の概要を簡単な例題を通して幾何的に説明する。

まず図-1に示すように、弾塑性挙動を示す2部材を部材端で剛結した1次元2部材トラスに繰返し荷重 $\alpha \cdot F(t)$ が載荷する例題を考えてみる。ここに α は荷重係数とする。また荷重変動は十分にゆっくりとしており、慣性力は無視できるものとする。この時、各部材の部材力を N_A, N_B とおけば、系の釣合式は

$$N_A + N_B = \alpha \cdot F(t) \quad (2)$$

である。したがって、釣合式を満たす部材力の組合せは無数にあり、図-2中の傾き-1の直線群 $l(t)$ が各時刻における釣合式に対応している。荷重係数 α が大きくなることは、直線群 $l(t)$ が取りうる領域の幅 L が大きくなることに相当する。

一方、各部材の端部は剛結されているため、それぞれの部材の変形量は等しいという変形の適合条件を満足しなければならない。各部材に発生する部材力は、変形の適合条件を満足しつつ、各部材の(相対的な)弾性剛性に応じた荷重分担を受け持つ。この結果、例えば図-2中の直線 cd のような制約条件が課せられる。

したがって、系の弾性解は変形の適合条件から決まる制約条件(直線 cd)と、応力の釣合式(直線 $l(t)$)の交点として求められる。

ここで、各部材の強度が互いに独立であるとすれば、系の降伏曲面は例えば図-2の斜線表示した矩形領域のように表せる。許容応力場の要件から、正解の応力場はこの矩形領域内部に存在するはずである。さて、系に作用する繰返し荷重によって、応力の釣合式(直線群 $l(t)$)が図-2の幅 L の範囲にあるような状況を考えてみよう。このとき、系の弾性挙動しか考慮しなければ、明らかに応力状態は降伏曲面の外側に位置することがある。つまり弾性解を利用した許容応力度法のような方法では、このような外力に対して系は安定であるとは判断できない。

しかし、系に塑性変形が生じた場合を考えてみよう。このとき、部材 i に現れた塑性変形を u_i^p とすると、塑性変形自体では変形の適合条件を満足できないが、ゼロ外力に釣合い時間に依存しない残留応力 Q_i^r による弾性変形 $u_i^r = Q_i^r / (EA)_i \cdot l_i$ を考慮すると、これらの変形の和 $u_i^p + u_i^r$ が変形の適合条件を満足できるような場合がある。これを図-2によって幾何的に説明する。

ゼロ外力に釣合うような時間に依存しない残留応力場は $N_A^r + N_B^r = 0$ であるので、図中の原点を通る傾き-1の直線上の任意の点として表せる。よって、弾性解(直線 cd)に残留応力を足し合わせた応力解(例えば直線 $c'd'$)もやはり応力の釣合式を満たし、しかも変形の適合条件も満足する解の一つである。しかも、これらの解のなかで、いつでも降伏曲面を破らない応力場となる解が見つかれば、解は許容応力場を形成していると言える。

このような応力場が見つかれば、繰返し載荷の初期には塑性変形が発生するだろうが、ある荷重サイクル後は、系の応答は弾性的な挙動に落ち着いて、それ以上塑性変形が進行しない状態となると考えられる。これをシェイクダウンと呼ぶ。

つまり、静力学的なシェイクダウン解析では、載荷する繰返し外力に対して、ゼロ外力に釣合う時間に依存しない残留応力場のうちで、いつでも弾性解と残留応力の和が降伏条件を破らないものを見つける解析を行う。

2.3 剛塑性シェイクダウン解析による近似解法とその幾何的解釈

弾塑性シェイクダウン解析では、系の弾性挙動特性が既知である必要があった。しかしながら、基礎構造

物の荷重～沈下曲線に見られるような支持特性を念頭におくと、基礎の沈下量のうちで弾性成分は塑性成分に比べると遥かに小さいと思われ、しかも荷重レベルに応じて非線形の挙動を示すため、そもそも弾性成分と塑性成分を明瞭に分離することが難しい。したがって、基礎構造物の弾性的な支持特性をモデル化することは、マクロエレメント法のような荷重空間内の降伏曲面として基礎の塑性降伏挙動をモデル化することと比べると精度が落ちることが予想される。

このような場合、弾性挙動特性を忠実にモデル化して弾塑性シェイクダウン解析に持ち込む方法以外に、工学的な取扱は出来ないであろうか。本研究ではシェイクダウン解析の近似解法として、弾性応力の代わりに応力の釣合式から一意的に決定できる別の応力を用いた方法について検討を行った。

応力の釣合式を満足する応力の組合せは無数にある。このような応力のうちで、弾性体の応力～ひずみ関係を介して変形の適合条件を満足するような応力を選べば弾性解となるが、ここでは解のノルムが最小となる条件を課したノルム最小解を用いることにした。本研究では、このノルム最小解による応力を便宜上、釣合応力と呼ぶことにする。またノルム最小解を用いた静力学的なシェイクダウン解析の近似解法のことを剛塑性シェイクダウン解析と便宜上呼ぶ。

ノルム最小解による釣合応力を用いた剛塑性シェイクダウン解析の幾何的な説明を以下に試みる。対象とした例題は弾塑性シェイクダウン解析の説明に用いたものと同じ図-1に示す1次元2部材トラスである。

ノルム最小となる条件は、原点から釣合応力（図-2の直線群 $l(t)$ ）に引いた垂線（直線 ab ）となるので、ノルム最小解による釣合応力は直線 $l(t)$ と直線 ab の交点で与えられる。あとは、弾性応力の代わりにこの釣合応力を用いてシェイクダウン解析法を議論すればよい。ゼロ外力に釣合う時間に依らない残留応力は弾塑性シェイクダウンの場合と同じく、図中の原点を通り傾き -1 で表される破線上の任意の点として表される。したがって、剛塑性シェイクダウン解析では、例えば図中の直線 $a'b'$ も許容な応力場を構成することが分かる。

ここで明らかなように、本例題においては剛塑性シェイクダウン解析ではさらに大きな繰返し荷重（すなわち、さらに大きな荷重係数 α あるいは、図中でさらに大きな釣合応力領域の幅 L ）に対しても、許容な応力場を構成できるのに対して、弾塑性シェイクダウン解析では、これよりも大きな繰返し荷重に対しては、もはや系は支持し得ないことが分かる。別の表現をすれば、剛塑性シェイクダウン解析の方が、弾塑性シェイクダウン解析法よりも大きめのシェイクダウン限界荷重を評価する可能性がある。

一般に弾性解のノルムはノルム最小解よりも大きい

ため、剛塑性シェイクダウン解析では、弾塑性シェイクダウン解析よりも大きめの支持力解を出す可能性があることに注意しておく必要があることが分かる。つまり、剛塑性シェイクダウン解析法では、変形の適合条件に関する情報が欠落しているため、シェイクダウン限界荷重の下界を与えるという理論的な保証は喪失することに注意しておく。

2.4 定式化

最初に提案する手法を一般的な形で示す。以下の数式では、ベクトル量を記号 $\underline{\cdot}$ で、テンソル量を記号 $\underline{\cdot}$ で表す。

領域 D 内の位置ベクトルを $\underline{s} \in D$ 、時刻をスカラー $t \in [0, +\infty)$ で表す。

一般化応力ベクトルを $\underline{Q}$ 、作用する外力ベクトルを $\underline{F}$ とすれば、系の釣合式は以下のように表せる。

$$\underline{C}^T \underline{Q} = \underline{F} \quad (3)$$

本研究の場合、一般化応力は具体的には各基礎に作用する鉛直、水平、モーメント荷重に相当する。

外力は自重などのような定常成分 $\underline{F}_s(\underline{s})$ と時間により変動する繰返し成分 $\underline{F}_d(\underline{s}, t)$ の和として

$$\underline{F}(\underline{s}, t) = \underline{F}_s(\underline{s}) + \alpha \underline{F}_d(\underline{s}, t) \quad (4)$$

と表すことにする。繰返し成分の項に作用するスカラー α は（変動荷重に対する）荷重係数とする。

一般に釣合式 (3) を満足する一般化応力の組は無数にある。このような解のうち、ここではノルム最小解を用いることにする。釣合行列 $\underline{C}^T$ の一般逆行列 $(\underline{C}^T)^{-}$ を用いると、外力に対して一意的にノルム最小荷重が計算できる¹⁴⁾。ここではノルム最小解による一般化応力を釣合応力 $\underline{Q}^d(\underline{s}, t)$ と呼ぶことにする。釣合応力は外力の定常成分に依る項 $\underline{Q}_s^d(\underline{s})$ と繰返し成分に依る項 $\underline{Q}_d^d(\underline{s}, t)$ に分離できる。一方、基礎には釣合応力の他にゼロ外力に釣合う時間に依らない残留成分 $\underline{Q}^r(\underline{s})$ も作用する。これらをまとめて式示すると以下の通りである。

$$\underline{C}^T (\underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \alpha \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t) + \underline{Q}^r(\underline{s})) = \underline{F}_s + \alpha \underline{F}_d \quad (5)$$

ここに、各応力成分は以下の通りであり、

$$\begin{aligned} \underline{Q}_s^d(\underline{s}) &= (\underline{C}^T)^{-} \underline{F}_s, \\ \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t) &= (\underline{C}^T)^{-} \underline{F}_d(t), \\ \underline{C}^T \underline{Q}^r &= \underline{0} \end{aligned} \quad (6)$$

釣合応力成分 $\underline{Q}_s^d$ 、 $\underline{Q}_d^d$ は外力が与えられれば一意的に計算できる。

ここでメランの定理を援用し、シェイクダウン限界荷重を求める静力学的手法を以下の非線形最適化問題

として定式化する。

Find $\alpha \rightarrow \max$

subject to the following conditions ; $\forall \underline{s} \in D \ \& \ \forall t$

$$\begin{aligned} f(\underline{Q}) &= f(\underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \alpha \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t) + \underline{Q}^r(\underline{s})) \leq 0 \\ \underline{C}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

弾塑性体に対するメランの定理の主張は、ある荷重 $\underline{F} = \underline{F}_s + \alpha \underline{F}_d$ に対して、ゼロ外力に釣合う時間に独立な残留応力が存在し、任意の時間において領域のあらゆる場所で降伏条件を破ることがなければ、系はシェイクダウンすることを意味する。本研究では、弾性応力 $\underline{Q}^e(\underline{s}, t)$ の代わりに釣合応力 $\underline{Q}_d^d(\underline{s}, t)$ を用いて定式化を行っているため、シェイクダウン限界荷重を近似的に評価していることに注意されたい。

さて、解析を簡単にするために、制約条件である降伏関数 f を図-3に示すように内接する区分的に線形な関数に置き換える。

$$\underline{N}^T \underline{Q} - \underline{K} \leq 0 \quad (8)$$

ここに、テンソル $\underline{N}$ は区分的な降伏曲面における法線ベクトル $\underline{n}_i$ を順番に並べた行列、ベクトル $\underline{K}$ は各区分的な降伏曲面での強度、すなわち原点から各降伏曲面へ引いた垂線の足の長さを順番に並べたベクトルである。降伏関数の線形化によって、解くべき最適化問題は、以下の線形計画問題となる。

Find $\alpha \rightarrow \max$

subject to the following conditions ; $\forall \underline{s} \in D \ \& \ \forall t$

$$\begin{aligned} \underline{N}^T \underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \alpha \underline{N}^T \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t) + \underline{N}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) - \underline{K} &\leq 0 \\ \underline{C}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

さらに時間領域 t における最適化演算を回避する目的で、図-4に示すように、繰返し荷重に対する釣合応力 $\underline{Q}_d^d(\underline{s}, t)$ の占める一般化応力空間内の領域 Γ (斜線の領域) の代わりに、これに外接する領域 Γ' を導入する。領域 Γ' を具体的に式示すれば

$$\text{for } \forall t, \max [\underline{N}^T \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t)] = \underline{M}(\underline{s}) \in \Gamma' \quad (10)$$

となる。ここに記号 $\max[*]$ はベクトルの各成分について、時間 $t \in [0, +\infty)$ における最大値を採ることを意味する。領域 Γ' を導入すると、制約条件式が

$$\begin{aligned} \underline{N}^T \underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \alpha \underline{N}^T \underline{Q}_d^d(\underline{s}, t) + \underline{N}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) - \underline{K} \\ \leq \underline{N}^T \underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \alpha \underline{N}^T \underline{M}(\underline{s}) + \underline{N}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) - \underline{K} \\ \leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

のように、時間 t に独立でより厳しい制約条件式に書き換えられる。

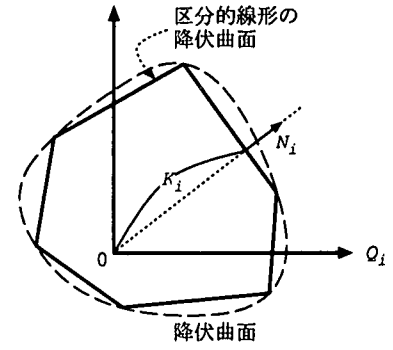


図-3 降伏関数の線形化

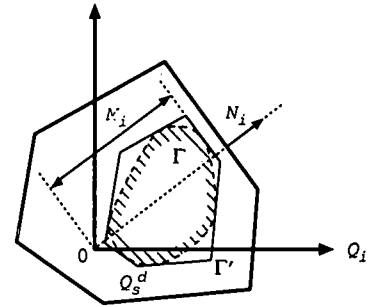


図-4 領域 Γ' の定義

最終的に、提案する剛塑性シェイクダウン解析は以下の線形計画法として定式化される。解くべき未知数は荷重係数 α と残留応力 $\underline{Q}^r$ である。

Find $\alpha \rightarrow \max$

subject to the following conditions ; $\forall \underline{s} \in D$

$$\begin{aligned} \alpha \underline{M}(\underline{s}) + \underline{N}^T \underline{Q}_s^d(\underline{s}) + \underline{N}^T \underline{Q}^r(\underline{s}) - \underline{K} &\leq 0 \\ \underline{C}^T \underline{Q}^r &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3. 多基礎構造物の支持力問題への適用

3.1 対象とする構造物

ここでは図-5に示す3脚式3次元構造物を対象に、繰返し荷重に対する系の支持特性を剛塑性シェイクダウン解析で評価する例を示す。上部構造は各部材の長さは等しく l とし、上部節点 D で剛結されている。一方、下部構造は独立した基礎 A～基礎 C で構成される。各基礎と部材はユニバーサルジョイントで結合されており、基礎にはモーメント荷重は伝達しないようにモデル化した。これは、基礎幅に対して構造物の寸法が十分に大きな場合、系全体のモーメントの釣合では、基礎のモーメント支持力よりも基礎の鉛直・水平支持力に起因する成分の方が卓越すると考えられるからである。

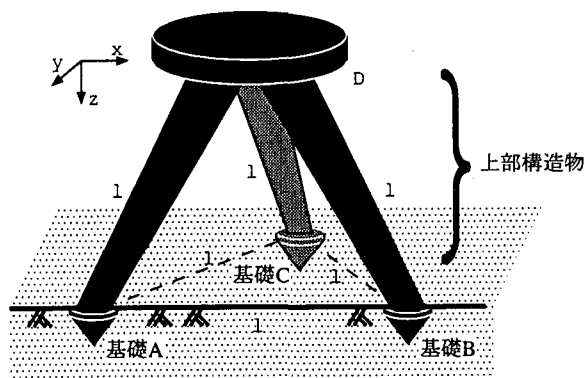


図-5 対象とする構造物

まず、解析に際して以下の基本仮定を設ける。

- 繰返し組合せ荷重載荷時の各基礎の挙動は剛塑性であると仮定し、その支持特性は荷重空間内の降伏曲面として表せるとする。また各基礎の挙動は互いに独立であると仮定する。
- 荷重分担は系の初期状態における釣合式より静力学的に決められるものとする。つまり、系の変形の適合条件は考慮しない。

このとき、剛塑性シェイクダウン解析によって系の安定性や各基礎への荷重の分担率は、系全体の力およびモーメントの釣合式と各基礎の降伏条件から静力学的に評価できることになる。

3.2 外荷重のモデル化

荷重 F は上部構造の節点 D に集中荷重として載荷する状態を想定する。その他の部位に荷重が載荷する場合も、釣合式を考慮すれば、節点 D に作用する等価な集中荷重・偶力モーメントに置き直すことができる。海洋構造物の場合、繰返し荷重として波力等の水平方向成分が卓越し、鉛直方向成分は構造物の自重による定常荷重が卓越する場合はしばしば考えられる。そこで図-6 に示すように、ある一定の鉛直荷重のもとで水平方向の荷重が単調あるいは繰返し載荷する経路を検討した。

ある一定鉛直荷重 $V = \text{const.}$ のもとでの系の終局限界荷重は、水平荷重の一方向載荷によって系が支持し得る最大荷重に相当し、一般には載荷方向に依存する。一方、ある一定鉛直荷重 $V = \text{const.}$ のもとでの系のシェイクダウン限界荷重は、繰返し荷重の取り得る領域（図-6 中の円形領域 Π ）の中で系が支持し得る最大の領域 Π を求めることに相当する。この領域 Π の最大化は、領域の径の最大化、すなわち荷重係数の最大化にほかならない。この解析をさまざまな一定鉛直荷重レベル $V = \text{const.}$ で系統的に実施し、系の支持特性を荷重空間内の閉曲面で表した。

なお、海洋構造物の支持特性を具体的に検討するた

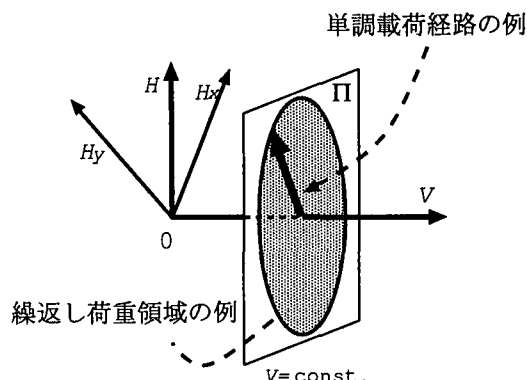


図-6 荷重経路

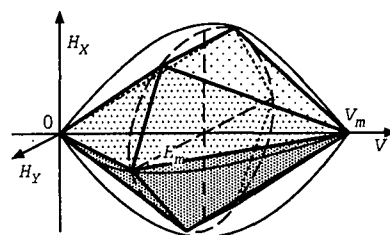


図-7 各基礎の降伏曲面

めには、上記の載荷経路では単純すぎることは言うまでもない。構造物～流体系の相互作用力としての波力の評価法はそれ自身、重要な工学的問題であり、別途詳細な検討が必要である。しかしながら、本研究で示した解析法は一般的な形で与えられているので、ひとたび節点 D に載荷する等価な外荷重特性が分かれば、系の支持特性を評価することは可能である。

3.3 各基礎の支持特性のモデル化

各基礎の降伏曲面は組合せ荷重に対する2次元載荷実験の実験式⁴⁾を参考とし、モーメント荷重0で水平荷重を形式的に x, y の2方向成分に分けて表示した以下の式を利用した。

$$(H_x/H_m)^2 + (H_y/H_m)^2 = 16(V/V_m)^2 \cdot (1 - V/V_m)^2 \quad (13)$$

ここで添字 m は鉛直あるいは水平最大支持力を表し、ここでは現実的な値を勘案して $H_m/V_m = 1/5$ を用いた。さらに解析を行うに当たって図-7 に示す線形化を行い、式(8)に内接する区分的線形な12面体を降伏曲面として用いた。

3.4 解くべき線形計画問題

ここでは解くべき線形計画問題を具体的に示しておく。まず、仮定によって各基礎にはモーメント荷重は伝達しないので、各基礎 i に働く j 方向の荷重を f_{ij} と

すれば、一般化応力 $\underline{Q}$ は

$$\underline{Q} = (f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}, \dots, f_{3x}, f_{3y}, f_{3z}) \quad (14)$$

となる。節点 D に作用する i 方向の荷重を F_i と、 j 軸周りのモーメントを m_j とおくと、外荷重 $\underline{F}$ は

$$\underline{F} = (F_x, F_y, F_z, m_x, m_y, m_z) \quad (15)$$

である。このとき、系の釣合式 $\underline{C}^T \underline{Q} = \underline{F}$ におけるテンソル $\underline{C}^T$ の各成分は図-8 の通りである。

一方、荷重はさまざまな鉛直荷重 $F_z = \text{const.}$ のもとで

$$F_x = \alpha \cos \theta, F_y = \alpha \sin \theta, \quad \text{for } [0 \leq \theta \leq 2\pi] \quad (16)$$

とし、水平荷重の載荷方向 θ を変化させた。

区分的線形の降伏曲面については、法線ベクトルを集めたテンソル $\underline{N}^T$ が

$$\underline{N}^T = \frac{V_m}{4} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -2 & 0 & -2\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 2\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

のように、また各面の強度を集めたベクトル $\underline{K}$ が

$$\underline{K} = V_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (18)$$

である。

これらの値を用いて釣合応力を数値的に解き、式(12)に代入し、最終的な線形計画問題の最適解はシンプレックス法によって評価した。

3.5 数値解析結果と考察

単調荷重に対する解析によって得られた系の終局限界荷重曲面を図-9 に示す。一方、繰返し荷重に対する解析によって得られた系のシェイクダウン限界荷重曲面を図-10 に示す。

終局限界荷重とシェイクダウン限界荷重を比較するために、限界荷重曲面を V/V_m 軸を含む平面で切った断面図を図-11 に示す。図中の角度 θ は図-5 の xy 面において x から正の方向に測った角度を示す。本解析例の場合、シェイクダウン限界荷重は終局限界荷重のおおむね 40 ~ 60% に低下していることが分かる。

同様に、限界荷重曲面を $V/V_m = \text{const.}$ 面で切った断面図を図-12 に示す。構造物の幾何学的な対称性のため、水平方向の支持特性が 60° 毎に繰り返していることが分かる。

本解析手法によると、単調載荷時と比較して繰返し載荷時には系の支持力が低下することを端的に表現できていると思われる。ここで注意を要することは、個々の基礎の支持特性には繰返し載荷に伴う支持力低下は考慮していないことである。つまり、系全体の支持特性を評価することによって、繰返し載荷に対する支持力低下を表現することも可能であることが分かる。

今後、本手法を発展させて系の 3 次元支持特性をより正確に把握するためには、まず個々の基礎の支持特性、すなわち 3 次元 6 自由度の荷重空間内における単一基礎の支持特性把握が重要となってくる。この方面の実験的あるいは数値解析的研究は活発に行われており、その進展と応用が十分期待される。

一方、本研究で提案した解析手法を構造物の定量的な支持特性評価に応用するためには、実験的研究あるいは原位置計測結果との比較による検証が不可欠であることは言うまでもない。検証作業には、基礎挙動のモデル化の妥当性や荷重載荷条件の妥当性ととともに、本解析で提案したノルム最小解による釣合応力を用いた解析法の適用性を吟味する必要がある。特に、弾性解と大きく外れるようなノルム最小解では、解析に含まれる誤差が大きくなることは容易に予想できる。例えば、各基礎の強度に大きなバラツキがある場合や、上部構造が必ずしも等方的な剛性を持っていない場合に対する適用性については、今後注意深く検討する余地が残っている。

また本研究では、解析を容易にするために基礎の挙動を剛完全塑性であると仮定したが、さまざまな基礎の支持力実験結果によれば、荷重～沈下曲線は決して完全塑性挙動ではなく、塑性硬化挙動を示しながら終局限界荷重に至るように見える。したがって、塑性硬化特性を考慮した剛塑性あるいは弾塑性シェイクダウン解析の適用を図ることも検討課題である。

$$\underline{\underline{C}}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}l}{3} & -\frac{\sqrt{3}l}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}l}{3} & -\frac{\sqrt{3}l}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}l}{3} & \frac{\sqrt{3}l}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}l}{3} & 0 & -\frac{l}{2} & -\frac{\sqrt{6}l}{3} & 0 & \frac{l}{2} & -\frac{\sqrt{6}l}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}l}{6} & \frac{l}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}l}{6} & -\frac{l}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}l}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

図-8 テンソル $\underline{\underline{C}}^T$ の成分

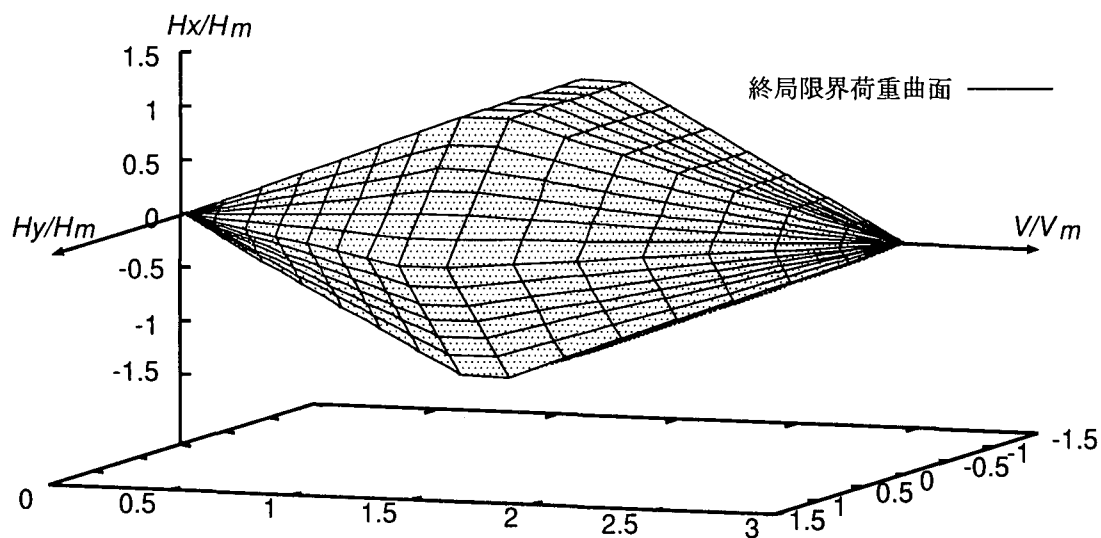


図-9 系の終局限界荷重曲面

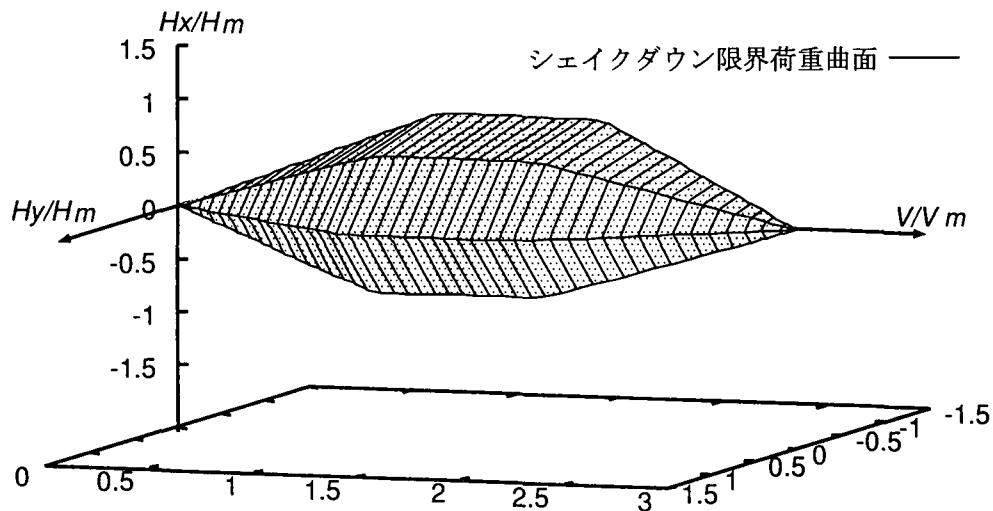


図-10 系のシェイクダウン限界荷重曲面

4. まとめ

シェイクダウン理論に基づいて、単一基礎の支持特性と構造物の幾何学条件から、繰返し組合せ荷重を受ける多基礎構造物の支持特性を静力学的に評価する剛

塑性シェイクダウン解析を提案した。本解析手法は、理論的にはシェイクダウン荷重の下界値を近似的に求める手法であると位置付けられる。またその手法は理論的にシンプルでしかも解析労力を余り必要としないた

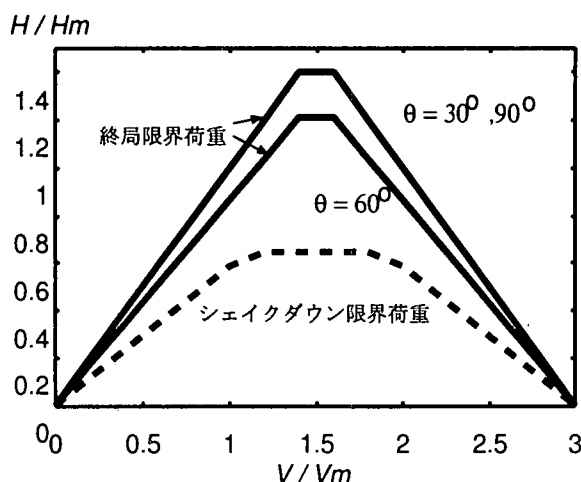


図-11 終局・シェイクダウン限界荷重の比較

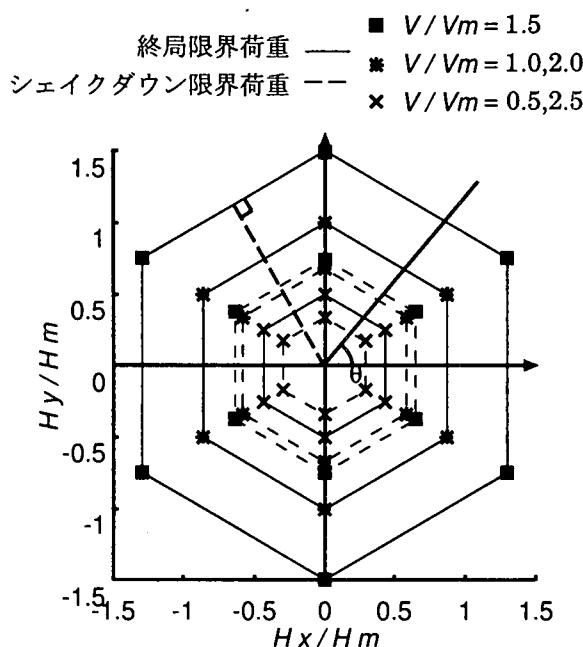


図-12 終局・シェイクダウン限界荷重の比較 ($V/V_m = \text{const.}$ 断面)

め、概略設計や基本設計において有用であると考えられる。

提案する手法により、図-5に示す3脚式3次元構造物を対象に、一定鉛直荷重の元で単調・繰返し水平荷重を受ける場合の支持特性評価を試みた。数値解析によって求めた系の終局限界荷重曲面とシェイクダウン限界荷重曲面を比較すると、解析例では全ての鉛直荷重レベルにおいてシェイクダウン限界荷重は終局限界荷重のおおむね40～60%であった。この結果は、単調載荷時と比較して、繰返し載荷時の系の支持力が低下することを定性的にはあるが、端的に表現していると思われる。

一方、本研究で提案した解析手法を構造物の定量的な支持特性評価に応用するためには、実験的研究あるいは原位置計測結果との比較による検証が不可欠である。特に、ノルム最小解による釣合応力を用いた解析法の適用性は、対象とする問題に大きく依存すると考えられるので、今後の大きな課題である。

実務上では、複数の基礎を組合せて大規模な構造物を構築することがしばしば見受けられる。このような構造物の繰返し載荷に対する支持特性を評価する場合、模型実験、あるいは弾塑性有限要素法による評価法では時間・労力・費用の面で必ずしも容易ではない。それに対して、本解析法は簡単な解析で支持特性を端的に表現出来る可能性があり、応用が期待できる。

参考文献

- 1) Georgiadis, M. and Butterfield, R. : Displacements of footings on sand under eccentric and inclined loads, *Canadian Geotech. J.* Vol. 25, pp. 199-212, 1988.
- 2) Tan, F. S. C. : Centrifuge and theoretical modelling of conical footings on sand, Ph. D. Thesis, Univ. of Cambridge, 1990.
- 3) Nova, R. and Motrasio, L. : Settlements of shallow foundations on sand, *Géotechnique*, Vol. 41, No. 2, pp. 243-256, 1991.
- 4) Houlsby, G. T. and Martin, C. M. : Modelling of the behaviour of foundations of jack-up units on clay, *Predictive soil mechanics*, Thomas Telford, pp. 339-358, 1993.
- 5) Butterfield, R. and Gottardi, G. : A complete three-dimensional failure envelope for shallow footings on sand, *Géotechnique*, Vol. 44, No. 1, pp. 181-184, 1994.
- 6) 関口秀雄、小林俊一：粘土地盤上の沿岸構造物の支持特性に関する塑性解析、第39回土質工学シンポジウム論文集、(社)土質工学会、pp. 195-202, 1994.
- 7) Dean, E. T. R., James, R. G., Schofield, A. N., Tan, F. S. C. and Tsukamoto, Y. : The bearing capacity of conical footings on sand in relation to the behaviour of spudcan footings of jackups, *Predictive soil mechanics*, Thomas Telford, pp. 230-253, 1993.
- 8) Dean, E. T. R., James, R. G., Schofield, A. N. and Tsukamoto, Y. : Theoretical modelling of spudcan behaviour under combined load, *Soils and Foundations*, Vol. 37, No. 2, pp. 1-15, 1997.
- 9) Bransby, M. F. and Randolph, M. F. : The effect of embedment depth on the undrained response of skirted foundations to combined loading, *Soils and Foundations*, Vol. 39, No. 4, pp. 19-33, 1999.
- 10) Dean, E. T. R., James, R. G., Schofield, A. N. and Tsukamoto, Y. : Numerical modelling of three-leg jackup behaviour subject to horizontal load, *Soils and Foundations*, Vol. 37, No. 2, pp. 17-26, 1997.
- 11) Murff, J. D. : Limit analysis of multi-footings foundation systems, *Proc. of the 8th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pp. 223-244, 1994.
- 12) Martin, J. B. : *Plasticity*, MIT Press, 1975.
- 13) Maier, G. : Shakedown Analysis, *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Chap. 6, Pergamon Press, 1979.
- 14) 半谷裕彦、川口健一：形態解析、培風館、1991.

(2000年4月21日受付)