

経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究

On the Examinations of the Strong Discontinuity Analysis by Using the Path Independent Integrals

杉本環*・鱈 洋一**・矢富盟祥***

Tamaki SUGIMOTO, Yoichi SUZUKI and Chikayoshi YATOMI

*学生会員 工修 金沢大学大学院工学部自然科学研究科 (〒920 - 8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

**正会員 博士 (工学) 金沢大学助手 工学部土木建設工学科 (〒920 - 8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

***正会員 Ph. D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 - 8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

We first examine the mesh independence of the finite element analysis making use of a damage model with incompatible elements that include a displacement discontinuous surface inside. This method is based on a strong discontinuity analysis with an assumed enhanced strain method. We then examine the independence of the width of a discontinuous band. Finally, we estimate the method by means of verifying the accuracy of the energy release rate calculated by the J-integral and the E-integral, which are path independent integrals. As a result, we find that, by using the E-integral method, the strong discontinuity analysis is appropriate and high accurate in view of the energy release rate. We also find that the well-known J-integral is not useful to show the accuracy of the strong discontinuity analysis.

Key Words : *strong discontinuity analysis, assumed enhanced strain method, incompatible element, energy release rate, J-integral, E-integral*

1. 序論

岩石やコンクリートのき裂, 地盤のせん断帯, 金属のリュースバンドなど, ひずみ場の局所化から不連続変位場の発生・進展により, やがて耐荷力を失い破壊へと至る一連の現象を考察することは, 工学上極めて重要であり, 現在も精力的な研究が行われている。

上記研究の一例としてコンクリートなどの脆性材料を扱う有限要素解析においては, Hillerborg¹⁾により提案された変位不連続面上の節点間に引張軟化挙動を示すリンク要素を用いた仮想ひび割れモデル (fictitious crack model) や要素剛性に直接軟化挙動を組み込むひび割れ帯モデル (crack band model)²⁾などが頻繁に用いられている。前者は物理的意味が明快であるが予めき裂の位置を決定しておくか, ひび割れ進展挙動を追跡するためには, 進展に伴う要素の再分割が必要となる。後者はひび割れ幅の評価が困難であること, また本来要素分割に依存しない物体全体の挙動を示す荷重-載荷点変位が要素分割に依存するなどの欠点がある。また, 弾塑性体理論に基づいてひずみの局所化やせん断帯の発生を通常

の有限要素法に用いて解析した場合も, その結果が要素分割に依存することも良く知られており, そのため種々の解析手法の研究報告も数多い³⁾。

このような短所を克服できる解析手法の一つとして, Simo や Oliver らによって提案された不連続変位を要素内部に組み込んだ有限要素法 (assumed enhanced strain method) による強不連続解析 (strong discontinuity analysis) が挙げられる^{4)~6)}。ここで強不連続とは変位場に不連続が生じるものを意味し, またひずみ場に不連続が生じるものは弱不連続と呼ばれる。強不連続解析では, Heaviside の単位関数で表された不連続変位場を定義し, これを空間微分することにより Dirac のデルタ関数で表される項を含むひずみ場を誘導する。そして使用する構成式に応力の有限性の条件を考慮すると変位不連続面内とそれ以外の部分の構成式を得る。これらを離散化して有限要素定式化を行い, その際不連続変位場を要素内部に組み込む非適合要素を用いる。またひずみ場を数値解析で直接扱うため, Dirac のデルタ関数を微小な不連続面の幅の逆数により近似する。このような解析手法により, 荷重-載荷点変位が要素分割に依存しない客観的な解析が行うことが出来る。最近これらと類似の解析手法が幾人かの研究者によって発

表されている^{7)~12)}.

またこれらの変位不連続面を要素内部に組み込む解析手法は、破壊力学の分野で従来行われている要素辺上で不連続面を表す有限要素解析に比べ、き裂進展方向は自由に決める事が出来、き裂進展先で再び細かい要素分割を行う必要が無いことなど、せん断帯やき裂進展解析に極めて有用であり、今後の研究が大いに期待される手法である。

しかしながら、興味ある解析手法であるが、現在まで1次元の場合を除き、理論解が得られない事もあり、それらの解析手法の精度検討に関する研究は筆者の知る限り皆無である。興味ある解析手法であっても、精度が悪ければ、工学的に無意味である。

そこで、本論文では、不連続面の解析モデルとして、とりあえず先に述べた、SimoやOliverらの強不連続モデル^{5) 6)}の内、等方損傷モデルを用いたモデルを採用し、まずその理論及び解析手法の概要を述べる。次に具体的な数値解析例により、その強不連続解析を行った結果、荷重・载荷点変位の要素分割不依存性及び仮想的に採用した不連続面の幅の不依存性の確認を行う。その後破壊力学の重要なパラメータの一つである破壊エネルギー、即ちエネルギー解放率を精度良く定量的に表しているかを検討する事によって、強不連続解析手法の妥当性の検討を行う。なお、このエネルギー解放率を求めるために、周知のJ積分^{13)~15)}と、本論文で不連続面上に結合応力領域を含む場合に適用できる事を新たに証明した経路独立なE積分を使用する。

2. 強不連続解析^{5) 6)}

2.1 不連続変位場とひずみ場⁵⁾

図-1のように変位の不連続面 φ を有する物体 Ω を考える。

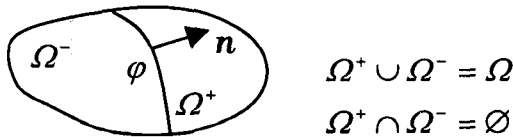


図-1 変位の不連続面 φ を有する物体 Ω

物体 Ω が不連続面 φ により領域 Ω^+ と Ω^- に分けられる。 φ は物質曲面であるとし、その単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。強不連続性を持つ変位 $\mathbf{u}$ は φ 上での Heaviside の単位関数 H_φ を用いて次式のよう表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_\varphi(\mathbf{x})[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ H_\varphi &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は物質点、 t は時刻、 $\bar{\mathbf{u}}$ は変位場の連続部分、 $[\mathbf{u}]$ は物体全体で定義される変位ジャンプ関数を表し、変位場は連続部分と不連続部分の和で表される。この時、ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、式(1)の空間微分をとって次式のようにになる。なお表記の簡略化のため引数を省略する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_\varphi([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^S \quad (3)$$

ここで、 $(\cdot)^S$ は $(\cdot)$ の対称部分、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ はひずみ場の有界な部分、 δ_φ は φ 上での Dirac のデルタ関数であり、上式のひずみ場は φ 上での非有界項を含む。

2.2 等方損傷モデル

解析で使用する線形硬化・軟化する等方損傷モデルは次式で示される。

$$\begin{aligned} \Psi &= (1-d)\Psi_0 \\ \Psi_0 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (C \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)C \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 Ψ は Helmholtz の自由エネルギー、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 d はスカラー損傷変数、 C は線形等方弾性体の構成テンソルである。そして d は、ひずみのノルム τ^ε を用いて次式によって定義される r と軟化パラメータ $H = -r_0/r_{\max}$ を用いて以下のように定義される。ここで、不連続面発生時のひずみを $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 、材料が破断し結合応力が作用しなくなる時のひずみを $\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}$ とする。(参考のため、1次元の場合の構成関係を図-2に記す。)

$$r = \max_{s \in (-\infty, t)} \{r_0, \tau_s^\varepsilon\}, \quad \tau^\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (C \boldsymbol{\varepsilon})} \quad (5)$$

$$r_0 = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot (C \boldsymbol{\varepsilon}_0)}, \quad r_{\max} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{\max} \cdot (C \boldsymbol{\varepsilon}_{\max})} \quad (6)$$

$$d = \begin{cases} 0 & r_0 > r \\ \frac{1}{1+H} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) & r_0 < r < r_{\max} \\ 1 & r > r_{\max} \end{cases} \quad (7)$$

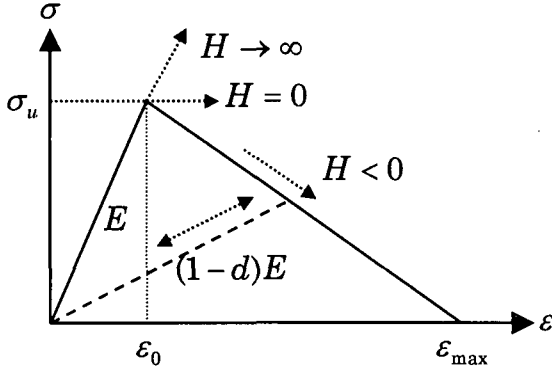


図-2 1次元の場合の構成関係

そして、非弾性負荷 ($H < 0$) による散逸 D は、式(4)、(7)により、次式のように表され、

$$\begin{aligned} D &= -\dot{\Psi} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon} = \dot{d} \Psi_0 \\ &= \frac{1}{2} (\tau^\sigma)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d}{1-d} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 τ^σ は応力のノルムであり、 τ^ε と以下のような関係がある。

$$\tau^\sigma = \sqrt{\sigma \cdot (C\sigma)} = (1-d)\tau^\varepsilon \quad (9)$$

また、式(8)の $d/(1-d)$ は、式(7)より、

$$\frac{d}{1-d} = \frac{1}{H} g(\sigma) = \frac{1}{H} \left(1 - \frac{r_0}{\tau^\sigma} \right) \quad (10)$$

となる。ここで応力の関数 $g(\sigma)$ の値は、応力が有限であるならば、有限となる。

2.3 応力の有限性

式(4)₃へ式(3)を代入すると、次式の関係が得られ、

$$\underbrace{\sigma}_{\text{bounded}} + \frac{d}{1-d} \sigma = \underbrace{C\bar{\varepsilon}}_{\text{bounded}} + \underbrace{\delta_\varphi C([u]_\varphi \otimes n)^S}_{\text{unbounded}} \quad (11)$$

応力が有限であるとする、式(11)が数学的に成立するには、 $d/(1-d)$ がデルタ関数を含まねばならない。式(10)で述べたように、 $g(\sigma)$ は有限であるため、結局 $1/H$ がデルタ関数を含まねばならず、最も簡単な関係として次式のように仮定する。

$$\frac{1}{H} = \delta_\varphi \frac{b}{\bar{H}} \quad (12)$$

ここで、 b は単位幅であり、 $\bar{H}$ は無次元数である。 $\bar{H}$ を本質的な軟化パラメータと呼ぶ。そして式(10)、(11)、(12)より、次式の関係が得られる。

$$\underbrace{[\sigma - C\bar{\varepsilon}]}_{=0 \text{ in } \Omega \setminus \varphi} = \delta_\varphi \underbrace{[C([u]_\varphi \otimes n)^S - \frac{b}{\bar{H}} g(\sigma)\sigma]}_{=0 \text{ in } \Omega \setminus \varphi} \quad (13)$$

結局、式(4)₃に応力の有限性を考慮することにより、次式で示される不連続面以外の構成式と不連続面上での応力と変位ジャンプの関係式が既存の結合力モデルのように別々に考える事なく得られることが分かる。なお以後の解析には式(4)₃の構成式が用いられる。

$$\sigma = C\bar{\varepsilon} \quad (14)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\bar{H}}{g(\sigma_\varphi)b} C([u]_\varphi \otimes n)^S \quad (15)$$

3. 有限要素定式化⁶⁾

3.1 支配方程式

図-1を参照し、以下の境界値問題を考える。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + f &= 0 & \text{in } \Omega \setminus \varphi \\ u &= u^* & \text{in } \Gamma_u \\ \sigma v &= t^* & \text{in } \Gamma_\sigma \\ \sigma^+ n &= \sigma^- n & \text{in } \varphi \\ \sigma_\varphi n &= \sigma^+ n (= \sigma^- n) & \text{in } \varphi \\ \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma &= \partial\Omega, \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 f は物体力、 u^* は変位境界 Γ_u の既知変位、 v は物体境界 $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトル、 t^* は応力境界 Γ_σ の既知表面力、 σ^+ 、 σ^- 、 σ_φ はそれぞれ、 Ω^+ 、 Ω^- 、 φ 上の応力場である。そして(16)₁はつりあい式、(16)₂は Γ_u 上の変位境界条件、(16)₃は Γ_σ 上の応力境界条件、(16)₄は弱不連続を考える時にも用いられる応力の連続条件、(16)₅は強不連続の場合に特有な応力の連続条件を表す。

3.2 弱形式化

次式の仮想仕事の原理を考える。

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \hat{\eta} d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \hat{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} t^* \cdot \hat{\eta} d\Gamma \quad (17)$$

$$\hat{\eta} = \{\hat{\eta} \in C^0 \mid \hat{\eta}|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (18)$$

ここで、 $\hat{\eta}$ は運動学的可容変位である。式(17)に発散定理を用いると、次式となることが分かる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\sigma}} (\sigma v - t^*) \cdot \hat{\eta} d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \varphi} (\operatorname{div} \sigma + f) \cdot \hat{\eta} d\Omega \\ - \int_{\varphi} n \cdot (\sigma^+ - \sigma^-) \hat{\eta} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

以上より、式(19)から弱形式化された式(16)_{1,3,4}が満たされ、残りの変位境界条件式(16)₂と強不連続条件式(16)₅を考慮すれば、式(16)の支配方程式で示される境界値問題の弱解が得られる。

3.3 不連続変位場の修正

式(1)で示される不連続変位場は、変位ジャンプ関数 $[u]$ が物体全体で定義されているため、変位境界条件を変位の連続部分 $\bar{u}$ と $[u]$ の両方に考慮しなければならない。通常の有限要素定式化には不都合である。従って変位場の不連続部分が物体のある領域にのみ作用するように変位場の修正を行う。

今、図-3のように φ を含む領域 Ω_h を考える。

その任意の境界を φ_h^- , φ_h^+ とし、また φ は Ω_h を Ω_h^- と Ω_h^+ に分離する。変位境界 Γ_u は Ω_h の外側にあると仮定する。

ここで、 Ω_h の境界 φ_h^- , φ_h^+ で次式の制限を受ける任意の連続関数 ϕ^h を定義し、 H_{φ} と ϕ^h より M_{φ}^h を定義する。

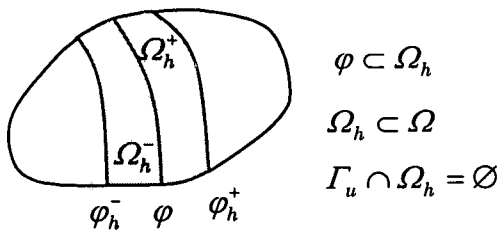


図-3 不連続面 φ を含む領域 Ω_h

$$\begin{aligned} \phi^h(x) &= 0, & \forall x \in \Omega^- \setminus \Omega_h^- \\ \phi^h(x) &= 1, & \forall x \in \Omega^+ \setminus \Omega_h^+ \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_{\varphi}^h(x) = H_{\varphi}(x) - \phi^h(x) \quad (21)$$

また、連続関数 ϕ^h により近似された不連続変位場 $\hat{u}(x, t)$ を次式のように定義し、

$$\hat{u}(x, t) = \bar{u}(x, t) + \phi^h(x)[u](x, t) \quad (22)$$

上式を式(1)から引くと、次式の不連続変位場を得る。

$$\begin{aligned} u(x, t) \\ &= \hat{u}(x, t) + (H_{\varphi}(x) - \phi^h(x))[u](x, t) \quad (23) \\ &= \hat{u}(x, t) + M_{\varphi}^h(x)[u](x, t) \end{aligned}$$

以上より、変位場は連続部分 $\hat{u}$ と領域 Ω_h を台とする不連続部分 $M_{\varphi}^h[u]$ に分解され、変位境界条件は連続部分にのみ作用させる事が出来る。

3.4 有限要素近似

三角形定ひずみ要素を用いた有限要素近似を行い、不連続面 φ を含む領域 Ω_h に着目して、式(23)の変位場を次式のように近似する。なお φ を含まない領域 $\Omega \setminus \Omega_h$ においては、通常の三角形定ひずみ要素の有限要素近似と同様である。(図-4 参照)

$$u^h(x, t) = \underbrace{N(x)a(t)}_{\hat{u}^h(x, t)} + \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{M_{\varphi_e}^h(x)\alpha_e(t)}_{[u]^h(t)} \quad (24)$$

$$M_{\varphi_e}^h(x) = H_{\varphi_e}(x) - \phi_e^h(x) \quad (25)$$

$$\phi_e^h(x) = N_{k_e}(x) \quad (26)$$

ここで、 $N(x)$ は通常の形状関数、 $a(t)$ は節点変位ベクトル、 $M_{\varphi_e}^h(x)$ は要素単位ジャンプ関数、 $\alpha_e(t)$ は要素変位ジャンプベクトル、 $H_{\varphi_e}(x)$ は要素に限定された Heaviside の単位関数、 $N_{k_e}(x)$ は孤立節点 k_e における通常の線形形状関数である。また孤立節点とは、三角形要素内を横切る不連続面 φ_e により、片側一つに孤立させられた節点である。

式(24)を空間微分することにより、次式のひずみ場を得る。

$$\varepsilon^h = \underbrace{(\nabla \hat{u}^h)^S}_{\varepsilon^h} + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_e} (\nabla M_{\varphi_e}^h \otimes \alpha_e)}_{\varepsilon^h} \quad (27)$$

$$= Ba + \sum_{e=1}^{n_e} (G_e \alpha_e)$$

$$\nabla M_{\varphi_e}^h = \begin{cases} \delta_{\varphi_e} n_e - \nabla N_{k_e} & \forall x \in \Omega_h \\ 0 & \forall x \notin \Omega_h \end{cases} \quad (28)$$

$$G_e(x) =$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta_{\varphi_e} n_x - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \delta_{\varphi_e} n_y - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial y} \end{bmatrix} & \forall x \in \Omega_h \\ \begin{bmatrix} \delta_{\varphi_e} n_y - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial y} & \delta_{\varphi_e} n_x - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \forall x \notin \Omega_h \end{cases} \quad (29)$$

ここで、対称なひずみテンソルや応力テンソルは、通常の工学的手法と同様にベクトル化されたひずみベクトル $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$ や応力ベクトル $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$ として扱われている。また φ_e の単位法線ベクトルを $n_e = \{n_x, n_y\}^T$ としている。

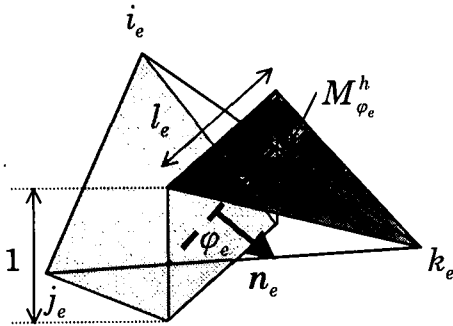


図-4 不連続面の有限要素近似

以上より、離散化された変位場とひずみ場と式(17)を用いて、通常的手法と同様に、以下の離散化されたつりあい式が得られる。

$$\int_{\Omega} B^T \sigma^h d\Omega = f_{ext} \quad (30)$$

$$f_{ext} = \int_{\Omega} N^T f d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} N^T t^* d\Gamma \quad (31)$$

また 3.2 節で述べたように、このつりあい式とは別に、不連続面上の表面力のつりあいを表す強不連続の場合の応力の連続条件を考慮する。この応力ベクトルに対する連続条件(16)₅ は次式のように示される。

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^T \mathcal{N} &= \sigma^{+T} \mathcal{N} (= \sigma^{-T} \mathcal{N}) \\ &= \sigma_{\Omega \setminus \varphi}^T \mathcal{N} \quad \text{in } \varphi \end{aligned} \quad (32)$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (33)$$

今、次式で示されるマトリックスと連立方程式を定義し、

$$G_e^* = \begin{cases} (\delta_{\varphi_e} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \mathcal{N} & x \in \Omega_h \\ 0 & x \notin \Omega_h \end{cases} \quad (34)$$

$$\int_{\Omega_e} G_e^{*T} \sigma^h d\Omega_e = 0 \quad (35)$$

式(34)を式(35)へ代入すると、面積平均された不連続面上での表面力のつりあいを得られる。

$$\frac{1}{l_e} \int_{\varphi_e} \sigma^h{}^T \mathcal{N} d\Gamma_e = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e \setminus \varphi_e} \sigma^h{}^T \mathcal{N} d\Omega_e \quad (36)$$

ただし、三角形定ひずみ要素の場合、上式は各要素の不連続面上で、通常表面力のつりあい式となる。

従って、式(35)が強不連続の場合の応力連続条件となり、式(30)のつりあい式と連立すれば 3.1 節の境界値問題の解が得られる。

以上より、不連続面を有する要素の支配方程式は、増分型で示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} B_e^T \dot{\sigma}^h d\Omega &= \dot{f}_{ext e} \\ \int_{\Omega_e} G_e^{*T} \dot{\sigma}^h d\Omega_e &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 $\dot{\sigma}^h$ は式(4)₃の構成式を時間微分したものであり、以下に示される。

$$\dot{\sigma}^h = C^{lg} \dot{\varepsilon}^h \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \dot{d} &= 0 \quad (\text{unloading}) \\ C^{lg} &= (1-d)C \\ \dot{d} &\neq 0 \quad (\text{loading}) \\ C^{lg} &= (1-d)\left\{C - \frac{1}{1+H} \frac{\tau_0}{(\tau^\sigma)^3} \sigma \otimes \sigma\right\} \end{aligned} \quad (39)$$

結局、式(27)、(37)、(38)より要素接線剛性式が次のように得られる。

$$[K_e] \begin{Bmatrix} \dot{u}_e \\ \dot{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{f}_{ext_e} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

$$K_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} B_e^T C^{lg} B_e & B_e^T C^{lg} G_e \\ G_e^{*T} C^{lg} B_e & G_e^{*T} C^{lg} G_e \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (41)$$

3.5 デルタ関数の近似と積分規則

式(41)の要素接線剛性マトリックスに用いられる式(29)の G_e と式(34)の G_e^* はデルタ関数を含んでおり、数値解析で直接扱うことは困難であるため、デルタ関数の近似を行う。要素内を横切る不連続面 φ_e を含む十分小さな幅 k の帯 Ω_e^k を考え、不連続面で非有界なデルタ関数を以下のように近似する。

$$\delta_{\varphi_e}^k(x) = \begin{cases} 1/k & x \in \Omega_e^k \\ 0 & x \notin \Omega_e^k \end{cases} \quad (42)$$

即ち、 φ_e は十分小さな幅 k の帯 Ω_e^k で近似され、デルタ関数は k の逆数で近似される。

また式(41)の面積積分は、通常の三角形定はずみ要素と異なり、被積分項が要素内一定ではなく、 Ω_e^k とそれ以外の部分で C^{lg} 、 G_e 、 G_e^* の値が異なるので、それぞれの領域で積分点を設け、表-1のようにそれぞれの面積で重みづけした区分的な面積積分を行う。

表-1 積分規則

積分点	領域	重み
1	$\Omega_e \setminus \Omega_e^k$	$\Omega_e - kl_e$
2	Ω_e^k	kl_e

4. 経路独立積分

4.1 J積分

J積分とは、Rice¹⁴⁾、Eshelby¹³⁾等によって提案されたエネルギー解放率を求める経路独立な積分公式であり、その説明を以下に簡単に示す。

図-5のように均質な2次元非線形超弾性体内に x 軸に沿う直進き裂がある場合を考え、 x の $b(t)$ から $a(t)$ の間まで応力がゼロでなく、 $b(t)$ より左側は、応力がゼロとなっているとして、この時以後 $b(t)$ をき裂先端、 $b(t)$ から $a(t)$ を結合応力領域と呼ぶ。き裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A 、その境界を Γ とすると、J積分は次式で定義される。

$$J \equiv \int_{\Gamma} (w dy - \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds) \quad (43)$$

なおJ積分がエネルギー解放率と等しくなるのはき裂が直進する即ち x 軸の正方向へのみ進展する事に注意したい。ここで、 w 、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{u}$ はそれぞれひずみエネルギー密度、 Γ 上の表面力、変位である。

J積分値は、領域 A が直線き裂先端 $b(t)$ から結合応力領域先端 $a(t)$ までを含む限り、積分経路 Γ に依存しない経路独立な積分である。

また図-5に示すようにき裂先端近傍にある結合応力領域を常に含みつつ、結合応力領域に密接するように Γ を縮小しそれを Γ' とすると、 $dy \rightarrow 0$ より、式(43)は次式となる。

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds = - \int_{\Gamma'} \sigma \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \\ &= - \int_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta(b,t)} \sigma(\delta) d\delta \right\} dx \\ &= \int_0^{\delta(b,t)} \sigma(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 σ と δ はそれぞれ結合応力領域の応力と開口変位であり、Jの値は図-6の曲線下の面積に等しい。また、この面積はOliverが論文中で一樣変形場を仮定して求めている下記の破壊エネルギーに等しいことは自明である。

$$G_f = - \frac{b r_0^2}{2H} \quad (45)$$

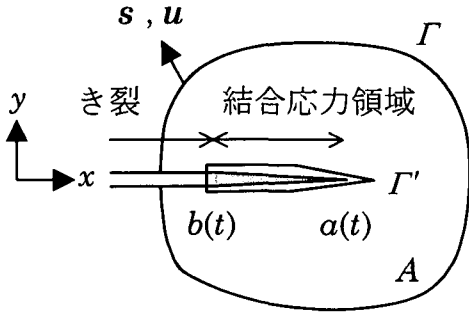


図-5 き裂と結合応力領域

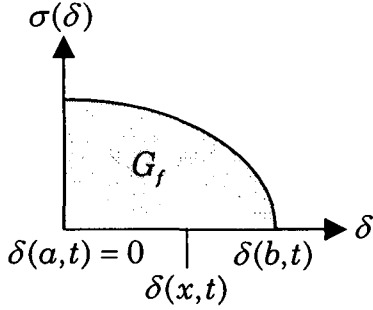


図-6 結合応力と開口変位の関係

4.2 E積分

図-5のように2次元非線形超弾性体内において、結合応力が作用し、準静的に進展する不連続面を考える。結合応力領域での応力 σ と開口変位 δ の関係は図-6に示される。また不連続面先端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A 、 A の境界を Γ とし、 Γ 上の表面力、変位をそれぞれ $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{u}$ とする。

結合応力領域が存在する場合、き裂が単位長さ進展するために消費されるエネルギー、即ちエネルギー解放率を求めるE積分値 E は力学的エネルギー保存則より次式のように定義される。

$$E\dot{b}(t) \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\mathbf{s} - \left\{ \frac{d}{dt} \int_A W d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_b^a w d\mathbf{x} \right\} \quad (46)$$

ここで、ひずみエネルギー W と結合応力領域での仕事 w は次式で与えられる。

$$W(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \sigma \cdot \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (47)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \sigma \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (48)$$

従って、き裂が進展せず $\dot{b}(t) = 0$ であるなら、式

(46)右辺は、物体力がない場合の準静的なつりあい式 $\text{div } \sigma = \mathbf{0}$ と発散定理により、次式が成立し、

$$\int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\mathbf{s} - \int_b^a \sigma \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_A W d\mathbf{a} \quad (49)$$

従って、式(46)の右辺はゼロとなる。

また、結合応力領域での応力 σ は開口変位 δ の関数であるので、 w は次式のように表せる。

$$w(\mathbf{x}, t) = w(\delta(\mathbf{x}, t)) = \int_0^{\delta(\mathbf{x}, t)} \sigma(\delta) d\delta \quad (50)$$

ここで、

$$w(\mathbf{a}, t) = 0 \quad \because \delta(\mathbf{a}, t) = 0 \quad (51)$$

であるので、式(48)より、次式が得られる。

$$\int_b^a \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_b^a \sigma \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} \quad (52)$$

式(49)、(51)、(52)を式(46)へ代入すると、

$$E\dot{b} = w(\mathbf{b}, t)\dot{b} = \left(\int_0^{\delta(\mathbf{b}, t)} \sigma(\delta) d\delta \right) \dot{b} = G_f \dot{b} \quad (53)$$

$$\therefore E = G_f \quad (54)$$

となり、E積分値 E も図-6の曲線で囲まれた面積である破壊エネルギー G_f と一致する。

次に、荷重パラメータ β とき裂長パラメータ b を考える¹⁶⁾。 β ($0 \leq \beta \leq \alpha$)は物体境界上に与えられた外荷重の载荷履歴を特定するパラメータであり、 b はき裂の長さを意味するパラメータである。 β と b はそれぞれ独立であるので、式(46)、(47)、(48)は次式のように表せる。

$$E = \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\beta, b)}{\partial b} d\mathbf{s} - \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \int_A W(\alpha, b) d\mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial b} \int_b^a w(\alpha, b) d\mathbf{x} \right\} \quad (55)$$

$$W(\alpha, b) = \int_0^a \sigma(\beta, b) \cdot \frac{\partial \varepsilon(\beta, b)}{\partial \beta} d\beta \quad (56)$$

$$w(\alpha, b) = \int_0^a \sigma(\beta, b) \frac{\partial \delta(\beta, b)}{\partial \beta} d\beta \quad (57)$$

ここで、上式の各物理量は空間座標 ($\mathbf{x}$, 又は x) を従属変数に含むが、表記の簡略化のため省略している。式(56), (57)より、式(55)の $\{\cdot\}$ 内は、発散定理を用いて、次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b} \int_A W(\alpha, b) da + \frac{\partial}{\partial b} \int_b^a w(\alpha, b) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial b} \int_r \left\{ \int_0^a \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\beta, b)}{\partial \beta} d\beta \right\} ds \\ &= \int_r \left\{ \int_0^a \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\beta, b)}{\partial \beta} + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^2(\beta, b)}{\partial \beta \partial b} \right) d\beta \right\} ds \end{aligned} \quad (58)$$

また、式(55)の右辺第1項は、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_r \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\beta, b)}{\partial b} ds \\ &= \int_r \left\{ \int_0^a \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\beta, b)}{\partial b} + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^2(\beta, b)}{\partial \beta \partial b} \right) d\beta \right\} ds \end{aligned} \quad (59)$$

式(58), (59)を式(55)へ代入すると、結局次式が得られる。

$$E = \int_r \left\{ \int_0^a \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta \right\} ds \quad (60)$$

上式がき裂先端に結合応力領域を有するき裂進展時のエネルギー解放率を求めるE積分の積分公式である。最終的には結合応力領域が存在しない場合¹⁶⁾と全く同じ式となった。このE積分公式によると、その値がエネルギー解放率に等しくなるのは、J積分と異なり、直進の場合に限られることなく、任意方向への折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率をも経路不変積分で求まることを付記したい。

上式を数値解析で用いるために、き裂長さ b による偏微分は2点差分近似し、 β に関する積分は台形公式を用い、経路積分は表面力と変位をそれぞれ

離散化した等価節点表面力 $\mathbf{s}_i$ と節点変位 $\mathbf{u}_i$ を積分形路上の全節点で和をとることにより、次式を得る。

$$E = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \beta}{\Delta b} (A - B) \quad (61)$$

$$A = \frac{\hat{\mathbf{s}}_i^j - \hat{\mathbf{s}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \cdot \frac{\{\tilde{\mathbf{u}}_i^j + \tilde{\mathbf{u}}_i^{j-1}\} - \{\hat{\mathbf{u}}_i^j + \hat{\mathbf{u}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \quad (62)$$

$$B = \frac{\{\tilde{\mathbf{s}}_i^j + \tilde{\mathbf{s}}_i^{j-1}\} - \{\hat{\mathbf{s}}_i^j + \hat{\mathbf{s}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \cdot \frac{\hat{\mathbf{u}}_i^j - \hat{\mathbf{u}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \quad (63)$$

ここで、 n は積分形路上の節点の数、 α は全荷重ステップ数、 $\Delta \beta$ は荷重増分量、 Δb はき裂長さ b の基本モデルとき裂長さ $b + \Delta b$ のき裂進展モデルのき裂長さの差であり、 $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ と $\tilde{\mathbf{s}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ はそれぞれ基本モデルとき裂進展モデルの表面力及び変位を意味する。

5. 数値解析

まず、既往の研究報告で述べられている物体全体の挙動を示す荷重-載荷点変位の要素分割不依存性と、不連続面の幅の不依存性を確認する。次に本不連続面モデルが、破壊エネルギーを精度良く表しているかを検討することによって、強不連続解析手法の妥当性の検証を行う。境界値問題として、図-7に示す正方形の引裂きを考える。 $L=10[\text{cm}]$ とし、集中荷重による応力集中を緩和するため、載荷点は左端上下に4点で与える。

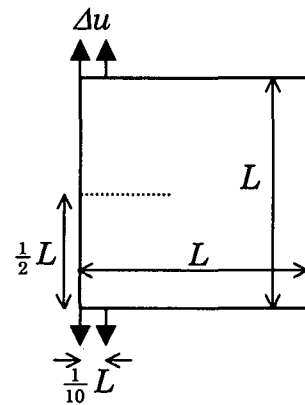


図-7 正方形の引裂き

解析は平面ひずみを仮定し、材料定数としてヤング率 $E=29.4[\text{GPa}]$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、式(45)の破壊エネルギー $G=19.6[\text{N/m}]$ を使用し、解析上のパラメータとして不連続面の幅 k を $1.0 \times 10^{-6}[\text{cm}]$ 、軟化パラメータ H を -7.5×10^{-7} とする。また式(7)にあ

るように、過去最大のひずみのノルムである r が $r_0 = 17.15[\text{Pa}^{1/2}]$ となるときの各要素に不連続面が生じるものとし、 r が $r_{\text{max}} = -r_0/H = 22.97 \times 10^6 [\text{Pa}^{1/2}]$ となるときの材料が破断し結合応力がゼロになるものとする。ただし今回は、J 積分でのエネルギー解放率の評価を行うため、不連続面の進展は直進のみに限定する。

非線形の軟化曲線を捉えるため、载荷点に強制節点変位を与える増分型有限要素解析に対し、変位制御型 Newton-Raphson 法による収束計算を行う。

5.1 要素分割依存性の検討

上述の境界値問題に対し、要素分割依存性の検討のため、3 つの要素分割を行い、それらを図 - 8 に示す。要素分割 1 と 2 は同程度の節点数と要素数であり、規則的な分割と不規則的な分割の違いがある。要素分割 3 は、不連続面の進展する位置を細かく分割したことが要素分割 1 や 2 と異なる。

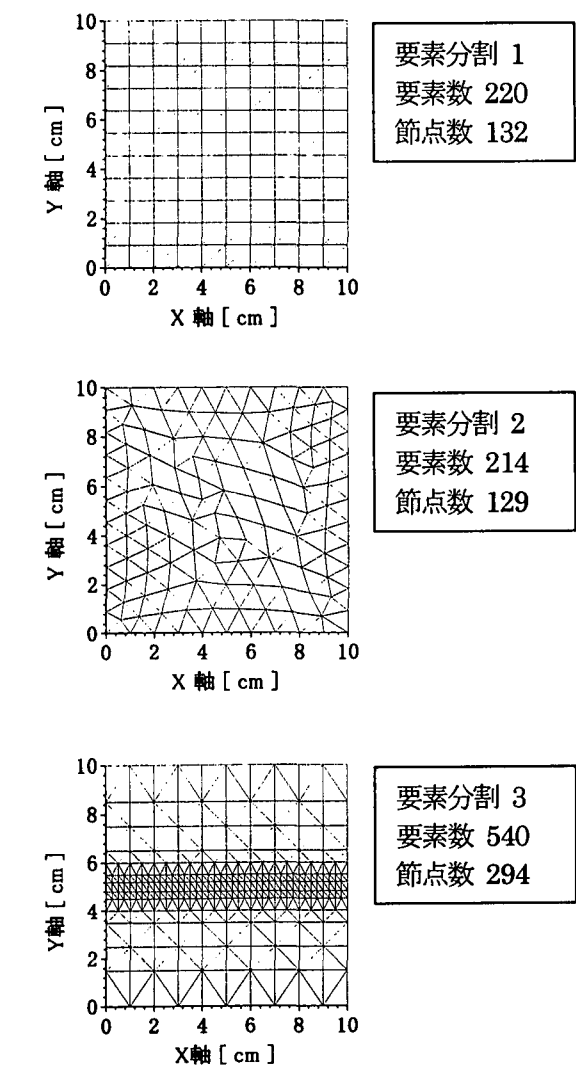


図-8 要素分割

図 - 9 は荷重 - 载荷点変位曲線である。最も細かい要素分割 3 が最も滑らかな曲線を与えるが、各要素分割においてピーク荷重やその後の軟化挙動が良く一致していることが分かる。従って、物体全体の挙動を表す荷重 - 载荷点変位が要素の大きさ, 形状, 配置に依存しない結果が得られたことが分かる。

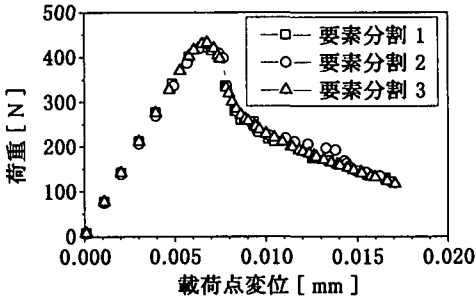


図-9 要素分割の比較

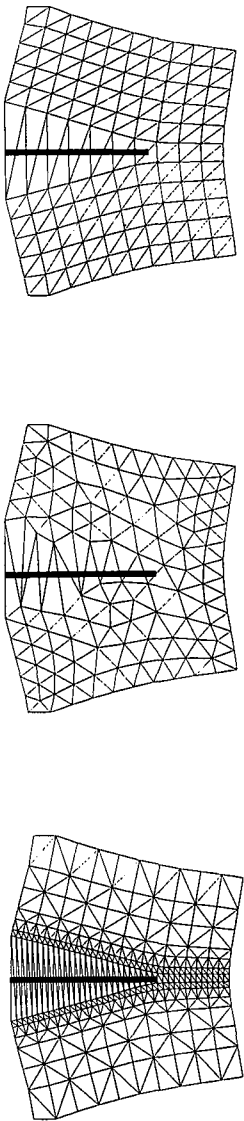


図-10 最終状態における変形と不連続面

図 - 10 は各要素分割における最終状態の変形図であり、微小な変形を見易くするため、変位を 1000 倍に拡大して図示している。また図中の太い実線は最終状態での不連続面の進展状況を表している。各要素分割において同様の変形が生じており、不連続面が進展する要素において変形が局所的であることやそれ以外の部分では殆ど変形していないことが分かる。また各要素分割において最終状態での不連続面の長さがほぼ一致していることも分かる。

5.2 不連続面の幅の依存性検討

前述の境界値問題に対し要素分割 1 を用いて解析を行う。ここで不連続面の幅 k を 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} [cm] と変化させ、不連続面の幅の依存性を比較検討する。その結果、荷重 - 載荷点変位が図 - 11 のように得られた。図 - 11 より明らかであるが、ピーク荷重、またその後の軟化挙動や最終状態などは各不連続面の幅で一致している。以上より、物体全体の挙動を示す荷重 - 載荷点変位が不連続面の幅に依存しない結果が得られたと言える。

この k は、デルタ関数を近似するために導入された単なる数値解析上のパラメータであり、マイクロポーラーなどの一般連続体で使用される物質の特性長とは本質的に異なるものである事に注意したい。

以後の解析においては、これらの k の中でデルタ関数を最も良く近似できる $k = 10^{-5}$ を採用する。

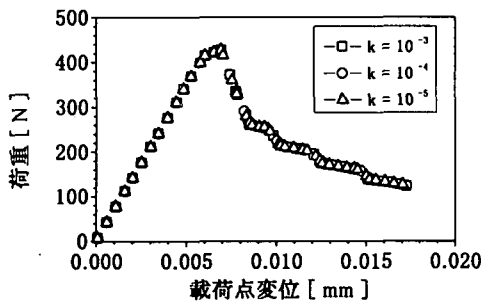


図-11 不連続面の幅の比較

5.3 解析手法の精度検討

5.1 節と 5.2 節より、既往の研究報告と同様の結果が確認でき、本論文の数値解析が理論を的確に再現していることが確かめられた。

また、この解析手法のように、コンクリートや岩盤などのき裂、金属のリューダスバンド、そして地盤のせん断帯やすべり線など工学上極めて有意義な実問題へ適用することを目的とし、要素内部に不連続面を組込む手法はいくつか提案されているが、1次元の場合の解析を除き、その手法の精度を検討し

ている研究報告は筆者の知る限り見当たらない。

以上より、本論文の主題であるエネルギー解放率の精度検証により、不連続面解析手法の妥当性の検証を行う。その方法として、数値解析の入力値である破壊エネルギー G_f が、エネルギー解放率を求めるための経路独立積分である J 積分と E 積分によって精度良く求まるかによって解析手法の精度検証を行う。

ここで、E 積分によりエネルギー解放率を求めるには、き裂長さ b の基本モデルとき裂長さが微小量 Δb 異なるき裂長さ $b + \Delta b$ のき裂進展モデルの 2 つのモデルに対し、最終荷重状態に達するまでの仕事の差 (仕事変化率) を求める。従って本論文においては、供試体に予め挿入される初期き裂が供試体左端中央から要素 32 個を横切るき裂長さ 4 [cm] の基本モデルと要素 33 個を横切るき裂長さ 4.125 [cm] のき裂進展モデル用いて解析を行った。初期き裂は、要素内を横切る不連続面に予め結合応力が作用しない状態 (損傷変数 $d=1$ の状態) を設定することにより表現している。

前述と同様の境界値問題を考え、要素分割は荷重 - 載荷点変位曲線が最も滑らかに得られた要素分割 3 を用いる。J 積分と E 積分で使用する計 4 本の積分経路は図 - 12 に示され、供試体の外側から内側に向かって経路 1~4 とした。

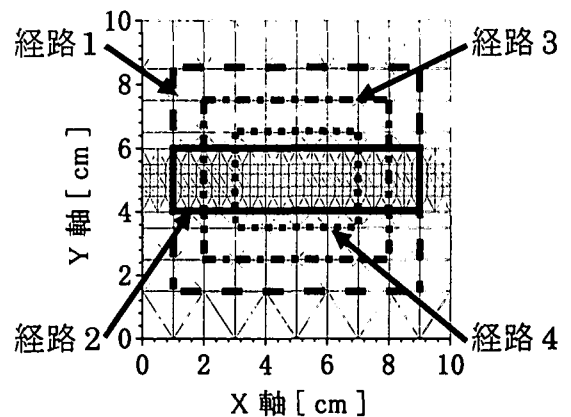


図-12 積分経路

図 - 13 は各モデルの荷重 - 載荷点変位曲線を示しており、ここで初期き裂無しとは 5.1 節の解析と同じものである。初期き裂を有する基本モデルやき裂進展モデルが低い耐荷力を示しながら、初期き裂無しの曲線に漸近していく傾向が見られる。基本モデルとき裂進展モデルが初期き裂無しと初めて一致する状態、即ち載荷点変位が約 0.0152 [mm] の状態において E 積分値と J 積分値の比較を行う。またそれぞれのモデルに同じ載荷点変位を与えると、最終状態での荷重は一致しており、そして変形や不連続面の進展状況も同じであった。

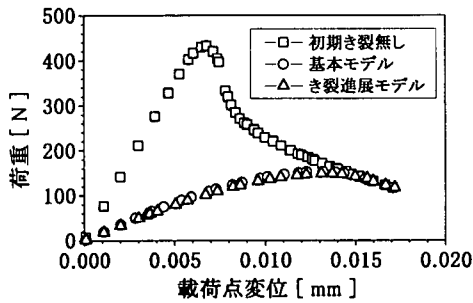


図-13 各モデルの比較

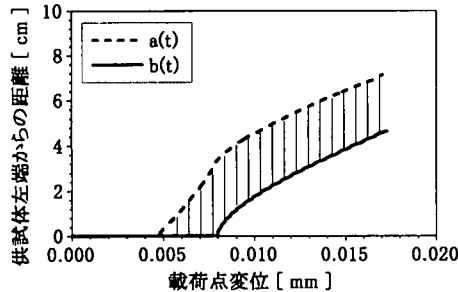


図-14 不連続面の進展状況

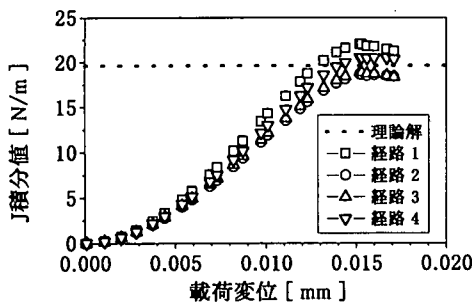


図-15 J 積分値と荷点変位の関係

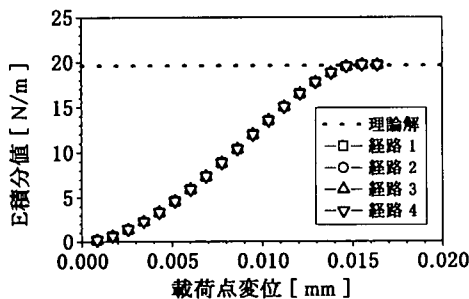


図-16 E 積分値と荷点変位の関係

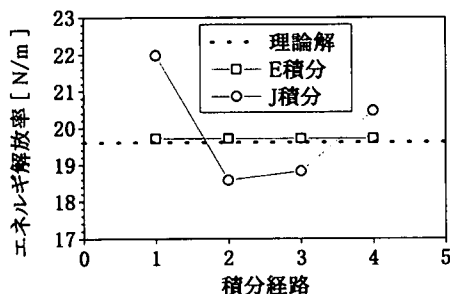


図-17 J 積分値と E 積分値の比較

図-14は、初期き裂無しモデルにおける不連続面の進展状況を示している。4.1節で述べられているように図中の点線 $a(t)$ と実線 $b(t)$ はそれぞれ結合応力領域先端とき裂先端を意味しており、点線と実線の間の縦線が結合応力領域の長さとなる。荷点変位の増加に伴い先に結合応力領域先端が進展を開始し、その後を追ってき裂先端が進展していることが分かる。また結合応力領域は、ほぼ一定の長さを保ちながら進展していることも分かる。

図-15と図-16は、き裂長さ4[cm]の初期き裂を有する供試体において、荷点変位の増加に伴う各積分経路のJ積分値とE積分値の変化を示している。両図より、荷点変位が前述の約0.0152[mm]に近づくにつれ、理論解(数値解析で入力された破壊エネルギー G_f)に漸近し、以後一定の値を保っていることが分かる。これは、各経路の左端がき裂を横切り、その経路が結合応力領域全体を囲むとき、J積分値とE積分値が破壊エネルギーに理論的に一致するためである。荷点変位の増加に伴い、J積分値には、ばらつきが見られるのに対し、E積分値は精度良く経路独立性を保っていることが分かる。また、E積分値の方がJ積分値に比べて理論解に良く一致していることも分かる。

以上のJ積分値とE積分値の精度並びに経路依存性を詳細に検討するため、荷点変位が約0.0152[mm]の状態におけるJ積分値とE積分値の比較を行い、図-17に示す。この図より、E積分値の経路独立性が十分に確認出来る。またE積分値と与えられた破壊エネルギー G_f の相対誤差は約0.5%と小さく、非常に精度良く破壊エネルギー即ちエネルギー解放率が求められている。このことから要素内に変位不連続面を持つ不連続面解析は非常に精度の良いものである事が分かる。またE積分値に経路独立性がある事はその経路内の力のつりあい条件が満たされていることも示す。一方J積分値は誤差が大きく、経路独立性が失われている。この理由は、J積分公式(43)には、ひずみエネルギーの項が含まれ、経路上の応力ないしひずみを計算する必要がある。従って、要素辺に積分経路を設定した場合には、応力、ひずみを計算するのに何らかの面積補正のようなものが必要になり、結局J積分値の精度が落ちてしまう。一方E積分の方は、式(60)から分かるように、精度の良い節点変位と節点力のみでエネルギー解放率が計算出来るので、非常に精度の良いエネルギー解放率が得られることになる。また要素内に経路を設定してもその応力、ひずみの精度が良くないことから当然J積分の精度は良くならない。著者らは、この事が、強不連続解析のみならず仮想ひび割れモデルの解析精度の検証にJ積分法を上手く用いることが出来なかった要因と考える。

6. 結論

本論文では, Simo や Oliver らによって提案された変位の不連続面を要素内部に組込んだ強不連続有限要素解析を例に取り, まず既往の研究報告の確認をし, そして J 積分, E 積分の経路独立積分を用いたエネルギー解放率精度検証の観点から, 不連続面解析手法の精度検討を行い, 以下の知見を得た.

1. 物体全体の挙動を示す荷重 - 載荷点変位の要素分割不依存性が確認できた.
2. 物体全体の挙動を示す荷重 - 載荷点変位が解析上のパラメータである不連続面の幅 k に依存しないことが確認できた.
3. 本論文で不連続面中に結合応力領域がある場合に適用可能な新しく導いた E 積分の方が, 周知の J 積分に比べ精度並びに経路独立性に関して優れていることが分かった.
4. E 積分値の結果より, エネルギー解放率及び力のつりあいの意味において, 強不連続面による有限要素解析手法の精度が非常に良いことが分かった. この場合, 周知の J 積分法では上記解析手法の精度検証には不適當であることが分かった.

E 積分法によれば, 折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率も経路独立積分で求めることが出来るので, 今後, E 積分法は不連続面の折れ曲がり解析の破壊規準や解析精度の検証にも有効であり, その今後の応用が期待される.

参考文献

- 1) Hillerborg, A. : Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete, in Sih, G. C. and Tomaso, A. Di., (eds.), Fracture mechanics of concrete : Structural Application and numerical calculation, pp.141-170, 1985.
- 2) Bazant, Z. P. and Oh, B. H. : Crack band theory for fracture of concrete, Material and Structures, Vol. 16, No. 93, pp.155-177, 1983.
- 3) 例えば Tomita, Y. : Simulations of plastic instabilities in solid mechanics, Applied Mechanics Review, Vol.47, No.6, Part1, pp.171-205,1994.
- 4) Simo, J. C. and Rifai, S. : A class of mixed assumed strain method and the method of incompatible mode, Int. J. Numer. Methods Eng.,

Vol. 29, pp.1595-1638, 1990.

- 5) Simo, J. C., Oliver, J. and Armero, F. : An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, Comput. Mech., Vol. 12, pp.277-296, 1993.
- 6) Oliver, J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1 : fundamentals and part 2 : numerical simulation, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 39, pp.3575-3600 and pp.3601-3623, 1996.
- 7) Larsson, R. and Runesson, K. : Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization, Int. J. Numer. Methods Eng., 36, pp.2087-2105, 1993.
- 8) Belytschko, T., Fish, J. and Engelmann, E. : A finite element with embedded localization zone, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 70, pp.59-89, 1988.
- 9) Sluys, L. J. and Berends, A. H. : Discontinuous failure analysis for mode-I and mode-II localization problems, Int. J. Solid. Struc., Vol. 35, pp.4257-4274, 1998.
- 10) Lotfi, H. R. and Shing, P. B. : Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite element, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 38, pp.1307-1325, 1990.
- 11) Affuddin, M., Wu, Z. and Machida, A. : Special finite element with displacement discontinuity across internal interface, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 16, No. 2, pp.123-128,1994.
- 12) 呉智深, 町田篤彦, 高東劭 : 一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, 土木学会論文集, No. 598/I-44, 149-159, 1998.
- 13) Eshelby, J. D. : The continuum theory of lattice defect, vol. III, pp.79-144, Academic press, New york, 1956.
- 14) Rice, J. R. : A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol.35, pp.376-386, 1968.
- 15) Rice, J. R. : Fracture, Vol. II, Academic Press, pp.233-235,1968.
- 16) Yatom, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solid. Structure, Vol. 19, pp.183-187,1983.

(2000年4月21日受付)