

MINI 要素を用いた流体-構造連成問題における安定形状同定

Stable Shape Identification for Fluid-Structure Interaction Problem Using MINI Element

松本純一*・川原睦人**

Junichi MATSUMOTO and Mutsuto KAWAHARA

*学生員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

Numerical solutions of the shape identification for the circular cylinder is treated with in this paper. The Sakawa-Shindo method is employed for minimization algorithm. The unified computation approach to the simulation of the flow and the shape identification is presented. As the numerical approach for the spatial discretization, the mixed interpolation by the bubble and linear elements is applied for velocity and by linear element for pressure, respectively.

Key Words : stable shape identification, fluid-structure interaction problem, MINI element, linear bubble function

1. 緒言

流体は構造物に動的挙動を与える主要な問題のひとつであり、構造物の挙動と流体の挙動とが連成する問題は工学の分野に数多くある。このうち、橋やビルの風による振動は構造物の断面形状や柔軟性によってさまざまに異なる挙動を示す複雑な現象となっている。このことから、この種の断面の安定性の向上を計ることは、これらの構造物を設計する上で重要な問題の一つであると考えられる。この種の問題を有限要素法等の離散化手法を用いて解析する場合には、振動の位相と非定常空気力の位相とを正確に計算できなければ、これらの相互作用力の正負を正しく評価できず、連成現象の定性的な把握すらできないこととなる。このことから、精度の高い解析手法が必要となる。近年においては、有限要素法等を用いた流体解析において計算精度の高い解析手法が開発されたことにより、流体-構造連成問題¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾の解析が行われている。また、近年の著しいコンピュータの計算速度の発達により数値解析の応用問題として流体・構造解析などの実問題の計算において逆解析理論を用いた制御解析、パラメータ同定、最適形状・形状同定解析などが盛んに行われている⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾¹³⁾。そこで、本研究では、近年の有限要素解析の応用問題として、流体-構造連成問題による構造物の安定形状同定を提案するものである。本論では、円柱回りの解析を行い、固有値を用いた構造物の安定性に関する安定形状同定の検討を行うものである。

2. 基礎方程式

2.1 流体に関する基礎方程式

バネ支持されている状態での流れ場での基礎方程式は、Navier-Stokes の運動方程式と連続の式であり、ALE 記述¹⁴⁾¹⁵⁾を適用することにより、次のように表される。

$$\rho\{\dot{u}_i + (u_j - w_j)u_{i,j}\} + p_{,i}$$

$$- \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 f_i は外力である。また、 w_j はメッシュ速度であり、これにより有限要素節点が移動する。なお、ALE 法では、式 (1) のメッシュ速度を任意に選択することができる。

境界 Γ は、 Γ_1 と Γ_2 に分けられ、以下の境界条件が規定される。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数、 n_j は境界 Γ_2 の外向き法線ベクトルである。

2.2 構造に関する基礎方程式

物体は図-1 に示すような流れの中でバネ支持された 2 次元剛体と仮定する。その運動方程式は次式で表される。

$$m\dot{u} + cu + kx = X \quad (5)$$

ここで、

$$x = (x_1, x_2, \theta)^T, u = \dot{x} \quad (6)$$

は重心で定義された並進 2 成分 x_1, x_2 および回転成分 θ からなる変位のベクトル、 $u = \dot{x}$ は速度のベクトルである。また、

$$X = (X_1, X_2, M)^T \quad (7)$$

は、変位 x に対応する集中力ベクトルで重心に作用するものである。 m, c, k は質量、減衰、剛性の行列で、いずれも対角行列である。

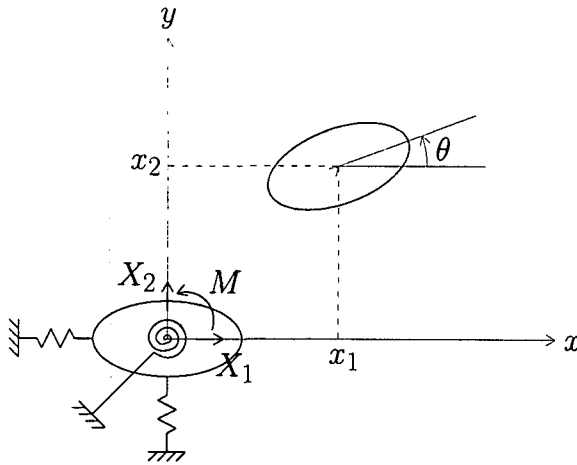


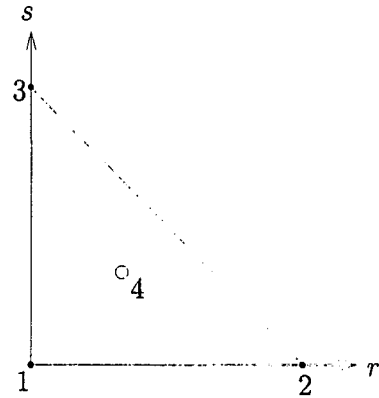
図-1 バネ支持された剛体の概念図

3. 流体の基礎方程式における有限要素方程式

3.1 MINI 要素

本研究では、流体の基礎方程式における空間方向の定式化として、混合補間を用いる。ここで、混合補間の組み合わせとして MINI 要素¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾¹⁹⁾は混合補間を用いた手法の中で最も自由度が少なく、かつ定式化が極めて容易に行える要素である。また、計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮が SUPG 法²⁰⁾、BTD 法²¹⁾²²⁾などの安定化手法に比べて非常に簡単に行えるものである²³⁾。さらに、混合補間の要素の選択として、流速に高次の要素を用いる場合には、質量行列を集中化することは不可能であるが、MINI 要素は質量行列の集中化が可能である²⁴⁾。したがって、流速に高次要素を用いる他の混合補間に比べて、極めて計算効率がよい手法であると考えられる。このことから、混合補間の組み合わせとして、MINI 要素を用いるものとする。すなわち、要素の選択として、流速に

関しては気泡関数要素を圧力に関しては 1 次要素を補間関数に用いる。以下に 2 次元の MINI 要素を示す。

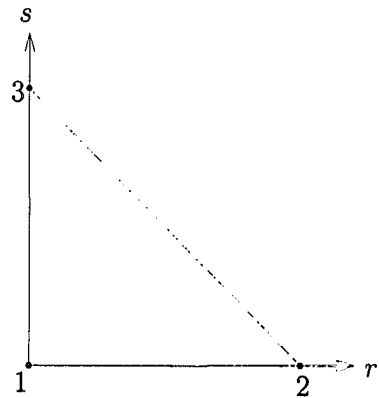


(a) 気泡関数要素

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 \tilde{u}_{i4} \quad (8)$$

$$\Phi_1 = 1 - r - s, \Phi_2 = r, \Phi_3 = s, \Phi_4 = \phi_e$$

$$\tilde{u}_{i4} = u_{i4} - \frac{1}{3}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3})$$



(b) 1 次要素

$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 \quad (9)$$

$$\Psi_1 = 1 - r - s, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s$$

図-2 MINI 要素

ここで、図-2 の ϕ_e は気泡関数である。

3.2 線形型気泡関数

もっとも定式化が簡便である気泡関数として本研究では図-3 に示すように三角形の要素領域をその重心点を用いて 3 つの小三角形 w_i に分割する線形型気泡関数²³⁾を用いる。線形型気泡関数はこの小三角形毎にアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて式 (10) のように定義される。この気泡関数は線形であることから、この 1 回微分は定数となるので、この要素における積分が簡便になると考えられる。

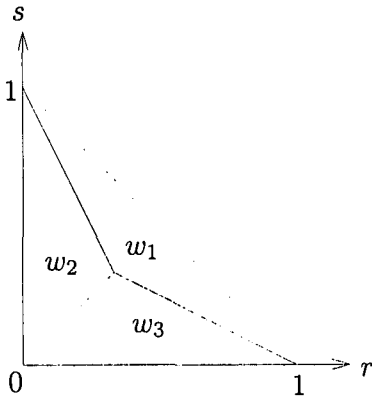


図-3 要素領域

$$\phi_e = \begin{cases} 3(1-r-s) & \text{in } w_1 \\ 3r & \text{in } w_2 \\ 3s & \text{in } w_3 \end{cases} \quad (10)$$

3.3 安定化作用制御法²³⁾を適用した流体の基礎方程式における有限要素方程式

Bubnov-Galerkin 法により有限要素近似を行う。MINI 要素を用いた有限要素近似では、次の 1 次要素の有限要素空間 $\tilde{V}_i^h$, Q^h と気泡関数の空間 $\tilde{V}_i^h$ を用いる。

$$\tilde{V}_i^h = \{\tilde{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^2, \tilde{v}_i^h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^2\} \quad (11)$$

$$\tilde{V}_i^h = \{\tilde{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^2, \tilde{v}_i^h|_{\Omega_e} \in \phi_e c_{ei}, c_{ei} \in \mathbf{R}^2\} \quad (12)$$

$$Q^h = \{q^h \in C_0^0(\Omega), q^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (13)$$

ここで、 Ω_e は要素領域 ϕ_e をコンパクトな台 ($\text{supp}(\phi_e) \subseteq \Omega_e$) とする気泡関数であり、 $\tilde{V}_i^h$ は気泡関数による近似空間に対応している。

有限要素法空間として速度場に対して $V_i^h = \tilde{V}_i^h \oplus \tilde{V}_i^h$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより、有限要素近似解 $(u_i^h, p^h) \in V_i^h \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$\rho \{ \langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle \} + \langle p_{,i}^h, v_i^h \rangle - \langle \mu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, v_i^h \rangle = \langle f_i, v_i^h \rangle \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (14)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (15)$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は、 Ω における L^2 内積を表す。流速場に対する近似解 u_i^h と重み関数 v_i^h は 1 次要素による補間関数の近似空間の元 $\tilde{u}_i^h, \tilde{v}_i^h \in \tilde{V}_i^h$ および気泡関

数による近似空間の元 $\tilde{u}_i^h, \tilde{v}_i^h \in \tilde{V}_i^h$ を用いて次のように表現できる。

$$u_i^h = \bar{u}_i^h + \tilde{u}_i^h, v_i^h = \bar{v}_i^h + \tilde{v}_i^h \quad (16)$$

ここで、

$$\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h, Ne: \text{総要素数}$$

$$\tilde{u}_i^h = \sum_{e=1}^{Ne} \phi_e b_{ei} \in \tilde{V}_i^h, \tilde{v}_i^h = \sum_{e=1}^{Ne} \phi_e c_{ei} \in \tilde{V}_i^h \quad (17)$$

である。安定化作用制御法²³⁾を適用した有限要素方程式は、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \rho \{ \langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle \} \\ & + \langle p_{,i}^h, v_i^h \rangle - \langle \mu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, v_i^h \rangle \\ & + \sum_{e=1}^{Ne} \langle \tilde{\mu}_{ij}(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), \tilde{v}_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} \\ & = \langle f_i, v_i^h \rangle \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (18) \end{aligned}$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (19)$$

ここで、 $\sum_{e=1}^{Ne} \langle \tilde{\mu}_{ij}(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), \tilde{v}_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e}$ は気泡関数要素による安定化作用制御項である。有限要素方程式 (18), (19) の弱形式を適用した有限要素方程式は式 (20), (21) のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \rho \{ \langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle \} - \langle p^h \delta_{ij}, v_{i,i}^h \rangle \\ & + \langle \mu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), v_{i,j}^h \rangle + \langle \mu(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), v_{i,j}^h \rangle \\ & + \sum_{e=1}^{Ne} \langle \tilde{\mu}_{ij}(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), \tilde{v}_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} = \langle f_i, v_i^h \rangle \\ & + \langle \{-p^h \delta_{ij} + \mu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)\}, v_i^h \rangle_{\Gamma_2} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (20) \end{aligned}$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (21)$$

また、以下のような関係式が成り立つ。

$$\langle \bar{u}_{i,j}^h, \bar{v}_{i,j}^h \rangle = 0, \langle \tilde{u}_{i,j}^h, \bar{v}_{i,j}^h \rangle = 0 \quad (22)$$

$$\langle \bar{u}_{j,i}^h, \bar{v}_{j,i}^h \rangle = 0, \langle \tilde{u}_{j,i}^h, \bar{v}_{j,i}^h \rangle = 0 \quad (23)$$

式 (22), (23) を式 (20) に代入することにより、有限要素方程式 (20), (21) は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & \rho \{ \langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle \} - \langle p^h \delta_{ij}, v_{i,i}^h \rangle \\ & + \langle \mu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), \bar{v}_{i,j}^h \rangle \end{aligned}$$

$$+ \sum_{e=1}^{Ne} \langle (\mu + \tilde{\mu}_{ij})(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), \tilde{v}_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} = \langle f_i, v_i^h \rangle + \langle \{-p^h \delta_{ij} + \mu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)\}, v_i^h \rangle_{\Gamma_2} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (24)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (25)$$

ここで、

$$\sum_{e=1}^{Ne} \langle (\mu + \tilde{\mu}_{ij})(\tilde{u}_{i,j}^h + \tilde{u}_{j,i}^h), \tilde{v}_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \tau_{eS}^{-1} b_{ei} c_{ei} \quad (26)$$

$$\tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\mu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

h_e : 各要素の代表長さ、 A_e : 各要素の面積

である。

4. 流体一構造連成問題のための有限要素方程式

最終的に、流体における有限要素方程式 (24)、(25) は以下のように書き換えることができる。

$$\bar{M} \dot{u}_i + K u_i - G p = f_i, \quad (27)$$

$$G^T u_i = 0. \quad (28)$$

ここで、 $\bar{M}$ は集中質量行列、 K は移流項と粘性項の行列、 G は勾配行列、 f_i は外力および、境界積分の項である。式 (27)、(28) の変数を次のように、移動境界 Γ_I (物体表面) 上の成分とそれ以外の成分とに分離して表す。

$$u_i = (u_i^\alpha, u_i^\gamma)^T, \quad w_i = (w_i^\alpha, w_i^\gamma)^T, \quad f_i = (f_i^\alpha, f_i^\gamma)^T \quad (29)$$

ここで、添え字 γ は移動境界 Γ_I 上の変数を表し、添え字 α はそれ以外の変数を表している。また、物体表面の変数を物体の重心で定義した変数は、以下の関係を満足する必要がある。

$$\text{適合条件 : } \dot{u}_i^\gamma = T^T \dot{u}, \quad u_i^\gamma = T^T u \quad (30)$$

$$\text{釣り合い条件 : } X + T f_i^\gamma = 0 \quad (31)$$

T は、物体の重心と物体表面の各節点の間の幾何学的な関係を表す行列である。

有限要素方程式 (27)、(28) に関して、式 (29) で示した、節点変数の分離をし、式 (30) の適合条件を代入すると、有限要素方程式は、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{(x_j)}^{\alpha\alpha} & \\ & \bar{M}_{(x_j)}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i^\alpha \\ T^T \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{(x_j)}^{\alpha\alpha} & K_{(x_j)}^{\alpha\gamma} \\ K_{(x_j)}^{\gamma\alpha} & K_{(x_j)}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^\alpha \\ T^T u \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{(x_j)}^\alpha \\ G_{(x_j)}^\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{i(x_j)}^\alpha \\ f_{i(x_j)}^\gamma \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} G_{(x_j)}^{\alpha T} & G_{(x_j)}^{\gamma T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^\alpha \\ T^T u \end{Bmatrix} = 0 \quad (33)$$

式 (32) の第 2 行より物体表面の節点力 f_i^γ を求め、釣り合い条件式 (31) を課して物体の運動方程式に代入すると次のようになる。

$$m_{(x_j)}^* \dot{u} + c_{(x_j)}^* u + kx = -T(K_{(x_j)}^{\gamma\alpha} u_i^\alpha - G_{(x_j)}^\gamma p) \quad (34)$$

ここで、

$$m_{(x_j)}^* = m + T \bar{M}_{(x_j)}^{\gamma\gamma} T^T, \quad c_{(x_j)}^* = c + T K_{(x_j)}^{\gamma\gamma} T^T$$

である。これは、物体の質量 m と減衰 c にその周囲の流体との連成による付加的な質量、減衰の効果がそれぞれ加わったことを意味している。

式 (32) の第 1 行は、物体表面節点以外の節点に関する流体の運動方程式であり、次のように書き改められる。

$$\bar{M}_{(x_j)}^{\alpha\alpha} \dot{u}_i + K_{(x_j)}^{\alpha\alpha} u_i - G_{(x_j)}^\alpha p = f_{i(x_j)}^\alpha - K_{(x_j)}^{\alpha\gamma} T^T u \quad (35)$$

また、式 (33) の連続式は、次のように書き改められる。

$$G_{(x_j)}^{\alpha T} u_i^\alpha + G_{(x_j)}^{\gamma T} T^T u = 0 \quad (36)$$

5. 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。

$$\bar{M}_{(x_j)}^{\alpha\alpha} \frac{u_i^{\alpha n+1} - u_i^{\alpha n}}{\Delta t} + K_{(x_j)}^{\alpha\alpha} u_i^{\alpha n+1/2} - G_{(x_j)}^\alpha p^{n+1} = f_{i(x_j)}^{\alpha*} - K_{(x_j)}^{\alpha\gamma} T^T u^{n+1/2} \quad (37)$$

$$G_{(x_j)}^{\alpha T} u_i^{\alpha n+1} + G_{(x_j)}^{\gamma T} T^T u^{n+1} = 0 \quad (38)$$

$$m_{(x_j)}^* \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + c_{(x_j)}^* u^{n+1/2} + kx^{n+1/2} = -T(K_{(x_j)}^{\gamma\alpha} u_i^{\alpha n+1/2} - G_{(x_j)}^\gamma p^{n+1}) \quad (39)$$

ここで、

$$u_i^{\alpha n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^{\alpha n+1} + u_i^{\alpha n}), \quad u^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$$

$$x^{n+1/2} = \frac{1}{2}(x^{n+1} + x^n)$$

である。

圧力 Poisson 方程式の導出については、運動方程式 (37) と連続式 (38) に対して、連続式 (38) を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する。

前時間ステップの圧力 p^n を近似的な圧力として、運動方程式 (37) の圧力を p^n に置き換えると、運動方程式 (37) は、未知流速 u_i^{n+1} を中間流速 $\tilde{u}_i^{n+1}$ に置き換えた次式になる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}^{\alpha\alpha} + \frac{\Delta t}{2} K^{\alpha\alpha} & \frac{\Delta t}{2} K^{\alpha\gamma} T^T \\ \frac{\Delta t}{2} T K^{\gamma\alpha} & m^* + \frac{\Delta t}{2} (c^* + \frac{\Delta t}{2} k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{u}_i^{\alpha n+1} \\ \Delta \tilde{u}^{n+1} \end{Bmatrix} = -\Delta t \begin{Bmatrix} K^{\alpha\alpha} u_i^{\alpha n} - f_i^{\alpha*} + K^{\alpha\gamma} T^T u^n - G^{\alpha} p^n \\ c u^n + \frac{\Delta t}{2} k u^n + k x^n + T (K^{\gamma\alpha} u_i^{\alpha n} + K^{\gamma\gamma} T^T u^n - G^{\gamma} p^n) \end{Bmatrix} \quad (40)$$

ここで、

$$\Delta \tilde{u}_i^{\alpha n+1} = \tilde{u}_i^{\alpha n+1} - u_i^{\alpha n}, \quad \Delta \tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} - u^n$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2}(u^{n+1} + u^n)$$

である。式 (37) と式 (40) の差をとると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}^{\alpha\alpha} + \frac{\Delta t}{2} K^{\alpha\alpha} & \frac{\Delta t}{2} K^{\alpha\gamma} T^T \\ \frac{\Delta t}{2} T K^{\gamma\alpha} & m^* + \frac{\Delta t}{2} (c^* + \frac{\Delta t}{2} k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i^{\alpha n+1} \\ \Delta u^{n+1} \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} G^{\alpha} \Delta p^{n+1} \\ T G^{\gamma} \Delta p^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

ここで、

$$\Delta u_i^{\alpha n+1} = u_i^{\alpha n+1} - \tilde{u}_i^{\alpha n+1}, \quad \Delta u^{n+1} = u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}$$

$$\Delta p^{n+1} = p^{n+1} - p^n$$

である。

式 (41) の発散をとり、式 (38) を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる。ただし、 $u_i^{n+1} \simeq \tilde{u}_i^{n+1}$ と仮定し、ここでは、式 (41) の右辺における $G^{\alpha T} \tilde{u}_i^{\alpha n+1}$ と $G^{\gamma T} T^T \tilde{u}^{n+1}$ 以外の項は省略している。

$$(G^{\alpha T} \bar{M}^{\alpha\alpha-1} G^{\alpha} + G^{\gamma T} T^T (m^*)^{-1} T G^{\gamma}) \Delta t \Delta p^{n+1} = - (G^{\alpha T} \tilde{u}_i^{\alpha n+1} + G^{\gamma T} T^T \tilde{u}^{n+1}) \quad (42)$$

本手法のアルゴリズムは、式 (40) $\Rightarrow$ 式 (42) $\Rightarrow$ 式 (41) となる。定常状態に収束する問題では、中間流速 $\tilde{u}_i$ が流速 u_i に収束し、

$$(G^{\alpha T} \bar{M}^{\alpha\alpha-1} G^{\alpha} + G^{\gamma T} T^T (m^*)^{-1} T G^{\gamma}) \Delta t \Delta p^{n+1}$$

$$= - (G^{\alpha T} \tilde{u}_i^{\alpha n+1} + G^{\gamma T} T^T \tilde{u}^{n+1}) \longrightarrow 0 \quad (43)$$

となる。

よって、この手法では、定常収束問題で式 (42) が連続式 (38) に収束するため、連続条件が Δt に依存しない。

6. 物体の運動方程式における固有値問題

物体の運動方程式は、次のような、微分方程式に書き換えることができる。

$$m_{(x_j)}^* \dot{u} + c_{(x_j)}^* u + kx = -T(K_{(x_j)}^{\gamma\alpha} u_i^{\alpha} - G_{(x_j)}^{\gamma} p) \quad (44)$$

この微分方程式においては、以下のような固有値問題が考えられる。

$$A_{(x_j)} \dot{v} + B_{(x_j)} v = F_{(x_j)}$$

$$A_{(x_j)} = \begin{bmatrix} m_{(x_j)}^* & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad B_{(x_j)} = \begin{bmatrix} c_{(x_j)}^* & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{(x_j)} = \begin{bmatrix} -T(K_{(x_j)}^{\gamma\alpha} u_i^{\alpha} - G_{(x_j)}^{\gamma} p) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}$$

$$A_{(x_j)} \dot{v} + B_{(x_j)} v = 0$$

$$v = \hat{u} e^{\lambda t}$$

$$\lambda A_{(x_j)} \hat{u} e^{\lambda t} + B_{(x_j)} \hat{u} e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda A_{(x_j)} \hat{u} + B_{(x_j)} \hat{u} = 0$$

$$\lambda = \lambda_R + i \lambda_I$$

ここで、この微分方程式のシステムの系の安定性の関係は、表-1 のように考えることができる。

表-1 $t \rightarrow \infty$ のときの解の性質

1. $\max\{\lambda_R\} < 0$ のとき、 $v(t) \rightarrow 0$ となる : 系は安定
2. $\max\{\lambda_R\} > 0$ のとき、 $v(t) \rightarrow \infty$ となる : 系は不安定 (発散振動)
3. $\max\{\lambda_R\} = 0$ のとき : 系は中立

表-1 において、注意すべきこととして、 $\max\{\lambda_R\} > 0$ のときは系は不安定になり発散振動をおこすことが解る。このような状態は、構造物のその周囲の流体との連成による付加的な効果によって発生する。この振動は構造物の破壊に直接関係する振動である。このことから、本研究では、この物体の運動方程式の固有値の安定性における安定形状同定を提案するものである。

7. 形状同定解析

7.1 評価関数

本研究で定義される安定性における安定形状同定とは、以下に示すような、固有値を用いた評価関数を最小にする同定形状座標を決定することである。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\lambda - \lambda_{obj})^T Q (\lambda - \lambda_{obj}) dt \quad (45)$$

ここで、 λ および λ_{obj} は、物体表面上における計算値と目的値、 Q は重み（対角）行列を表す。

また、この評価関数における同定形状座標 x_j の勾配は、以下のようになる。

$$\left[\frac{\partial J}{\partial x_j} \right] = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]^T Q (\lambda - \lambda_{obj}) dt \quad (46)$$

ここで $\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]$ は感度行列である。この、感度行列 $\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]$ は、次式によって求めることができる。

$$\lambda A_{(x_j)} \hat{u} + B_{(x_j)} \hat{u} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} A \hat{u} + \lambda \frac{\partial A}{\partial x_j} \hat{u} + \lambda A \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j} \hat{u} + B \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} A \hat{u} + (\lambda A + B) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j} + \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \hat{u} = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \hat{v}^T A \hat{u} + \hat{v}^T (\lambda A + B) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j} \\ + \hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \hat{u} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\hat{v}^T (\lambda A + B) = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \hat{v}^T A \hat{u} + \hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \hat{u} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = - \frac{\hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A_{(x_j)}}{\partial x_j} + \frac{\partial B_{(x_j)}}{\partial x_j} \right) \hat{u}}{\hat{v}^T A_{(x_j)} \hat{u}} \quad (53)$$

$\hat{u}$: 右固有ベクトル, $\hat{v}$: 左固有ベクトル

本研究では、物体の運動方程式における質量、減衰、剛性の値は定数である（形状の変化によって各値は変わらない）と仮定している。このことから、式 (53) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} &= - \frac{\hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A_{(x_j)}}{\partial x_j} + \frac{\partial B_{(x_j)}}{\partial x_j} \right) \hat{u}}{\hat{v}^T A_{(x_j)} \hat{u}} \\ &= \frac{\hat{v}_1^T T \left\{ \lambda \frac{\partial \bar{M}_{(x_j)}^{\gamma\gamma}}{\partial x_j} + \frac{\partial K_{(x_j)}^{\gamma\gamma}}{\partial x_j} \right\} T^T \hat{u}_1}{\hat{v}_1 \left\{ m \hat{u}_1 + T \bar{M}_{(x_j)}^{\gamma\gamma} T^T \hat{u}_1 \right\} + \hat{v}_2 k \hat{u}_2} \quad (54) \\ \hat{u} &= [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2]^T, \ \hat{v} = [\hat{v}_1 \ \hat{v}_2]^T \end{aligned}$$

7.2 Sakawa-Shindo 法

最小化手法として、Sakawa-Shindo 法²⁵⁾を用いる。この方法は、評価関数 J において、以下に示すような付加項を導入した修正評価関数を用いて最小化をはかるものである。

$$K^{(l)} = J^{(l)} + \frac{1}{2} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})^T c^{(l)} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}) \quad (55)$$

ここで、 (l) は反復回数、 $c^{(l)}$ は重み（対角）行列であり、その対角項の各成分は非負であるように選ぶ。また、式 (55) の右辺第二項、すなわち、ペナルティ項 $\frac{1}{2} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})^T c^{(l)} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})$ は、繰り返し計算の初期における計算が不安定になるのを防ぐために用いられるものである。この修正評価関数において停留条件 $\frac{\partial K^{(l)}}{\partial x_j} = 0$ を適用することにより次式を得る。

$$x_j^{(l+1)} = x_j^{(l)} - c^{-(l)} \left[\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]^T Q (\lambda - \lambda_{obj}) \right\}^{(l)} dt \right] \quad (56)$$

この式が、同定すべき形状座標を求める式となる。ここで、重み行列 $c^{(0)}$ は、以下のよう定める。

$$c^{(0)} = \frac{\left\| \text{Re} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]^T Q (\lambda - \lambda_{obj}) \right\}^{(0)} dt \right\} \right\|_{\infty} I}{\Delta \hat{x}_j^{(1)} \max} \quad (57)$$

ここで、 $\|\cdot\|_{\infty}$ は最大ノルム、 I は単位行列、 $\Delta \hat{x}_j^{(1)} \max$ は $l=1$ 回目の最大移動量であり、 $J^{(1)} \leq J^{(0)}$ となるように指定する。また、修正評価関数のペナルティ項の影響は、同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ が収束する $x_j^{(l+1)} \simeq x_j^{(l)}$ につれて、少なくなるものである。よって、同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ が収束するときは、修正評価関数は評価関数と同値となる。このアルゴリズムは以下のようになる。

1. $l=0$ とし初期形状 $x_j^{(0)}$ を設定する。
2. 式 (47) を用いて状態量 $\lambda^{(l)}$, $\hat{u}_i^{(l)}$, $\hat{v}_i^{(l)}$ を求める。
3. 式 (45) を用いて評価関数 $J^{(l)}$ を求める。
4. 式 (54) を用いて感度行列 $\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right]^{(l)}$ を求める。
5. 式 (56) を用いて同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ を求める。
6. 誤差ノルム $e = \|x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}\|_{\infty}$ を計算し、 $e < \varepsilon$ なら計算を終了する。そうでなければ、次のステップに進む。
7. 式 (47) を用いて状態量 $\lambda^{(l+1)}$, $\hat{u}_i^{(l+1)}$, $\hat{v}_i^{(l+1)}$ を求める。
8. 式 (45) を用いて評価関数 $J^{(l+1)}$ を求める。
9. 重み行列 $c^{(l)}$ を次のように修正する。
 $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ ならば $c^{(l+1)} = 0.9c^{(l)}$, $l+1 \rightarrow l$ と

してステップ 4 へ、そのほかは $c^{(l)} = 2.0c^{(l)}$ としステップ 5 へ。

8. 数値解析例

8.1 解析例 1

解析例としてまずはじめに、本手法の順解析における検証の計算として、円柱のロックイン現象（渦励振）の解析を行う。解析モデルは、Anagnostopoulos and Bearman²⁾が、レイノルズ数 90 ～ 150 の範囲を対象とした水槽実験を行い、レイノルズ数 115 付近の流れでロックインを捕らえることに成功したものをを用いる。ここで、ロックインとは、物体からの渦放出周波数が、物体の運動の影響を受けて、物体の固有振動数に引き込まれる現象である。図-4、5 に解析領域、有限要素分割図を示す。

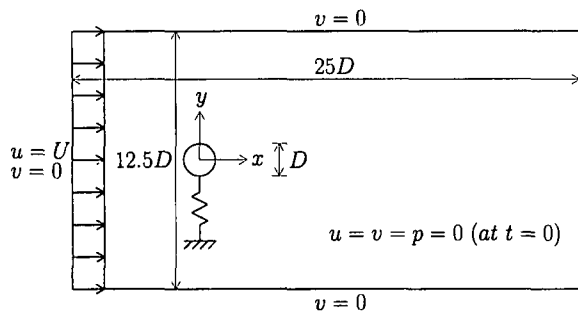


図-4 解析領域

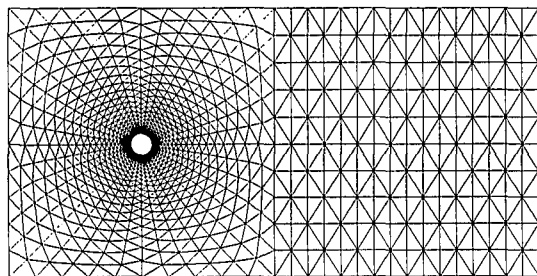
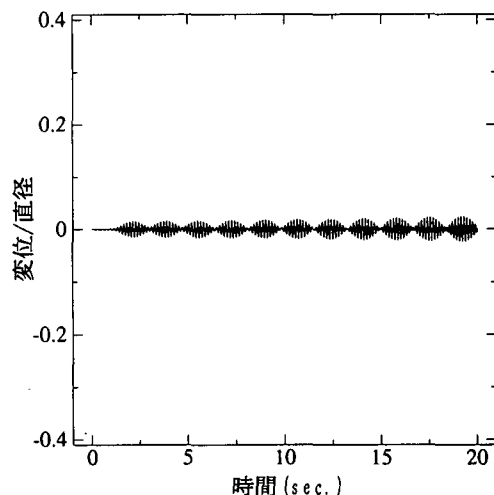


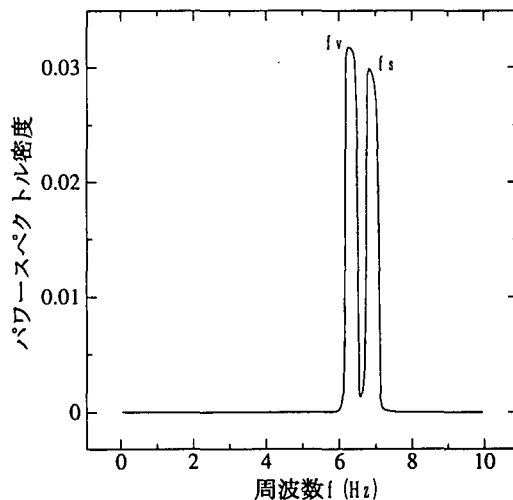
図-5 有限要素分割図（節点数：1016、要素数：1920）

解析の諸元は、 $D = 0.16\text{cm}$ ($1.6 \times 10^{-3}\text{m}$)、 $\rho = 0.9982\text{g/cm}^3$ ($9.982 \times 10^2\text{kg/m}^3$)、 $\mu = 0.01002\text{g/s/cm}$ ($1.002 \times 10^{-3}\text{kg/s/m}$)、 $m = 2.979\text{g}$ ($2.979 \times 10^{-3}\text{kg}$)、 $c = 0.325\text{g/s}$ ($3.25 \times 10^{-4}\text{kg/s}$)、 $k = 5790.0\text{g/s}^2$ (5.79kg/s^2) であり、すべて Anagnostopoulos and Bearman らの水槽実験と同じである。また、円柱は剛体とし、バネ支持された 1 自由度のバネ・マス系としている。解析は、 $Re = 100$ 、 $Re = 110$ 、

$Re = 115$ 、 $Re = 135$ の 4 ケースのレイノルズ数を用いて行った。図-6、7、8、9 に各レイノルズ数を用いて計算を行った変位とこの変位におけるパワースペクトル密度を示す。ここで、各図中の f_s 、 f_v は、固有振動数、渦放出周波数を表している。



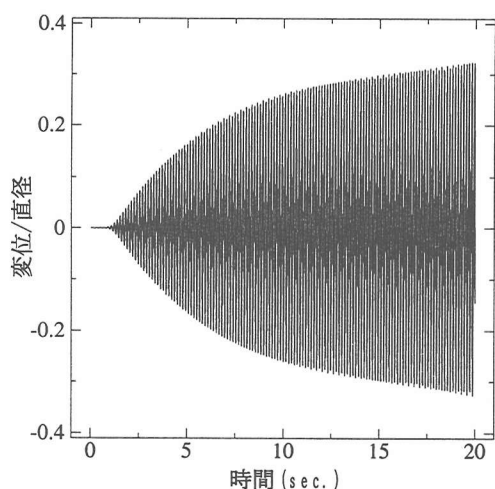
(a) 円柱の変位の時刻歴



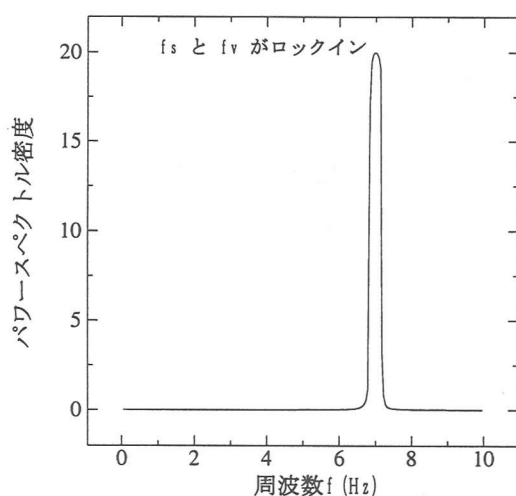
(b) パワースペクトル密度

図-6 円柱の変位とパワースペクトル密度 ($Re=100$)

図-6、9 のパワースペクトル密度の分布図において、渦放出周波数が、固有振動数より小さいか、または大きいとき、2 つの空気力成分、すなわち、固有振動数に対応する成分と渦放出周波数に対応する成分の存在が見られる。これに対し、図-7、8 を見ると渦放出周波数が固有振動数に近い値のときには渦に対応する成分のみが存在し、明らかにロックイン現象が認められる。また、図-7、8 においては、ロックインしていることにより、変位が図-6、9 に比べて非常に大きくなっている。このロックイン現象は図-7、8 のように、ある振動数領

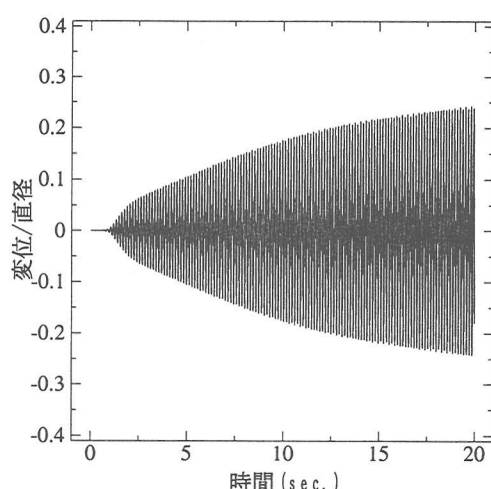


(a) 円柱の変位の時刻歴

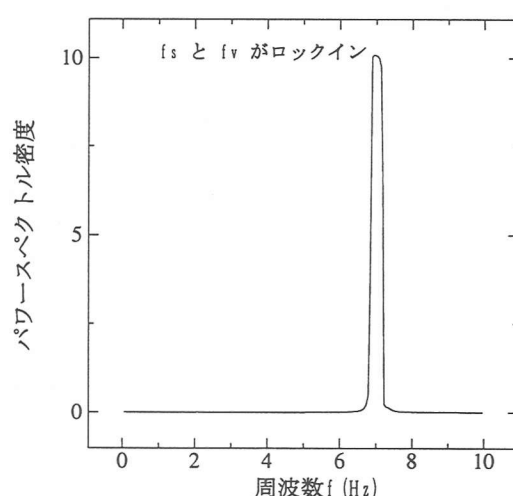


(b) パワースペクトル密度

図-7 円柱の変位とパワースペクトル密度 (Re=110)



(a) 円柱の変位の時刻歴



(b) パワースペクトル密度

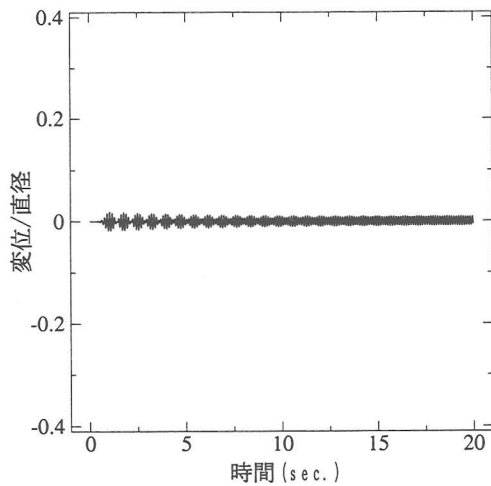
図-8 円柱の変位とパワースペクトル密度 (Re=115)

域にわたって見られる。

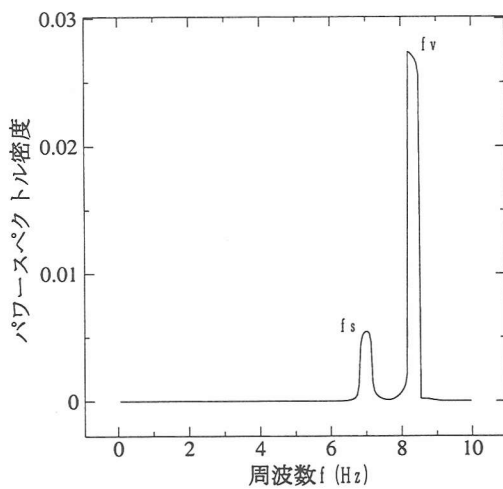
8.2 解析例 2

固有値を評価関数に用いた安定形状同定として、円柱周りの解析を行う。この解析は、目的形状を用いてあらかじめ順解析を行い、この計算によって得られた各時間ごとの固有値を評価関数の目的値とし、この目的形状とは異なる形状から逆解析を開始して、評価関数が最小となるような形状を求めるものであり、本研究で提案した、逆解析手法の検証を目的としている。解析領域、有限要素分割図および解析を行うための諸元は、解析例 1 と同様のものを用いている。形状同定解析を行うための円柱の初期形状は、直径 1.0D とし、目的形状は、直径 0.8D としレイノルズ数はともに 110 を用いた。また、逆解析の計算を行うに当たって、 $\Delta \hat{x}_j^{(1)} = 10^{-3}$ 、

$\varepsilon = 10^{-5}$ を用いた。ここで、逆解析を行うための順解析の実時間における計算は、本来は、解析例 1 で行ったほどの実時間 ($T=20\text{sec.}$) を計算するのが理想的であるが、この実時間を用いて計算を行うためには、現状のコンピュータでは、非現実的な計算時間を要する。本研究の最も重要な目的は、提案した逆解析手法が、評価関数を最小にするような形状を求めることが出来るか否かなので、図-10、11 に示すように渦が発生し、その渦がある程度周期的になっていると考えられる $T=2\text{sec.}$ を順解析における実時間の計算時間とした。図-12、13 に同定された固有値の実数部と形状を示す。図-12 を見ると同定された形状における固有値が非常によく目的形状の固有値に一致していることが解る。



(a) 円柱の変位の時刻歴



(b) パワースペクトル密度

図-9 円柱の変位とパワースペクトル密度 (Re=135)

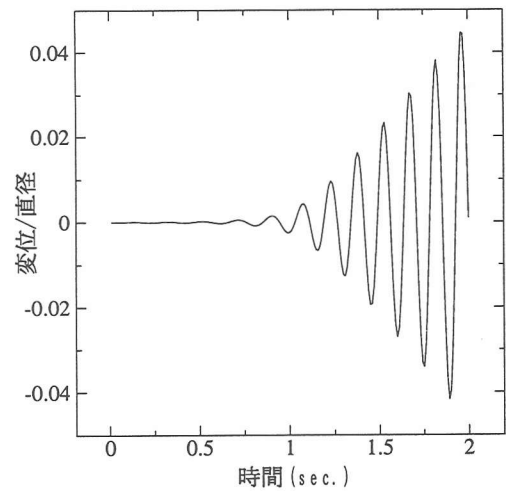
8.3 解析例 3

解析例 2 では、同定された形状における固有値が非常によく目的形状の固有値に一致しているが、形状そのものは一致していない。これは、評価関数が固有値のみを考慮しており、形状そのものは考慮していないためであると考えられる。また、同定すべき変数が、非常に多いことから、評価関数を小さくするための形状がいくつも存在すると考えられる。このことから、解析例 2 として、以下に示すような、形状修正式 (60) を用いて同定解析をおこなうものである。

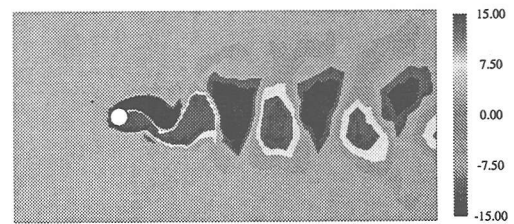
$$J_c = \frac{1}{2} (x_k^{(l)old} - x_k^{(l)new}, x_k^{(l)old} - x_k^{(l)new})$$

$$x_j^{(l)new} = c^{(l)} \hat{x}_j \quad (58)$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial c^{(l)}} = -(\hat{x}_k, x_k^{(l)old}) + c^{(l)} (\hat{x}_k, \hat{x}_k) = 0$$



(a) 円柱の変位の時刻歴



(b) 2 秒後の渦度

図-10 円柱の変位と渦度 (D=0.16, Re=110)

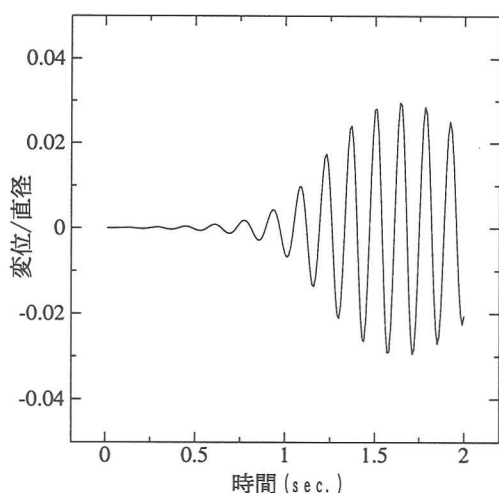
$$c^{(l)} = \frac{(\hat{x}_k, x_k^{(l)old})}{(\hat{x}_k, \hat{x}_k)} \quad (59)$$

$$x_j^{(l)new} = \frac{(\hat{x}_k, x_k^{(l)old})}{(\hat{x}_k, \hat{x}_k)} \hat{x}_j \quad (60)$$

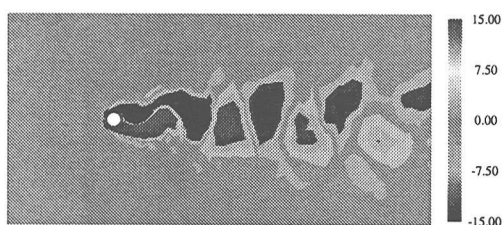
ここで、上式中の (l) , $x_j^{(l)old}$, $x_j^{(l)new}$, $\hat{x}_j$ は最適化手法における反復回数、同定された座標値、修正された座標値、指定された形状 (円、楕円、正方形など) をそれぞれ示している。形状修正式 (60) からわかるように、この問題は、ある指定された形状における、縮尺率を決定する 1 変数の同定解析となっている。ここで、解析条件は、解析例 1 と同じものを用いている。図-14 に同定された形状を示す。図-14 を見ると同定された形状が目的形状と一致していることが解る。

8.4 解析例 4

解析例 2、3 で用いた目的値は、目的形状を用いて解析を行い、それを目的値にしている。しかし、実際的な問題においては、固有値の目的値を知ることは困難である。さらに、固有値は通常、複素数になる。ここで、実際的な問題を考えると、固有値の安定性は固有値の実数部の正負が問題となる。よって、実際の問



(a) 円柱の変位の時刻歴



(b) 2 秒後の渦度

図-11 円柱の変位と渦度 ($D=0.128, Re=110$)

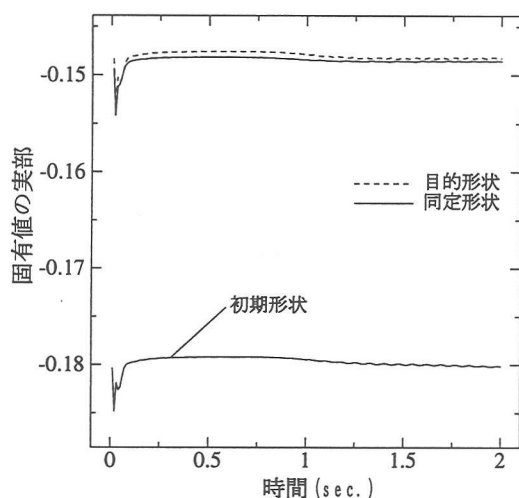


図-12 固有値の比較

題においては、ある実数のマイナスの値を評価関数の目的値として安定形状同定解析を行うことにより、解析対象とした流れ場においては発散振動を起こさない形状を同定することができる。このことから、解析例 4 では評価関数において固有値の実数部のみを考慮する手法を提案するものである。式 (45) で用いた固有

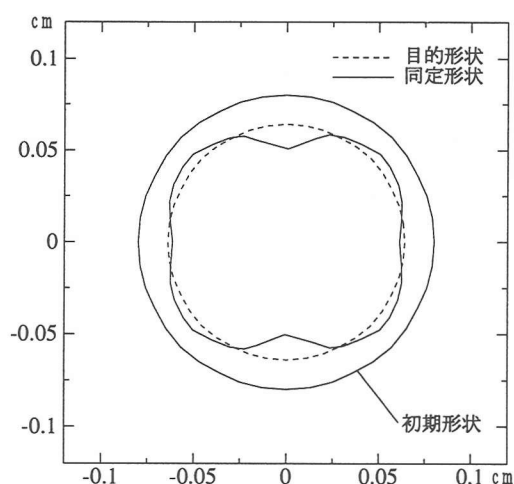


図-13 形状の比較

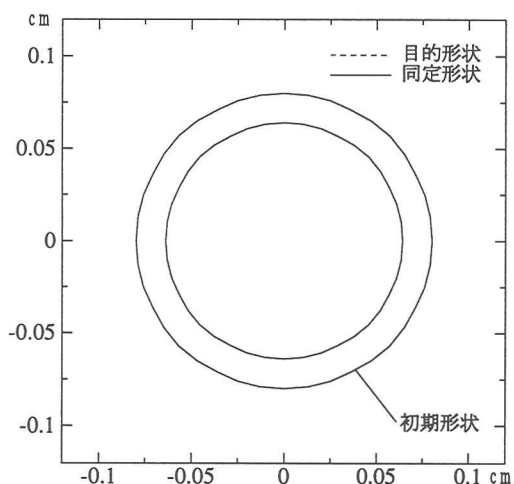


図-14 形状の比較

値 λ は一般に複素数であるから実数部を λ_R 、虚数部を λ_I とすると複素固有値 λ は以下のように表すことができる。

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I \quad (61)$$

ここで、固有値の実数部のみを評価関数に考慮すると、評価関数は以下になる。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\lambda_R - \lambda_{Robj})^T Q (\lambda_R - \lambda_{Robj}) dt \quad (62)$$

式 (62) に示した評価関数における同定解析を行う場合には、固有値の実数部の感度行列が必要になる。本研究では複素固有値の感度行列が式 (63) のように表せることから、固有値の実数部の感度行列を式 (64) のようにして求めることを提案するものである。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = - \frac{\hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A(x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial B(x_j)}{\partial x_j} \right) \hat{u}}{\hat{v}^T A(x_j) \hat{u}} = \frac{\partial \lambda_R}{\partial x_j} + i \frac{\partial \lambda_I}{\partial x_j} \quad (63)$$

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial x_j} = \operatorname{Re} \left\{ - \frac{\hat{v}^T \left(\lambda \frac{\partial A(x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial B(x_j)}{\partial x_j} \right) \hat{u}}{\hat{v}^T A(x_j) \hat{u}} \right\} \quad (64)$$

ここで、固有値の目的値 λ_{Robj} は解析例 2、3 で用いた目的値を時間ステップにおいて、平均化したものを用いている。また、解析条件は、解析例 2 と同じものを用いている。解析例 4 の目的は、この実部のみを考慮した手法が、評価関数を最小にするような形状を求めることが出来るか否かである。図-15、16 に同定された固有値の実数部と形状を示す。図-15 を見ると同定された形状における固有値が非常によく目的形状の固有値に一致していることが解る。

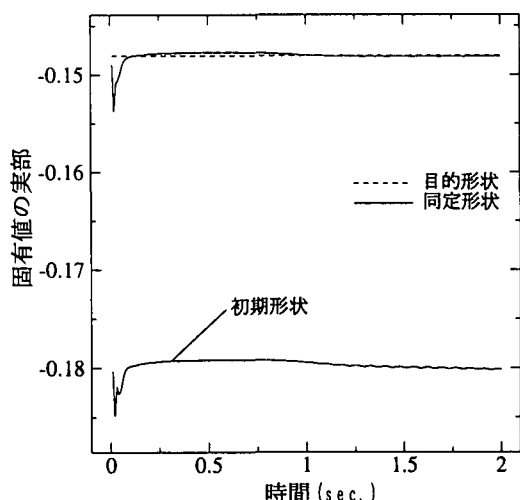


図-15 固有値の比較

9. 結言

本研究では、流体-構造連成問題のための有限要素方程式を導出し、物体の運動方程式において、流体と連成したことにより生じる付加的な質量、減衰の効果がそれぞれ加わったことに着目し、この物体の運動方程式における固有値の安定性を用いた安定形状同定を提案した。また、解析例として円柱まわりの形状同定解析を取り上げ固有値を用いた安定形状同定の流体-構造連成問題への可能性を示した。今後は、解析例 4 示した固有値の実数部のみを評価関数に考慮する手法を

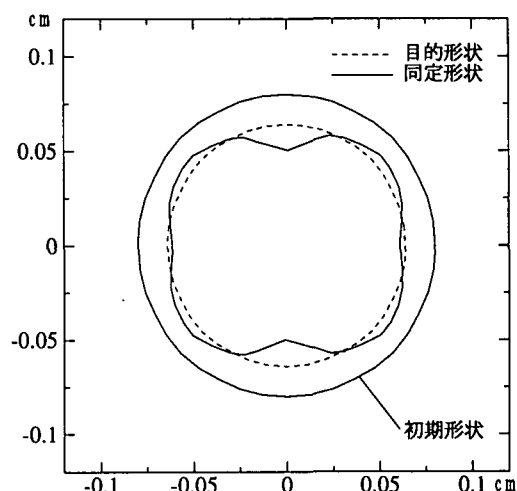


図-16 形状の比較

用いることにより形状同定解析を行い、ある実数のマイナスの値を評価関数の目的値とすることにより、発散振動の起こらない構造物を設計して行く所存である。また、今後の課題としては、より複雑かつ現実的な振動現象（ギャロッピング、曲げフラッタ、振れフラッタ、曲げ・振れフラッタなど）を解析可能とするために、現象面においては、

- 2次元問題 → 3次元問題
- 剛体 → 弾性体

の拡張が必要である。また、解析面においては、

- 現象を表現するための十分な有限要素分割の考慮
- 物体が移動することによる適応的なメッシュ生成法の開発が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) T.Nomura and T.J.Hughes: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **95**, pp.115-138, 1992.
- 2) P.Ananostopoulos and P.W.Bearman: Response characteristics of vortex-excited cylinder at low Reynolds numbers, *J. Fluids Struct.*, **6**, pp.39-50, 1992.
- 3) T.Nomura: Finite element analysis of vortex-induced vibrations of bluff cylinders, *J. Wind Engrg. Indust. Aerodyn.*, **46 & 47**, pp.587-594, 1993.
- 4) A.Anju, A.Maruoka and M.Kawahara: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for fluid-structure interaction problem, *2nd Japan-US Symposium on Finite Element Methods in Large-Scale Computational Fluid Dynamics*, pp.25-28, 1994.
- 5) T.Tamura, K.Kuwahara: Numerical Study on Aerodynamic Instability of Oscillating Rectangular Cylinders, *J. Wind Engrg. Indust. Aero.*, **41**, 1993.
- 6) T.Tamura, Y.Itoh, A.Wada and K.Kuwahara: Numerical Investigation on the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders, *J. Wind Engrg. Indust. Aero.*, **46 & 47**, 1993.
- 7) T.Tamura, Y.Itoh, A.Wada and K.Kuwahara: Nu-

- merical Study of pressure fluctuations on Rectangular Cylinder in Aerodynamic Oscillation, *J. Wind Eng. Indust. Aero.*, **54** & **55**, 1995.
- 8) A. Maruoka, M. Marin and M. Kawahara: Optimal control in Navier-Stokes equations, *IJCFD*, **9**, pp.313-322, 1998.
 - 9) 弓削・岩井・菊地: 均質化法による塑性変形を受ける二次元構造物の最適化, 計算工学会, **1**, pp.613-616, 1996.
 - 10) 畔上・下田・須貝: 変位分布が既定された線形弾性体形状の解析, 計算工学会, **1**, pp.621-624, 1996.
 - 11) 片峯・畔上・山口・小嶋: ポテンシャル場の形状同定解析, 計算工学会, **1**, pp.629-632, 1996.
 - 12) 柏村・白鳥・干: 実験計画法、数値計画法を用いた構造最適化 その1 解析手法の開発, 計算工学会, **1**, pp.641-644, 1996.
 - 13) 柏村・白鳥・干: 実験計画法、数値計画法を用いた構造最適化 その2 非線形問題への応用, 計算工学会, **1**, pp.645-648, 1996.
 - 14) T.J. Hughes, W.K. Liu and T.K. Zimmerman: Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **29**, pp.329-349, 1981.
 - 15) J. Donea, S. Giuliani and J.P. Halleux: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **33**, pp.689-723, 1982.
 - 16) M. Fortin and A. Fortin: Newer and newer elements for incompressible flow, *Finite Elements in Fluids*, **Vol.6**, John Wiley & Sons Ltd, pp.171-187, 1985.
 - 17) 山田 貴博: 安定化有限要素法と気泡関数要素, 計算工学講演会論文集, **Vol.1**, pp.167-170, 1996.
 - 18) 山田 貴博: 非適合気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素スキーム, 計算工学講演会論文集, **Vol.2**, pp.411-414, 1997.
 - 19) 山田 貴博: 非圧縮体に対する MINI 要素の数値不安定性, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **Vol.19**, pp.101-106, 1995.
 - 20) A.N. Brooks and T.J.R. Hughes: Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **32**, pp.199-259, 1982.
 - 21) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson: A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **Vol.4**, pp.557-598, pp.619-640, 1984.
 - 22) V. Selmin, J. Donea and L. Quartapelle: Finite element methods for nonlinear advection, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **52**, pp.817-845, 1985.
 - 23) 松本・梅津・川原: 線形型気泡関数を用いた非圧縮粘性流体解析と適応型有限要素法, 応用力学論文集, **Vol.2**, 1999.
 - 24) 松本・梅津: 気泡関数を用いた陽的有限要素法解析の検討, 数値流体力学シンポジウム, **8**, pp.635-638, 1994.
 - 25) Y. Sakawa and Y. Shindo: On global convergence of an algorithm for optimal control, *Transactions on automatic control, IEEE, AC-25(6)*, pp.1149-1153, 1980.
 - 26) (社)日本鋼構造協会編: 構造物の耐風工学, 東京電機大学出版局, 1998.
 - 27) M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara: Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **Vol.13**, pp.805-840, 1991.
 - 28) T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **59**, pp.85-99, 1986.
 - 29) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **bf 95**, pp.221-242, 1992.
 - 30) F. Brezzi, M.-O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Roge: A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **96**, pp.117-129, 1992.
 - 31) R. Pierre: Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **68**, pp.205-227, 1988.
 - 32) L.P. Franca and C. Farhat: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **123**, pp.299-308, 1995.
 - 33) C. Baicocchi, F. Brezzi and L.P. Franca: Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type method (Ga.L.S.), *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **105**, pp.125-141, 1993.
 - 34) J.C. Simo and F. Armero: Unconditional stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler Equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **111**, pp.111-154, 1994.
 - 35) T. Yamada: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, **Vol.9**, pp.1567-1576, 1995.
 - 36) A. Mizukami: An implementation of the Streamline-Upwind/Petrov Galerkin method for linear triangular elements, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **49**, pp.357-364, 1985.
 - 37) R. Pierre: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Num. Anal.*, **Vol.32**, pp.1210-1224, 1995.
 - 38) J.C. Simo, F. Armero and C. Taylor: Galerkin finite element methods with bubble for advection dominated incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **Vol.38**, pp.1475-1506, 1995.
 - 39) C.P. Jackson: A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies, *J. Fluid Mech.*, **182**, pp.23-45, 1987.
 - 40) M. Morzynski and F. Thiele: Numerical stability of a flow about a cylinder, *Z. Angew. Math. Mech.*, **71**, 5, pp.424-428, 1991.
 - 41) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee, and C.D. Upson: A modified finite-element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part 2 Applications, *Int. J. Numer. Method Fluids*, **4**, pp.619, 1984.
 - 42) Y. Ding and M. Kawahara: Linear stability of incompressible flows using finite element method, Submitted to *Int. J. Numer. Method Fluids*, 1997.
 - 43) W. Arnoldi: The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem, *Quart. Appl. Math.*, **9**, pp.17, 1951.
 - 44) Y. Saad: Variations on Arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices, *Lin. Alg. Appl.*, **34**, pp.269, 1980.
 - 45) T. Nomura: ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **112**, pp.291-308, 1994.

(2000年4月21日受付)