

土質材料における降伏曲線形状と変形挙動の関連

Correlation between Shape of Yield Curve and Deforming Behaviour in Soil

守 時 一*・及 川 洋**

Hitoshi MORITOKI and Hiroshi OIKAWA

*非会員 工博 秋田大学名誉教授 自宅 (〒010-0964 秋田市八橋鯉沼町 4-7)

**正会員 工博 秋田大学教授 土木環境工学科 (〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)

Soil has the characteristics of volume change accompanying with plastic deformation, differing from metal. Hence, the equivalent deviatoric stress q at yielding depends on pressure p . The dependency of q on p is referred to as yield curve or yield function. In soil mechanics Cam-clay model and cap model have been frequently used as yield curve. However, it does not seem to have been examined whether the shapes of these yield curves are consistent with the soil behaviour observed experimentally. So far several experiments have been carried out in compressing a parallel piped specimen under plane strain condition for obtaining the information on the onset of shear banding. For predicting yield curve by referring to their results, the following assumptions are set up. Yield curves expand similarly in shape with plastic deformation and yield function plays as plastic potential. Yield curve prediction needs two kinds of physical values measured in tri-axial compression tests, for example axial stress, volumetric strain and so on. Under a certain condition the yield curves predicted have the similar shape to that in Cam-clay model. In these procedures modified hardening characteristics were used, and it was found that the characteristics also are very similar to that in Cam-clay model.

Key Words : yield curve, hardening characteristics, prediction of basic yield curve, laboratory test

1. 緒 言

土質材料は塑性変形の過程で体積変化を示す点に大きな特徴がある。圧縮応力場で変形初期に圧縮特性を示していた土質材料は静水圧応力に比して相当偏差応力が増大するにつれて膨張特性を示すようになることが知られている。この膨張特性を示す過程に対して土質力学ではひずみ軟化の概念が組み込まれてきた。そこでは土質材料の硬化特性は三軸圧縮試験により調べられ、硬化率が体積ひずみ速度にのみ依存する形で表現された。このため、体積が膨張する過程では軟化の概念を理論構造上導入せざるを得なかった。体積ひずみ速度が圧縮から膨張に遷移する過程で塑性係数 h が零となる状態に遭遇し、この膨張過程がある程度進行した段階で安定変形の限界を迎える。この安定限界と $h=0$ との対応が、これまで土質力学では曖昧なまま理論展開がなされてきた。

変形状態が安定から不安定へと遷移する現象を塑性不安定と呼んでいる。土質塑性では平面ひずみ圧縮変形などで現れるせん断帯の発生がこれにあたる。これらは唯一な

変形が数理的に保証されなくなり、多価解の存在が許容できる状態にあるので、塑性不安定は解の多価性と深く関わっている現象である。筆者らの一人は解の一意性崩壊に準拠して、塑性係数 $h=0$ が塑性不安定と対応していることを示した¹⁾。このような理論展開の下では、ひずみ軟化の過程は非常に不透明で随所で矛盾が現れ、さらに、塑性負荷規準の概念とも抵触し、理論体系そのものの修正が必要となった²⁾。さらに、修正された理論体系に準拠して考察を進め、限界状態において満足しなければならない条件が提示された³⁾。この条件は、 $h=0$ に加えて、限界における応力状態に制約を課し、これらは降伏条件とも密接に関連していた。

土質材料では、弾性変形から塑性変形へと移行する相当偏差応力は静水圧応力に依存する。これらの間の関係を降伏曲線と呼ぶことにする。土質力学ではこの降伏曲線表示にこれまでカムクレイモデル⁴⁾とキャップモデル⁵⁾で代表される2種類のモデルが適用されてきた。これらの内、後者よりも前者の方がどちらかと言うと適用例が多いようである。しかしながら、これまでこれらのモデルが土質

材料の変形特性を忠実に表現しているか否かについての検討はほとんどなされていないようである。このような状況の下ではこれらモデルの優劣を的確に判断することはできなく、解析的研究においてモデルの選択が気紛れになされてきた感を禁じ得ない。土質材料の変形特性を調査するには綿密な実験遂行とこれに伴う周到な配慮が必要であり、高精度で信頼度の高い結果を得ることは容易ではないが、近年これらの結果が報告されるようになってきた^{6),7),8)}。そこで、本論文では、実験的に観察された変形挙動と降伏曲線形状との関連を調べ、降伏曲線が本来どのような形であるべきかについて検討する。さらに、土質材料の硬化特性の、変形に伴う推移を考察する。これらは限界状態考察への基礎資料となるものである。

2. 基礎関係式

2. 1 構成関係式

応力、ひずみ成分はそれぞれ引張り、伸びを正值にとる。静水圧応力と圧縮体積ひずみ速度は

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad \dot{\epsilon}_p = -\dot{\epsilon}_{kk} \quad (1)$$

である。偏差応力と偏差ひずみ速度は

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_p\delta_{ij} \quad (2)$$

である。相当偏差応力と相当偏差ひずみ速度は

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_q = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\epsilon}'_{ij}\dot{\epsilon}'_{ij}} \quad (3)$$

で定義される。土質材料は圧力依存性を示す点に特徴があり、いま、 p, q の依存関係を降伏関数あるいは降伏曲線と呼び、

$$f(p, q, p_y) = 0 \quad (4)$$

で表す。ここで、 p_y は、土質材料の塑性変形に伴う硬化の状態を表す変数であり、硬化変数と呼ぶことにする。対象とする土質材料は、特別な場合を除き、剛塑性体であり、等方性を維持しているものと仮定する。ここでは、概念の構築を優先させ、簡潔なミーゼス降伏条件に準拠して q を式 (3-1) により偏差応力の2次の不変量 J_2 と関連させているが、これに偏差応力の3次の不変量 J_3 を組み込むことは可能である¹⁾。降伏関数 f を時間微分すると

$$\dot{f} = N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} + M_y\dot{p}_y = 0 \quad (5)$$

の関係にある。ここで、

$$N_{ij} \equiv f_p \frac{\partial p}{\partial \sigma'_{ij}} + f_q \frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad M_y \equiv \frac{\partial f}{\partial p_y} \quad (6)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{kj} - \sigma_{kj}\omega_{ki}$$

であり、

$$f_p \equiv \frac{\partial f}{\partial p}, \quad f_q \equiv \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{ji,i} - v_{ji,i}) \quad (7)$$

と置いている。 $\dot{\sigma}'_{ij}$ は Jaumann の応力速度であり、 v_i は変

位速度成分を表す。降伏関数 f を塑性ポテンシャルとすると、構成式は $\dot{\epsilon}$ を比例係数として

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\Lambda} N_{ij} \quad (8)$$

で表される。式 (1-1), (3-1) より

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma'_{ij}} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2q}\sigma'_{ij} \quad (9)$$

であるので、式 (6-1) は

$$N_{ij} = -\frac{1}{3}f_p\delta_{ij} + \frac{3}{2q}f_q\sigma'_{ij} \quad (10)$$

と表される。式 (10) より

$$f_p = -N_{kk}, \quad f_q = Q \quad (11)$$

となる。ここで、

$$Q \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{N_{rs}N_{rs} - \frac{1}{3}N_{rr}N_{ss}} \quad (12)$$

と置いている。これらを用いて

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\Lambda} f_p, \quad \dot{\epsilon}_q = \dot{\Lambda} f_q \quad (13)$$

と表すことができる。式 (5) の表現を変え

$$\dot{f} = \dot{\sigma}'_f - \dot{\Lambda} h = 0 \quad (14)$$

と表す。 $\dot{\sigma}'_f$ を全相当応力速度、 h を塑性係数と呼ぶ。ここで

$$\dot{\sigma}'_f \equiv N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}, \quad M_y\dot{p}_y \equiv -\dot{\Lambda} h \quad (15)$$

の関係にある。

2. 2 変形硬化の修正

塑性変形が三軸圧縮に近い状態で付与されると、硬化変数 p_y は増大する。これに伴い、通常は降伏曲線の膨張が想定されている。これに対して、これまでの土質力学では、限界曲線は硬化変数に関係なく形状は固定されている。これらを図-1に示す。ここでは、モール・クーロンの限界線を示し、その傾き角を ϕ_c としている。一般に、限界曲線は膨張する降伏曲線の包絡線を形成していなければならない⁹⁾。しかし、カムクレイモデルを用いた解析では、このことの認識はない。降伏曲線上にあった状態点は塑性不安定の発生時には限界曲線上に位置していなければならない。もし、限界曲線が降伏曲線の包絡線でなければ、安定変形から不安定変形への遷移の段階で降伏曲線の法線方向が不連続に変化し、降伏関数 f を塑性ポテンシャル

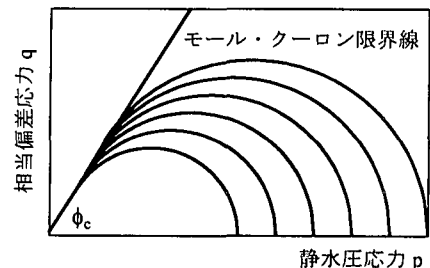


図-1 モール・クーロン限界線とキャップモデル

とする理論体系の下では、そこでひずみ速度が不連続に変化することになる。このことは現象として受け入れ難いことである。降伏曲線は硬化変数 p_y の増大に伴って常に膨張の過程にあるが、限界曲線は膨張、収縮（形状変化）を伴わないものとしてその形状は固定されてきた。限界曲線は降伏曲線の膨張に関する限界線を表し、降伏曲線の不動域となる。このような状況から状態点は限界曲線を越えて存在することは可能でない。このため、状態点が限界曲線上にあるとき、ベクトル的な感覚では $\dot{\sigma}_y^j$ は限界曲線の接線方向に、 N_y は法線方向にあり、したがって、これらの内積に相当する全相当応力速度（式（15-1）で定義）は

$$\dot{\sigma}_y^j = 0 \quad (16)$$

でなければならない。限界曲線は降伏曲線の膨張限界線でもあるので、安定変形から不安定変形への遷移の段階では、状態点は降伏曲線から限界曲線上に滑らかに移行することになる。塑性変形の過程で、完全に圧密されて土粒子間に空隙が全くなくなる極端な場合を除くと、硬化変数 p_y の増大は本来停止することではなく、常に $\dot{p}_y > 0$ が設定されていなければならない。式（5）より

$$\dot{f} = \dot{\sigma}_y^j + M_y \dot{p}_y = 0 \quad (17)$$

であるので、安定から不安定への遷移の段階では式（16）により式（14）、（15-2）の関係を考慮して

$$M_y = 0 \quad (18)$$

であることが要請される。このことに関して、具体例としてカムクレイモデルと単純なキャプモデルについて文献2)に例示している。したがって、塑性不安定へと遷移する過程で式（15-2）より、

$$h = 0 \quad (19)$$

である。

土質力学では、硬化速度 $\dot{p}_y$ は圧縮体積ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_p$ の符合に関連して増減することをこれまで公理的に前提としてきた。このため、安定挙動の過程で $\dot{\varepsilon}_p = 0$ 、したがって、 $f_p = 0$ の状態に遭遇すると、この状態から不安定発生までの変形過程では $\dot{\varepsilon}_p < 0$ となり、そこではひずみ軟化の概念を導入せざるを得なかった。そして、安定なひずみ軟化の過程を経て限界状態に遷移するものと考えてきた。さて、 $\dot{\varepsilon}_p = 0$ において $\dot{p}_y = 0$ であるとの前提の下では、式（15-2）から式（19）を満足する。しかし、この段階で状態点は膨張可能な降伏曲線上にあるので、塑性変形の過程で正値の $\dot{\sigma}_y^j$ を与えることができる。このような状態にあっても、ひずみ速度の比例係数は、式（14）から

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{\sigma}_y^j}{h} \quad (20)$$

を満足していなければならない。したがって、 $\dot{p}_y = 0$ が

$\dot{\varepsilon}_p = 0$ と呼応する理論体系のもとでは、 $\dot{p}_y = 0$ は $\dot{\Lambda}$ を無限大に増大させ、そこでは衝撃的なひずみ速度の増大が実現していなければならない。しかし、現実の変形場でこのような現象が具現されたとの報告はない。それゆえ、限界状態で塑性不安定が発生している現実を注視するならば、状態点が少なくとも降伏曲線の膨張可能な曲線上に位置しているときには、正値の $\dot{p}_y$ が保証できる硬化特性が与えられるべきである。これについての実験的検証は非常に困難である。それゆえ、この検証が実現するまでは、状態点が膨張可能な降伏曲線上に位置しているときは、常に正値の $\dot{p}_y$ が保証できることを公理的に受け入れることが必要である。そこで、硬化に寄与する塑性ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_y$ で表し、その時間積分値を ε_y とする。これにより、硬化特性は

$$p_y = g(\varepsilon_y), \quad \bar{p}_y \equiv \frac{p_y}{p_0} = g(\varepsilon_y) \quad (21)$$

$$\varepsilon_y \equiv \int d\varepsilon_y, \quad \dot{p}_y = \frac{dg}{d\varepsilon_y} \dot{\varepsilon}_y$$

で表される。上符号—と p_0 については3.1節を参照されたい。ここで、 a を定数として

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_p + a \dot{\varepsilon}_q = \dot{\Lambda} (f_p + a f_q) \quad (22)$$

と置く。このとき、降伏曲線の膨張可能な領域で $\dot{\varepsilon}_y > 0$ （すなわち $f_p + a f_q > 0$ ）を満足する定数 a が設定されなければならない。塑性係数は式（15-2）より

$$h = -M_y \frac{dg}{d\varepsilon_y} (f_p + a f_q) \quad (23)$$

となる。式（21）の硬化関数 g は ε_y に対して単調増加の関係にあり、 $dg/d\varepsilon_y$ は零にはならない。さらに $f_p + a f_q > 0$ であるので、 $h = 0$ は常に $M_y = 0$ と対応している。このような公理的前提のもとで、塑性不安定は限界状態で発生することになる。

3. 降伏曲線の同定

3.1 圧縮変形（主応力場）

主応力下にある次のような圧縮負荷を想定する。試験片は最初、応力零の状態から初期設定圧力 p_0 まで各方向に一樣に圧縮変形を受け、しかる後各主方向独立に負荷されるものとする。このとき、 p_0 は応力関連成分の基準値となる。応力関連成分を p_0 で規準化し、無次元量とした諸量に上符号—を付すことにする。初期設定圧力 p_0 の状態からの新たな負荷を二次負荷と呼び、その応力成分を $D\sigma_i$ で表す。二次負荷を

$$D\bar{\sigma}_1 = -\zeta\kappa, \quad D\bar{\sigma}_2 = -\alpha\kappa, \quad D\bar{\sigma}_3 = -\beta\kappa \quad (24)$$

と置く。ここで

$$\alpha \equiv \zeta \frac{D\bar{\sigma}_2}{D\bar{\sigma}_1}, \quad \beta \equiv \zeta \frac{D\bar{\sigma}_3}{D\bar{\sigma}_1} \quad (25)$$

と定義している。κは無次元時間に対応する尺度である。これにより、応力値は

$$\bar{\sigma}_1 = -(1 + \zeta\kappa), \quad \bar{\sigma}_2 = -(1 + \alpha\kappa) \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_3 = -(1 + \beta\kappa)$$

であり、このとき、無次元化した偏差応力と p, q は

$$\bar{\sigma}'_1 = \frac{1}{3}(-2\zeta + \alpha + \beta)\kappa, \quad \bar{\sigma}'_2 = \frac{1}{3}(\zeta - 2\alpha + \beta)\kappa$$

$$\bar{\sigma}'_3 = \frac{1}{3}(\zeta + \alpha - 2\beta)\kappa \quad (27)$$

$$\bar{p} = 1 + \frac{1}{3}(\zeta + \alpha + \beta)\kappa$$

$$\bar{q} = \kappa\sqrt{\zeta^2 - \zeta\alpha - \zeta\beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}$$

となる。 N_i は式 (10) より、 $f_q \neq 0$ であるとき

$$N_i = -\frac{1}{3}f_q\left(f_r - \frac{9}{2\bar{q}}\bar{\sigma}'_i\right), \quad f_r \equiv \frac{f_p}{f_q} \quad (28)$$

である。ひずみ速度比

$$\gamma \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}, \quad \delta \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (29)$$

を定義する。これらは構成式 (8) より

$$\frac{N_2}{N_1} = \gamma, \quad \frac{N_3}{N_1} = \delta \quad (30)$$

であり、体積ひずみ速度はこれらより

$$\dot{\varepsilon}_v = -\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_1(1 + \gamma + \delta) \quad (31)$$

の関係にある。式 (27-4), (27-5) より $\bar{p}, \bar{q}$ の時間微分は

$$\dot{\bar{p}} = \frac{1}{3}\left\{(\zeta + \alpha + \beta)\kappa + \kappa(\zeta + \alpha + \beta)\right\}$$

$$\dot{\bar{q}} = \kappa\sqrt{\zeta^2 - \zeta\alpha - \zeta\beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} \quad (32)$$

$$+ \frac{\kappa^2}{2\bar{q}}\left\{(2\zeta - \alpha - \beta)\zeta + (-\zeta + 2\alpha - \beta)\alpha + (-\zeta - \alpha + 2\beta)\beta\right\}$$

である。式 (30) に式 (28) を適用し、式 (27) を代入して

$$f_r = \frac{3}{2(1-\gamma)} \frac{\zeta - 2\alpha + \beta - (-2\zeta + \alpha + \beta)\gamma}{\sqrt{\zeta^2 - \zeta\alpha - \zeta\beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}}$$

$$= \frac{3}{2(1-\delta)} \frac{\zeta + \alpha - 2\beta - (-2\zeta + \alpha + \beta)\delta}{\sqrt{\zeta^2 - \zeta\alpha - \zeta\beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}} \quad (33)$$

を得る。

変形挙動を調査する実験では、通常、直方体試験片、円柱試験片が使用され、二次負荷に伴う挙動経過が記録されている。直方体試験片に平面ひずみ圧縮を負荷し、平面ひずみ拘束を受けていない側面には一定の初期圧力 p_0 を作用させる。円柱試験片では側圧を増加させることにより単純伸長を与える。これらの変形拘束に従って α, β , あるいは γ, δ の間に制約が課せられる。

3. 2 基本降伏曲線

横軸に $\bar{p}$, 縦軸に $\bar{q}$ を採る式 (4) の降伏曲線は $\bar{p}_y$ の増大に伴って相似の中心を原点に持ち、相似形を維持して膨張するものと仮定する。初期設定圧力 p_0 における降伏曲線は $\bar{p}$ 軸と単位で交差し、 $\bar{p}_y = 1$ である。この降伏曲線は降伏曲線の膨張に関する基本形状を与えるものであり、基本降伏曲線と名付ける。基本降伏曲線に関する諸量 (当然 p_0 により規準化されている) に上符合を付して表す。これを図-2に示す。二次負荷開始時には基本降伏曲線上の状態点は点 $S(1,0)$

$$\bar{p}_0 = 1, \quad \bar{q}_0 = 0 \quad (34)$$

に位置している。

塑性変形に伴って降伏曲線が膨張し、 $\bar{p}$ 軸との交点が $\bar{p}_y$ となった降伏曲線上に状態点が移動し、現時点において応力空間上の点 $\bar{p}, \bar{q}$ に位置しているとする。このときの状態点と原点を結ぶ動径を $\bar{r}$, 動径が $\bar{p}$ 軸となす偏角を θ で表すと

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad (35)$$

の関係にある。この状態点に対して同一の偏角 θ を与える基本降伏曲線上の点が基本対応点である。この基本対応点における動径 $\bar{r}$ と偏角 θ は

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad (36)$$

である。ここで、基本降伏曲線の形状を

$$\bar{r} = k(\theta) \quad (37)$$

で表す。降伏曲線における相似膨張の仮定から硬化変数は

$$\bar{p}_y = \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \quad (38)$$

の関係にある。一般に、素材の硬化特性は式 (21) で与えられている。基本対応点における基本降伏曲線の法線が $\bar{p}$ 軸となす角度は、状態点におけるその法線角度 ψ であり、式 (28-2) の定義より

$$f_r = \frac{1}{\tan \psi} \quad (39)$$

である。動径の時間変化は図-2を参照して

$$\dot{\bar{r}} = -\bar{r} \tan(\psi - \theta)\dot{\theta} \quad (40)$$

の関係にあり、このときの偏角の変化は式 (35-2) により

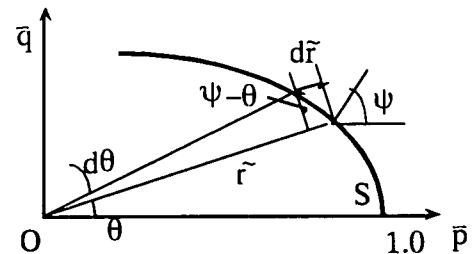


図-2 基本降伏曲線

$$\theta = \frac{1}{F^2}(\bar{p}\dot{q} - \dot{q}\bar{p}) \quad (41)$$

である。

4. 負荷経路の具体例

4. 1 平面ひずみ圧縮変形

平面ひずみ条件下における圧縮試験を想定する。いま、圧縮方向を座標軸 1 の方向に採り、座標軸 3 の方向に平面ひずみ拘束

$$\varepsilon_3 = 0 \quad (42)$$

を課すものとする。座標軸 2 の方向には、常に初期設定圧力 p_0 が負荷されている。したがって、式 (26-1), (26-2), (29-2) において

$$\zeta = 1, \alpha = 0, \delta = 0 \quad (43)$$

である。式 (26), (27), (32) より、応力関連成分は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= -(1 + \kappa), \quad \bar{\sigma}_2 = -1, \quad \bar{\sigma}_3 = -(1 + \beta\kappa) \\ \bar{\sigma}'_1 &= \frac{1}{3}\kappa(-2 + \beta), \quad \bar{\sigma}'_2 = \frac{1}{3}\kappa(1 + \beta) \\ \bar{\sigma}'_3 &= \frac{1}{3}\kappa(1 - 2\beta) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= 1 + \frac{1}{3}(1 + \beta)\kappa, \quad \bar{q} = \kappa\sqrt{1 - \beta + \beta^2} \\ \dot{\bar{p}} &= \frac{1}{3}\left\{(1 + \beta)\dot{\kappa} + \beta\kappa\right\} \\ \dot{\bar{q}} &= \dot{\kappa}\sqrt{1 - \beta + \beta^2} - \kappa\frac{1 - 2\beta}{2\sqrt{1 - \beta + \beta^2}}\dot{\beta} \end{aligned}$$

となる。これらを式 (28) に代入して、 N_i は

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{3}f_q\left(f_r - \frac{3}{2}\frac{-2 + \beta}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2}}\right) \\ N_2 &= -\frac{1}{3}f_q\left(f_r - \frac{3}{2}\frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2}}\right) \\ N_3 &= -\frac{1}{3}f_q\left(f_r - \frac{3}{2}\frac{1 - 2\beta}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2}}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

となる。式 (43) の条件の下で式 (33) より

$$f_r = \frac{3}{2}\frac{1 + \gamma}{\sqrt{1 - \gamma + \gamma^2}}, \quad \beta = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} \quad (46)$$

を得る。

平面ひずみ圧縮に関する実験では、応力関連計測において、軸圧縮ひずみ $-\varepsilon_1$ を独立変数として軸圧縮応力 $-\sigma_1$

(場合によっては平面ひずみ拘束圧縮応力 $-\sigma_3$ も) の経過が記録されている場合と q/p_0 と q/p の経過が求められている場合の 2 通りが見受けられる。前者を実験 A, 後者を実験 B と呼ぶ。これらのいずれにおいても体積ひずみ ε_v

($= -\varepsilon_p$) の経過が同時に計測されていることが多い。降伏曲線を同定するには 2 種類の計測値が必要である。3 種類の計測値が測定されている場合にはこの内のいずれか 2 つの計測値を適用して残る 1 つの計測値も算定できる

ので、この算定値と計測値との間の整合性を調べることが可能である。実験 B における応力関連計測では q/p_0 ($= \bar{q}$), q/p ($= \bar{q}/\bar{p}$) の 2 種類が求められている。

平面ひずみ圧縮変形の変形開始初期には $\bar{q} = 0$ でなければならない。しかし、計測値は場合によっては変形初期に大きく偏っていたりあるいは記録されていないこともあり、これらの計測値を用いて変形初期の $\bar{p}$ を算出すると精度の低下が懸念される。そこで、実験 B では $\bar{q}$ と体積ひずみ ε_v を利用し、結果として $\bar{q}/\bar{p}$ の整合性を調べることにした。

(1) 実験 A1

Desrues らの実験⁶⁾を参照し、これを実験 A1 と呼ぶ。彼等の測定結果を図-3 に示す。ここでは、 $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, $\bar{\sigma}_3$, ε_v の経過が計測されている。 $\bar{\sigma}_2$ はほぼ一定に保持されている。したがって、ここでは $\bar{\sigma}_2 = \text{一定}$ としてこれ以外の 3 種類の計測値の内 2 種類の成分を用いて降伏関数を決定し、残る 1 成分の経過も算定した。計測に関して $\bar{\sigma}_1$ は最重要成分であるので、これを 2 成分の内の 1 成分として最優先に採用する。残る 1 成分として $\bar{\sigma}_3$ あるいは ε_v を採り、これに従って前者では ε_v を、後者では $\bar{\sigma}_3$ を予測した。図-3 に示されている破線はこれらの経過を表している。

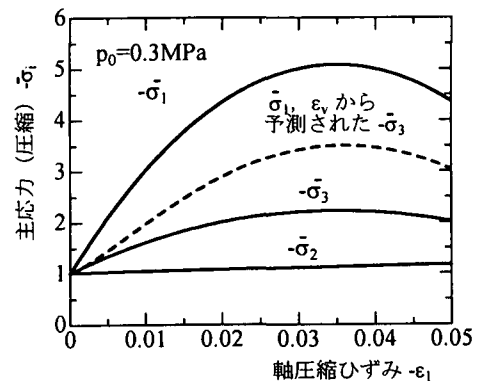


図-3a 平面ひずみ圧縮における応力値の経過 (Desrues らの実験 A1)

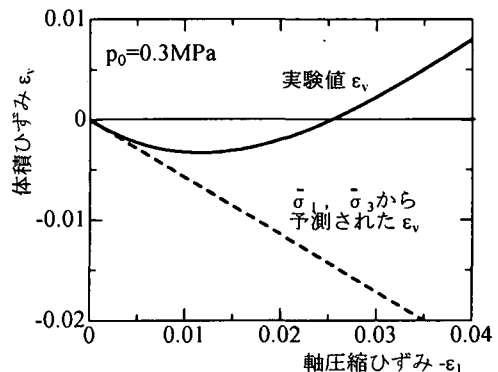


図-3b 平面ひずみ圧縮における体積ひずみの経過 (Desrues らの実験 A1)

$\bar{\sigma}_1$ と $\bar{\sigma}_3$ の採用においては体積ひずみ ε_v は直線的に変化し、体積は常に圧縮過程を辿る経過を示した。また、 $\bar{\sigma}_1$ 、 ε_v の採用では平面ひずみ変形維持に必要な圧縮応力 $-\bar{\sigma}_3$ の予測値は計測値に比べ相当に大きい値を示している。いずれの場合においても予測値と実測値との間の相違は少なからず認められる結果となった。これらの算出方法を以下に述べる。

前者の $\bar{\sigma}_1$ と $\bar{\sigma}_3$ の採用では、式 (44-1)、(44-3) より

$$\beta = \frac{1 + \bar{\sigma}_3}{1 + \bar{\sigma}_1} \quad (47)$$

であり、さらに、ひずみ速度比は式 (46) より

$$\gamma = -\frac{\beta}{1 - \beta} \quad (48)$$

で与えられる。体積ひずみ増分は定義から軸圧縮ひずみ増分と

$$\frac{d\varepsilon_v}{d(-\varepsilon_1)} = -1 - \gamma \quad (49)$$

の関係にあるので、これを積分して体積ひずみ ε_v が求められる。これに対して後者の $\bar{\sigma}_1$ 、 ε_v の採用では、前者とは逆に体積ひずみ経過曲線からそれを微分しその勾配を求め、式 (49) を用いて γ を、式 (46-2) より β を算出した。

このようにして求められた β 、 γ を用い以下に示す演算に従って基本降伏曲線を予測した。変形時間に軸圧縮ひずみ $-\varepsilon_1$ を採る。計測値 $\bar{\sigma}_1$ の経過とその勾配から式 (44-1) に従って κ 、 $\dot{\kappa}$ が求められる。式 (46-2) より

$$\beta = -\frac{\dot{\gamma}}{(1 - \gamma)^2} \quad (50)$$

の関係にあるので、これを用いて γ の経過とその時間変化 $\dot{\gamma}$ から β が判明する。これらを式 (44) の後半の関係に代入し $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$ 、 $\dot{\bar{p}}$ 、 $\dot{\bar{q}}$ を算出する。さらに、式 (35-2) から θ が、式 (41) から $\dot{\theta}$ が求められる。式 (46-1) に従って f を、これを式 (39) に代入して ψ が求められるので、動径 $\bar{r}$ に関する積分を式 (40) により実行することができる。このようにして求められた基本降伏曲線を図-4 に示

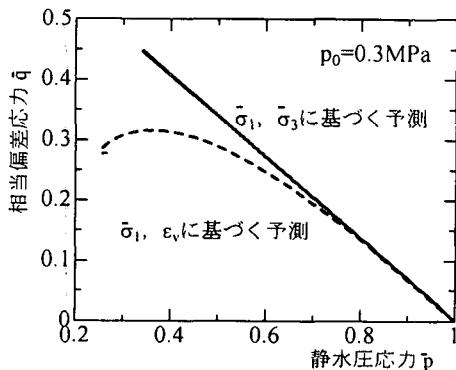


図-4 平面ひずみ圧縮における基本降伏曲線 (Desruésらの実験A1)

す。基本降伏曲線の形状は採用した2種類の計測値により大きく相違する結果を示している。

(2) 実験A2

Viggiani らの実験⁷⁾を実験A2と呼ぶ。ここでは、軸荷重 P_1 と体積ひずみ ε_v が軸圧縮ひずみ $-\varepsilon_1$ に関して測定されている。 $\varepsilon_3=0$ であるので、体積ひずみの経過から ε_2 の経過を知ることができる。これより軸直角断面面積は

$$A = A_0 \exp(\varepsilon_2) \quad (51)$$

で与えられる。ここで、 A_0 は初期負荷時 p_0 における断面積である。軸荷重 P_1 を A で除して軸応力 $\bar{\sigma}_1$ が算出され

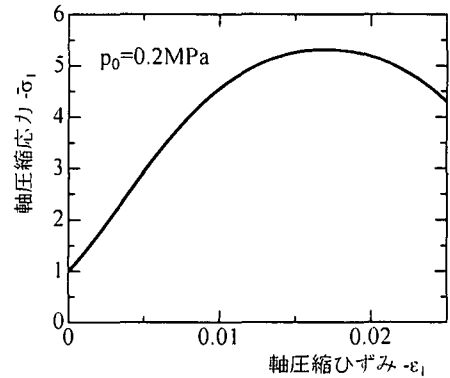


図-5a 平面ひずみ圧縮における軸圧縮応力の経過 (Viggianiらの実験A2)

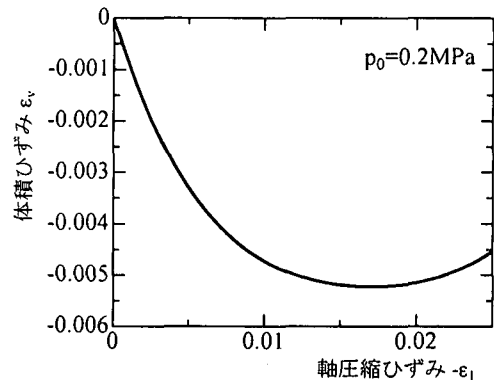


図-5b 平面ひずみ圧縮における体積ひずみの経過 (Viggianiらの実験A2)

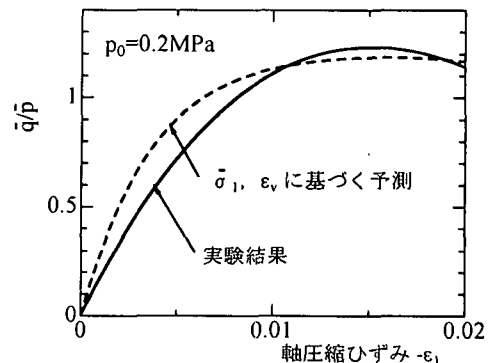


図-6 平面ひずみ圧縮における $\bar{q}$ の経過 (Viggianiらの実験A2)

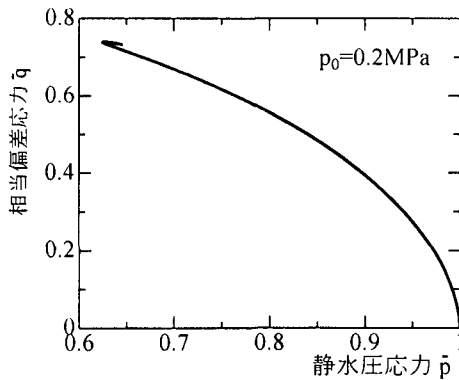


図--7 平面ひずみ圧縮における基本降伏曲線 (Viggianiらの実験A2)

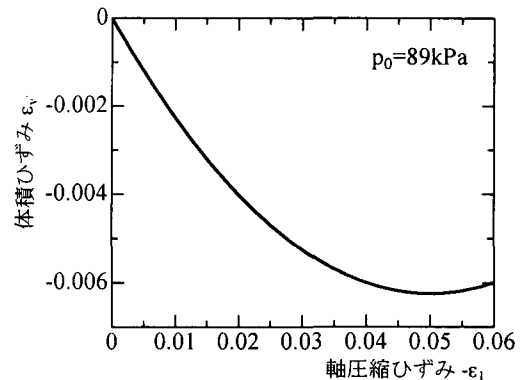


図--8b 平面ひずみ圧縮における体積ひずみの経過 (Finnoらの実験B)

る。以上の処理を経て $-\bar{\sigma}_1$, ϵ_v が軸圧縮ひずみ $-\epsilon_1$ に関して判明する。これを図-5に示す。Viggiani らの論文には $\bar{q}/\bar{p}$ の経過も提示されており、これを図-6に実線で示した。計測された $\bar{\sigma}_1$, ϵ_v の経過から、 $\bar{q}/\bar{p}$ の経過を予測することができる。これを図-6に破線で示した。これらの間に比較的良好な相関が見られる。計測された $\bar{\sigma}_1$, ϵ_v の経過に従って求められた基本降伏曲線は図-7に示す形状を呈した。

(3) 実験B

Finno らの実験⁸⁾を実験Bと呼ぶ。ここでは、 $\bar{q}$, $\bar{q}/\bar{p}$, ϵ_v が軸圧縮ひずみ $-\epsilon_1$ に関して求められている。これを図-8に示す。 $\bar{q}$, $\bar{q}/\bar{p}$ は2次負荷の発端で有限な値を示し、この有限な値に達するまで弾性挙動を示したかに見える。しかし、 ϵ_v に関しては、圧縮変形の発端から塑性変形の進行が伺える。そこで、 $\bar{q}$, $\bar{q}/\bar{p}$ に関しては測定値を通る関数からこれらが零となる軸圧縮ひずみ $-\epsilon_1$ を推定し、この値を横軸に加算することで図-9を得た。この $\bar{q}$ と ϵ_v から基本降伏曲線の形状を予測し、これを図-10に示す。これらの処理に準拠して予測される $\bar{q}/\bar{p}$ の経過を図-9に破線で示した。

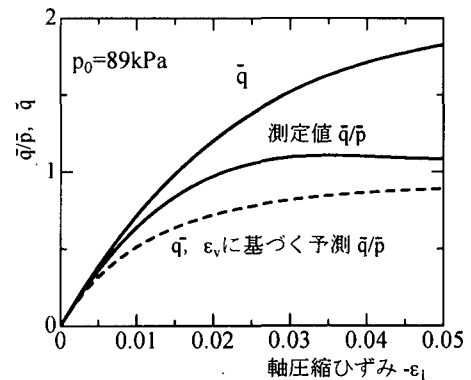


図-9 軸ひずみの原点を移動した $\bar{q}/\bar{p}$ と $\bar{q}$ の経過

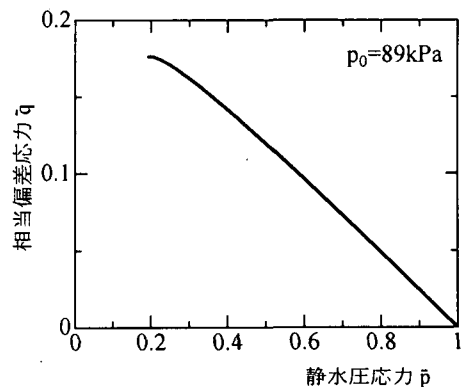


図--10 平面ひずみ圧縮における基本降伏曲線 (Finnoらの実験B)

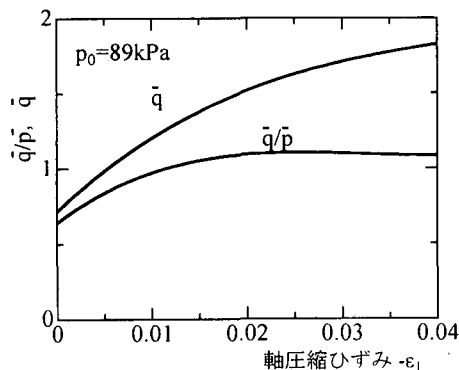


図--8a 平面ひずみ圧縮における $\bar{q}/\bar{p}$ と $\bar{q}$ の経過 (Finnoらの実験B)

4. 2 円柱伸長

側圧を負荷した、いわゆる三軸試験と言われている円柱の圧縮試験では、一定の側圧力の下で軸圧縮変形が課せられている場合が多い。圧縮端面における摩擦作用が無視できるとき、円柱素材は空間的に均一に変形していると仮定することができる。これに対して、Desrues ら⁶⁾は軸応力を一定に保持した条件下で、側圧力を増加させ、円柱試験片に伸び変形を与える実験を行った。これを実験Cと呼ぶ。円柱軸方向に座標軸1を採る。円柱軸方向応力は一

定であり、軸直角断面の変形は一様であると仮定し

$$\zeta = 0 \quad (52)$$

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \delta$$

の条件下で考察する。いま、

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha \kappa \quad (53)$$

と置く。式 (26), (27), (32) より、応力関連成分は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= -1, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = -(1 + \bar{\alpha}) \\ \bar{\sigma}'_1 &= \frac{2}{3}\bar{\alpha}, \quad \bar{\sigma}'_2 = \bar{\sigma}'_3 = -\frac{1}{3}\bar{\alpha} \\ \bar{p} &= 1 + \frac{2}{3}\bar{\alpha}, \quad \bar{q} = \bar{\alpha} \\ \dot{\bar{p}} &= \frac{2}{3}\dot{\bar{\alpha}}, \quad \dot{\bar{q}} = \dot{\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (54)$$

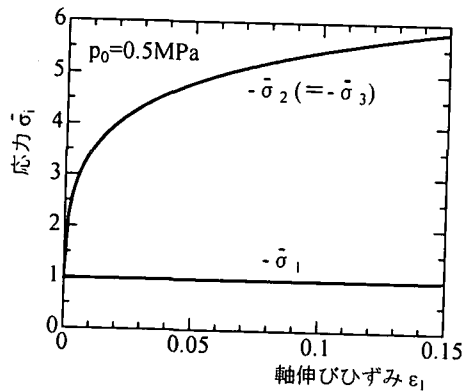


図-11a 円柱の伸び変形における応力値の経過 (Desruesらの実験C)

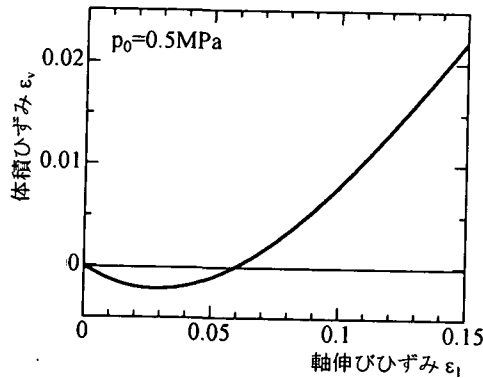


図-11b 円柱の伸び変形における体積ひずみの経過 (Desruesらの実験C)

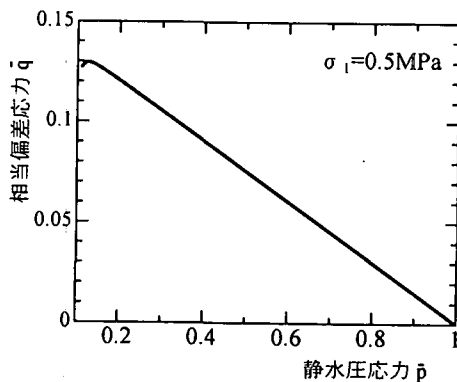


図-12 円柱の伸び変形における基本降伏曲線 (Desruesらの実験C)

である。これらを式 (28) に代入して、 N_i は

$$N_1 = -\frac{1}{3}f_q(f_r - 3) \quad (55)$$

$$N_2 = N_3 = -\frac{1}{3}f_q\left(f_r + \frac{3}{2}\right)$$

となる。式 (33) は式 (52) により

$$f_r = -\frac{3}{2} \frac{1+2\gamma}{1-\gamma} \quad (56)$$

の関係にある。この実験Cでは、応力 $\bar{\sigma}_2$ と体積ひずみ ε_v が計測されている。これらを図-11に示す。図-11bより、ひずみ速度比

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right) \quad (57)$$

が算出され、これを用いて式 (56) から f_r が求められる。

3. 2 節の関係に従って、基本降伏曲線が決定される。それを図-12に示す。これは実験Bにおける基本降伏曲線形状にほぼ類似している。

4. 3 負荷経過と降伏曲線形状の関連

前節で、各種圧縮試験の負荷経過から予測される基本降伏曲線形状を求めた。実験者あるいは実験条件、素材により降伏曲線形状は大きく異なり、さらに、それぞれの実験計測で細心の注意が払われていたにも拘らず、3種類の状態量の計測がなされている場合においては2種類の状態量から残る1種類のそれを予測すると計測値との間に少なからぬ相違の認められる場合があった。そこで、ここでは側圧力 p_0 を一定とする平面ひずみ圧縮の条件下で、負荷状態量の経過が基本降伏曲線の形状にどのように影響するかについて検討を試みた。

ここでは、状態量 $\bar{\sigma}_i$, ε_v が $-\varepsilon_1$ に関して計測されているものとする。いま、

$$x \equiv -\varepsilon_1, \quad y \equiv -\bar{\sigma}_1, \quad z \equiv \varepsilon_v \quad (58)$$

に置き換え、これらがだまかに

$$y = 1 + b_y(x - x_y)^2 + y_m, \quad z = b_z(x - x_z)^2 + z_m \quad (59)$$

の放物線近似で表現できるものとする。この仮定は実験による計測結果と大きくかけ離れるものではない。これらは、それぞれ $x = x_y$, $x = x_z$ で極値 $1 + y_m$, z_m を採る。図-3aと図-5aを参照して、ここでは、ひとまず

$$x_y = 0.05, \quad y_m = 4 \quad (60)$$

と置いた。これまで検討した実験経過では常に $x_z < x_y$ の関係にある。そこで、

$$x_z = \xi x_y \quad (\xi < 1) \quad (61)$$

とした。これにより式 (59) の係数は

$$b_y = -\frac{1 + y_m}{x_y^2}, \quad b_z = -\frac{z_m}{x_z^2} \quad (62)$$

で与えられる。基本降伏曲線形状に影響する変数としてこ

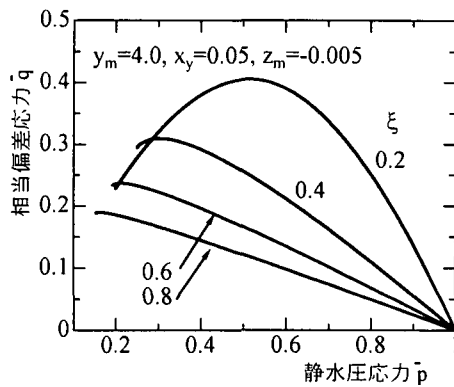


図-13 基本降伏曲線形状への ξ の影響

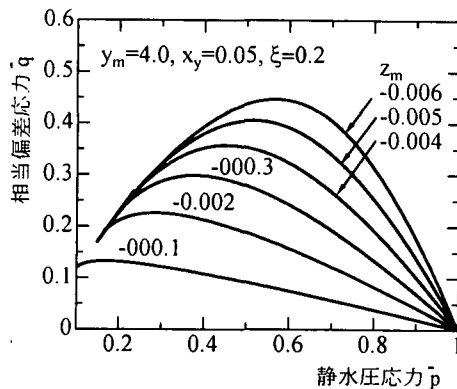


図-14 基本降伏曲線形状への z_m の影響

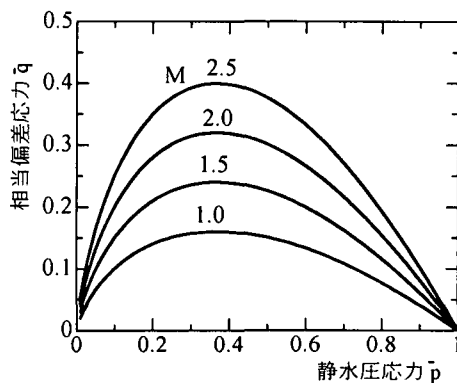


図-15 カムクレイモデルにおける基本降伏曲線

ここでは ξ と z_m に注目した。図-13に ξ の影響を、図-14に z_m の影響を示した。これらのパラメータの工学的意味を付録にまとめた。カムクレイモデルでは、基本降伏曲線は

$$\bar{q} = -M\bar{p} \ln(\bar{p}) \quad (63)$$

と表現できる。これを図-15に示す。これらと比較すると、図-14において z_m が-0.002あるいは-0.003程度であり、 ξ が $\xi=0.2$ と小さな値であるときにはカムクレイモデルに近い降伏曲線形状が得られている。

5. 硬化変数

4. 3節で考察した平面ひずみ圧縮における負荷経過に準拠して検討する。4. 1節の具体例で示したように軸圧縮ひずみ $-\varepsilon_1$ に対応して式(44)より $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ が求められ、式(35)より $\bar{r}$, θ が算出される。式(41)より $\dot{\theta}$ を、これを用いて式(40)を積分して $\bar{r}$ が判明している。したがって、式(38)より硬化変数 $\bar{p}_y$ が決まる。他方、変形に関しては各負荷段階で ε_v の $-\varepsilon_1$ に関する勾配から式(49)を用いて γ が求められているので、 γ の定義(式(29-1))に従って $-\varepsilon_1$ に対して ε_2 が判明する。さらに $\varepsilon_3=0$ であるので、式(1-2), (2-2)より ε_p , ε_q が求められる。これらを時間積分して ε_p , ε_q が算出される。硬化ひずみは式(22)に従って

$$\varepsilon_y = \varepsilon_p + a\varepsilon_q \quad (64)$$

である。 $\bar{p}_y$, ε_y を関係付け式(21)の硬化曲線 $\bar{g}$ を決定することができる。これを図-16に示す。カムクレイモデルでは、 $a=0$ の下で、硬化曲線を

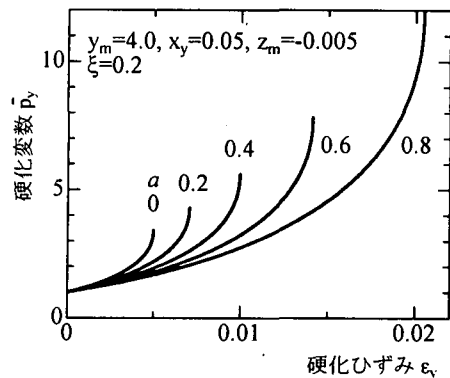


図-16 硬化変数への係数 a の影響

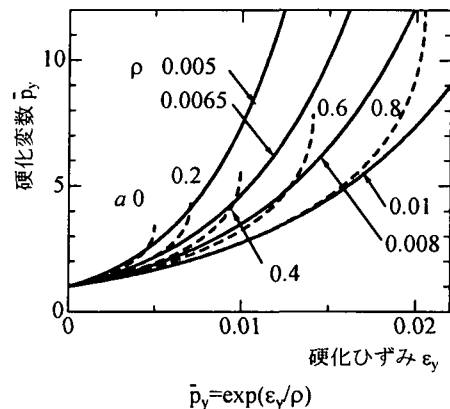


図-17 硬化ひずみの指数表現による硬化変数

$$\bar{p}_y = \exp\left(\frac{\varepsilon_y}{\rho}\right) \quad (65)$$

で表している。ここで、

$$\rho = \frac{\lambda - \kappa_e}{1 + e_0} \quad (66)$$

で与え、 e_0 は間隙比、 λ 、 κ_e はそれぞれ圧縮、膨潤指数である。式(65)において種々の ρ を選びカムクレイモデルによる硬化曲線を求め、図-17に実線で示した。これらは硬化ひずみの小さな過程で図-16による硬化曲線(破線)を比較的良好に近似している。

6. 結 言

平面ひずみ圧縮試験と円柱試験片に側圧力を増加させ伸び変形を付与する三軸試験の結果を参照して、降伏曲線形状を検討した。

降伏曲線を決定するに際して、降伏関数は基本形状が硬化ひずみ ε_y の増大に伴って相似形で膨張すること、さらにこの降伏関数は塑性ポテンシャルと一致することを前提とした。このとき、降伏曲線の決定には変形の経過に関して2種類の状態量が必要になる。3種類の状態量が計測されている実験において、この内の2種類を任意に採用して求めた降伏関数は、選択した2種類の状態量の選び方により異なった形状を予測した。また、参照した実験によっても形状はそれぞれ異なる結果となった。3種類の状態量の内2種類のそれらから残る1種類の状態量を予測するとき、算出値と計測値の間で少なからぬ相違が認められた。

参照した状態量の特徴を抽出し、これらの特徴と降伏曲線形状との間の関連を平面ひずみ変形について調べた。体積ひずみは変形に伴って圧縮から膨張に転ずるが、そのときの変形が軸応力最大値を示す変形のほぼ1/5程度であるとき降伏曲線はカムクレイモデルで提唱されている形状に類似する傾向を示した。

硬化変数の硬化ひずみ依存性は、因子 a の影響を当然受けるが、カムクレイモデルにおける硬化特性にほぼ類似した関数関係を示した。

参 考 文 献

- 1) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料における塑性不安定規準, 日本機械学会論文集 A, 第 63 巻, 第 610 号, pp.1334-1339, 1997.

- 2) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料における塑性理論の修正, 日本機械学会論文集 A, 第 64 巻, 第 621 号, pp.1415-1421, 1998.
- 3) 守時 一, 奥山栄樹: 土質力学における限界状態と多価条件の関連, 土木学会, 応用力学論文集, 第 1 巻, pp.417-426, 1998.
- 4) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: On the yielding of soils, *Geotechnique*, Vol.8, pp.22-53, 1958.
- 5) Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J.: Soil mechanics and work-hardening theory of plasticity, *ASCE Trans.*, Paper No.2864, pp.338-346, 1957.
- 6) Desrues, J., Lanier, J. and Stutz, P.: Localization of the deformation in tests on sand sample, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.21, pp.909-921, 1985.
- 7) Viggiani, G., Finno, R. J. and Harris, W. W.: Experimental observation of strain localization in plane strain compression of a stiff clay, *Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks*, Chambon, R., Desrues, J. and Vardoulakis, I. (eds), Balkema, Rotterdam, pp.189-198, 1994.
- 8) Finno, R. J., Harris, W. W., Mooney, M. A. and Viggiani, G.: Shear bands in plane strain compression of loose sand, *Geotechnique*, Vol.47, pp.149-165, 1997.
- 9) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料におけるせん断帯の形態予測, 日本機械学会論文集 A, 第 63 巻, 第 611 号, pp.1561-1566, 1997.

付録: 図 13 から 17 におけるパラメータの工学的意味

x : 軸圧縮ひずみ.

y : 軸圧縮応力(初期設定圧力で規格化), 式(59)参照.

y_m : 最大軸圧縮応力.

x_y : 最大軸圧縮応力を示す軸圧縮ひずみ.

z : 体積ひずみ, 式(59)参照.

z_m : 最小体積ひずみ.

x_z : 最小体積ひずみを示す軸圧縮ひずみ.

ξ : x_z/x_y .

a : 式(22)参照.

ρ : 式(65)参照.

(2000年4月21日受付)