

# 移動境界を考慮した Space-Time 有限要素法による 浅水長波流れ解析

Space-Time Finite Element Analysis For Shallow Water Problems  
Considering Moving Boundaries

桜庭雅明\*・榎山和男\*\*・菅野諭\*\*\*

Masaaki SAKURABA, Kazuo KASHIYAMA and Satoshi SUGANO

\*正会員 工修 日本工営(株) 情報システム部 (〒102-8539 東京都千代田区麹町5-4)

\*\*正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

\*\*\* 工修 群馬県 前橋土木事務所 (〒371-0013 群馬県前橋市西片貝町3-341)

This paper presents a Space-Time finite element method for shallow water flows with moving boundaries. For the stabilization techniques, the streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) is employed and the shallow water equation based on conservation variables is used for water equation. In order to determine the position of shoreline accurately, an iterative algorithm is used. Wave run-up problems are solved for numerical example and the computed results are compared with experimental results. This method is shown to be a useful tool for the analysis of shallow water flows.

Key Words : *Shallow Water Flows, Space-Time FEM, Moving Boundaries, Wave Run-up*

## 1. はじめに

津波や高潮による陸域への波の遡上による災害は、人間の生命・財産に直接的に影響を与えるため重要な社会問題となっている。津波、高潮による災害予測を行う上で最も重要なことは、遡上域を精度良く予測することであり、模型実験による方法と数値シミュレーションによる方法により検討がなされている。近年では、計算機性能および計算技術の進歩、さらにGISの進歩による数値地図の整備によって、数値シミュレーションによる方法が数多く用いられるようになってきている。これらの流れは水深に比べて波長が長いので、基礎方程式としては浅水長波方程式を用いることが一般的である。

数値シミュレーションを行う場合、移動する水際線の境界(水と陸の境界部分)に対する処理を精度良く行うことが重要であり、このように移動境界処理が必要な問題を移動境界問題という。移動境界問題に対する数値計算手法はいくつか提案されているが、図-1のように水際線をEuler的に扱う方法<sup>1)~4)</sup>とLagrange的に扱う方法<sup>5)</sup>に大きく分類される。Euler的手法は計算領域をあらかじめ要素分割して、各時間ステップにおいて各要素が陸域か水域かを判定する方法である。この方法は、水際線を間接的に表現する方法であり、複雑な地形に対しても計算は比較的容易に行える長所がある。しかし、水際線を間接的に表現しているため、水際線付近の計算精度や水際線の位置が要素サイズに依存する。一方、Lagrange的手法は水際線を直接的に表

現するため、Euler的手法に比べ水際線位置を精度良く求めることが可能でかつ水際線付近の計算精度も高い。しかし、複雑地形に対する適用性はEuler的手法に比べるとやや劣る。

本研究では、移動境界を正確に考慮できる浅水長波流れ解析手法の開発を目指して、Lagrange的手法を採用する。Lagrange的手法には、古くからALE(Arbitrary Eulerian-Lagrangian)法<sup>6)</sup>が知られているが、近年、空間・時間領域に対して有限要素法を適用するSpace-Time法<sup>7)~9)</sup>が提案されている。この手法は、ALE法と精度的には等価であるが安定性が高いことが報告されており、著者らも移動境界を考慮しない浅水長波流れに対して適用を行っている<sup>10)</sup>。

そこで本論文では、Space-Time有限要素法による移動境界を考慮した浅水長波流れ解析手法を提案するものである。浅水長波方程式の離散化手法にはSUPG(streamline upwind/Petrov-Galerkin)法<sup>11),12)</sup>に基づいた安定化有限要素法を用い、移流項の卓越に対する計算の不安定性を解消した。また、水際線位置の決定方法には、最小自乗法に基づいた繰り返し計算法を適用して移動境界位置の高精度化を図っている。本手法の有効性を検討するために、数値解析例として孤立波の浅水変形問題の解析<sup>4)</sup>を行い、計算精度と安定性に関する検討を行った。また、水際線位置の計算精度を検討するために、実験値および解析解が存在する遡上波の解析<sup>13)</sup>を行い、水際線での境界の移動状況と遡上する波の変形状況に関する考察を行った。

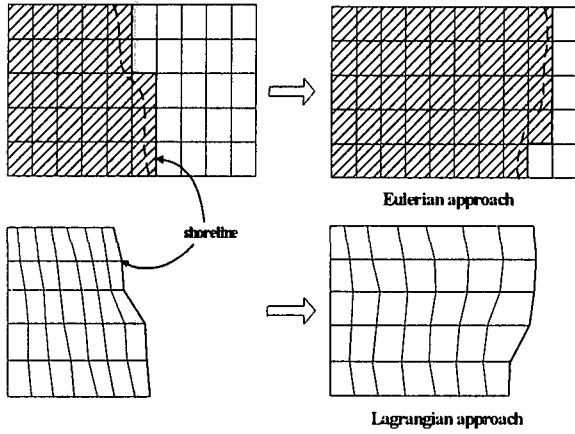


図-1 移動境界処理方法の分類

## 2. 基礎方程式と境界条件

津波や高潮等の浅水長波の仮定に基づいた基礎方程式は、非圧縮粘性流体の基礎方程式を鉛直方向に平均化した浅水長波方程式で表現される。保存形の浅水長波方程式は式(1)のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{R} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{U}$ は保存変数であり、次式のように定義される。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $H$ は全水深、 $u$ および $v$ はそれぞれ、平均流速の方向成分を示す(図-2参照)。また、 $\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{K}_{ij}$ はそれぞれ移流項と拡散項のマトリクスであり、次式のようになる。

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gH & 2u & 0 \\ uv & v & u \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gH & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\nu u}{H} & \frac{2\nu}{H} & 0 \\ -\frac{\nu v}{H} & 0 & \frac{\nu}{H} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu u}{H} & \frac{\nu}{H} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu u}{H} & 0 & \frac{\nu}{H} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu u}{H} & \frac{\nu}{H} & 0 \\ -\frac{2\nu v}{H} & 0 & \frac{2\nu}{H} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 $\nu$ は動粘性係数を示す。また、 $\mathbf{R}$ は圧力と底面摩擦に関する項であり次式のようになる。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gH \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{(\tau_b)_x}{\rho} \\ -gH \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{(\tau_b)_y}{\rho} \end{bmatrix} \quad (9)$$

なお、底面摩擦力は以下のようになる。

$$(\tau_b)_i = \frac{n^2 g}{h^{1/3}} u_i \sqrt{u_k u_k} \quad (10)$$

ここに、 $n$ はManningの粗度係数、 $g$ は重力加速度、 $h$ は水深を表す。

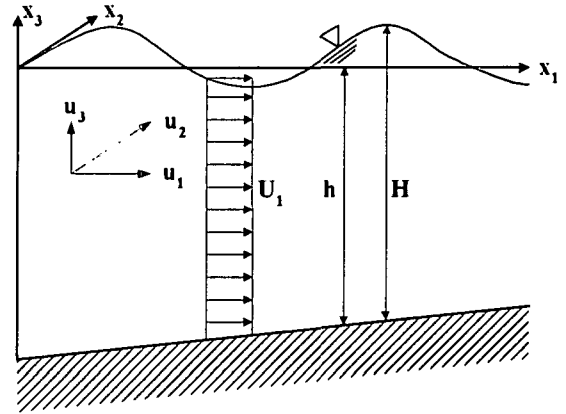


図-2 領域の定義

## 3. 安定化有限要素法による離散化

### 3.1 有限要素方程式の導出

Space-Time有限要素法は、時間と空間の両方に対して有限要素法を適用する方法である。まず、図-3に示すように時間・空間領域を $N$ 個の時間・空間スラブ $Q_n$ に分割する。ここに、 $Q_n$ は時刻レベル $t_n$ と $t_{n+1}$ の間( $I_n$ )の時間・空間領域である。弱形式における積分は時間・空間領域 $Q_n$ に対して行われる。各時刻・空間スラブ $Q_n$ は時間・空間要素 $Q_n^e$ ( $e = 1, 2, \dots, (n_{el})_n$ )に分割される。ここで $n$ は時間・空間スラブの番号を表し、 $(n_{el})$ は1つの時間・空間スラブ内の要素の総数を表している。ここで用いられる時間・空間要素の補間関数は、時間・空間ともに一次の多項式を用いており、空間に対しては連続であるが時間に対しては時刻レベルを横切って不連続なものである。基礎方程式(1)に対して、時間方向と空間方向の離散化にSpace-Time法を適用すると、(11)のような重み付き残差方程式を得る。

$$\int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{Q_n} \left( \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) dQ \\
& + \int_{\Omega_n} (\mathbf{U}^*)_n^+ \cdot ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \tau (\mathbf{A}_k^h)^T \left( \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_k} \right) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{R} \right] dQ \\
& + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \delta \left( \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\
& = \int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R} dQ + \int_{P_n} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{H} dP. \quad (11)
\end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{U}^*$ は保存変数に関する重み関数、 $\mathbf{H}$ はノイマン型の境界条件、 $P_n$ は時間・空間スラブの縦境界、 $\tau, \delta$ は安定化のためのパラメータである<sup>8)</sup>。左辺第1項、第2項は通常の Galerkin 項、第3項は時刻  $t = t_n$  における解の連続性を弱く要求するものである。第4、5項は安定化に寄与する項であり、第4項は上流化による安定化項 (SUPG 項)、第5項は衝撃補足 (shock-capturing) 項である。また、第3項における  $(\dots)_n^+, (\dots)_n^-$  は、それぞれの境界における節点の上限値、下限値を表しており次式で定義される。

$$(\mathbf{U}^h)_n^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}(t_n \pm \epsilon) \quad (12)$$

なお、式(11)の時空間積分は、次のように表される。

$$\int_{Q_n} \dots dQ = \int_{I_n} \int_{\Omega} \dots d\Omega dt \quad (13)$$

$$\int_{P_n} \dots dP = \int_{I_n} \int_{\Gamma} \dots d\Gamma dt \quad (14)$$

また、初期条件は保存変数の初期値の下限値を用いるものとして次式のように定義する。

$$(\mathbf{U})_0^- = \mathbf{U}_0, \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{U}_0$ はベクトル  $\mathbf{U}$  の初期値である。また、SUPG 項における上流化パラメータ  $\tau$  は以下の関数を与える。

$$\tau = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2\|u\|}{h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

ここで  $h$  は要素サイズであり、次式のように規定する。

$$h = 2 \left( \sum_{e=1}^{n_{el}} s \cdot \nabla \cdot \mathbf{N}_\alpha \right)^{-1} \quad (17)$$

ここに、 $s$  は流速の単位方向成分、 $\mathbf{N}_\alpha$  は形状関数を表す。

Space-Time 有限要素法を移動境界問題に適用する場合、有限要素は節点移動の影響によって時間・空間要素が歪んだ三角柱となる。そのため、時間・空間要素を積分する場合はそれぞれの要素に対して、図-4のような  $(\xi, \theta)$  座標系に座標変換を行う必要が生じる。この  $(\xi, \theta)$  座標系は、各要素に対する正規化された座標である。  $(x, t)$  座標系から  $(\xi, \theta)$  座標系へ変換することを

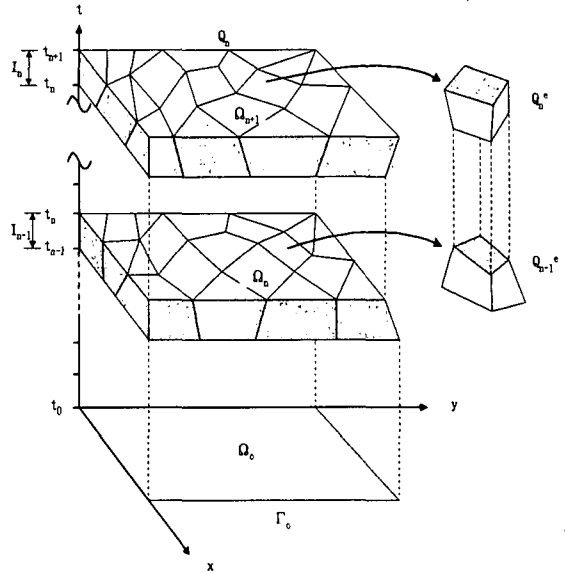


図-3 時間・空間スラブ (Space-Time スラブ)

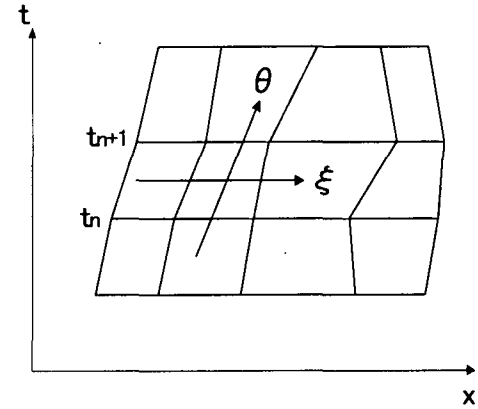


図-4 時間・空間スラブの座標系定義

考え、1次元問題を例として座標変換マトリクスを書き表すと以下ようになる。

$$\frac{\partial (x, t)}{\partial (\xi, \theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式において  $t$  と  $\xi$  が独立していることから  $\partial t / \partial \xi = 0$  となり、分子分母を入れ替えると次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\xi, \theta)}{\partial (x, t)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ 0 & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ 0 & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & -v \nabla \xi \\ 0 & \frac{2}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (19)
\end{aligned}$$

この座標変換から、一次元の移流方程式を例にして考えると以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \nabla u \\
&= \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} v \nabla \xi + u \nabla u \\
&= \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2}{\Delta t} + (u - v) \nabla u \quad (20)
\end{aligned}$$

ここに、 $v$  は各要素のメッシュ速度であり次式のように定義する。このことから ALE 有限要素法との対応付け

ができる。

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\xi=\text{const}} \quad (21)$$

以上から、浅水長波方程式に対しても同様の座標変換を行うものとして、保存変数に関する形状関数を導出する。正規化された座標系に対する保存変数と重み関数は次式のようにになる。

$$U = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{ \pi_n(\theta) U(\theta_{n+1}^-) + \bar{\pi}_n(\theta) U(\theta_n^+) \} \quad (22)$$

$$U^* = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{ \pi_n(\theta) U^*(\theta_{n+1}^-) + \bar{\pi}_n(\theta) U^*(\theta_n^+) \} \quad (23)$$

ここに、 $n$ は時空間要素の節点数（空間方向に三角形要素を用いた場合は6節点）、 $\Phi_j$ は座標変換された空間における形状関数、 $\pi$ は時間における形状関数で時間方向を線形補間する場合は次式のようにになる。

$$\pi_n(\theta) = (\theta + 1)/2 \quad (24)$$

$$\bar{\pi}_n(\theta) = (1 - \theta)/2 \quad (25)$$

ここに、 $\theta$ は正規化された時間変数で $-1 \leq \theta \leq 1$ となる。式(22)、(23)を用いて得られる有限要素方程式は、空間方向（保存変数×3節点）と時間方向（上限値、下限値）の変数で構成される。本手法では有限要素方程式の解法として、Element-by-Element BiCG法<sup>14),15)</sup>を用いて計算機容量と計算時間の短縮を図った。

### 3.2 水際線の境界処理方法

浅水長波流れの計算を行う場合、陸と水の境界を扱う際に移動境界処理を施す必要が生じる。本手法では、Space-Time有限要素法に対して、移動境界（水際線）はLagrange的に扱うものとして、対象となる領域について節点移動距離を求め時間毎にラプラス方程式に基づくメッシュの再構築を行うようにしている。水際線の境界移動を踏まえたメッシュの再構築に関するアルゴリズムは図-5に示すとおりである。

なお、(iii)の実流速の算定を行う際、水際線の近傍での水深が0となり、保存変数/水深の計算を行う際に計算が破綻してしまうおそれがある。このため、本手法においては、水際線の流速 $u_{n+1}^-$ は次式のように最小自乗法に基づいた方法で計算を行っている。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_{em}} \int_{\Omega} w \cdot u_{n+1}^- d\Omega_{n+1}^e \\ &= \sum_{e=1}^{N_{em}} \int_{\Omega} w \cdot (u_e)_{n+1}^- d\Omega_{n+1}^e \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、 $N_{em}$ は要素数を示す。流速 $(u_e)_{n+1}^-$ は次式のように表現される。

$$(u_e)_{n+1}^- = \frac{1}{H^e} \sum_{a=1}^3 (U_{n+1})_a N_a \quad (27)$$

- (i)  $t=n+1$ における水際線の位置 $X_{n+1} = X_n$ と仮定する。
- (ii) 保存変数 $U$ の上限値と下限値 $U_n^+, U_{n+1}^-$ をSpace-Time有限要素法によって計算を行う。なお、水際線の境界条件は、 $H=0$ となるように境界節点で与えるようにする。
- (iii) 実流速の上限値と下限値 $u_n^+, u_{n+1}^-$ を算定する。実流速の算定には式(26)に示す最小自乗法に基づいた方法を適用する。
- (iv) (iii)で求められた実流速を用いて、水際線の節点座標を $X_{n+1} = [(u_n^+ + u_{n+1}^-)/2] \Delta t$ によって求める。
- (v) (iv)で決定した水際線の節点座標値を用い、ラプラス方程式を解くことにより内部領域の各節点位置を求める。なお、ラプラス方程式の離散化には重み付き残差法に基づく有限要素法を適用する。その解法にはElement-by-Element CG法を用いる。
- (vi) 節点位置の収束判定を行い、収束していなければ(ii)に戻り収束するまで計算を行う。なお、収束判定の係数には $1 \times 10^{-5}$ 程度の値を用いるものとする。

図-5 節点移動方法のアルゴリズム

ここに、 $N_a$ は形状関数、 $H^e$ は要素平均水深であり、三角形要素の場合次式とする。

$$H^e = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} \quad (28)$$

式(27)を式(26)に代入して、得られた有限要素方程式に対して逆行列を求めると、水際線での実流速が得られる。

図-6にSpace-Time法による浅水長波流れの計算と水際線の境界処理の流れを示す。

## 4. 数値解析例

### 4.1 孤立波の遡上問題に関する検討

本手法を浅水長波流れ解析に適用した場合の計算精度と安定性について検討を行うことを目的として、図-7に示すような一様斜面上に孤立波が遡上する問題<sup>12)</sup>に対して検討を行った。計算の初期条件として、次式に示すような波形と流速を与えるものとする。

$$\zeta = \frac{a_0}{\cosh^2 [3a_0(x - 1/\alpha)/2]} \quad (29)$$

$$u = -\frac{\zeta(1 + a_0/2)}{\alpha x + \zeta} \quad (30)$$

ここに、 $a_0$ は孤立波の最大高さ、 $x$ は岸沖方向の距離、 $\zeta$ は水位、 $\alpha$ は海底勾配である。なお、この例題では孤立波の波形が節点の移動によってどれだけ影響を受け

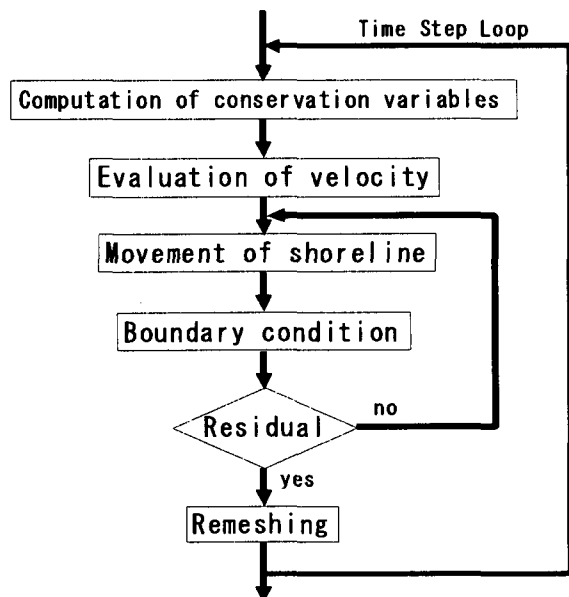


図-6 Space-Time 法による計算の流れ

るかについて調べるため、メッシュを固定した場合と移動した場合の両者について比較を行った。節点移動はアダプティブ法的に行うものとして、式(31)のように波速の影響を考慮したものを用いる。

$$X_{n+1} = X_n + a\sqrt{g\zeta} \quad (31)$$

ここに、 $a$ は定数であり本論文では0.01としている。

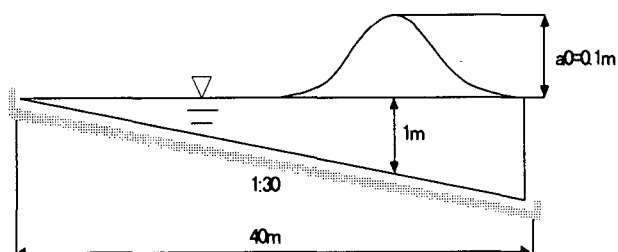


図-7 孤立波検討の初期条件図

なお、計算に用いた有限要素は岸沖方向に40分割（節点数123、要素数160）を用い、微小時間増分を0.25秒とした。計算時間を25秒として、2.5秒毎に水面形をプロットした結果を図-8に示す。また、図-9には節点を移動させた場合の節点のx座標の変化を示したものである。図から孤立波の変形とともに節点を移動させた計算は、節点を固定した場合の計算結果に比べて減衰が少ないことが分かる。このことから、本手法はメッシュアダプティブ手法を有効にかつ効果的に取り入れることのできる手法といえる。

#### 4.2 矩形水槽における水際線移動問題の検討

次に、本手法の有効性を検討する数値解析例として、図-10に示すような、矩形造波水槽内における遡上問題に本手法を適用する。検討に用いた造波水槽は図-10に示すように水平水路先端に底面勾配が1:30の斜面を設けたものである。水槽の沖合から周期と振幅を変化

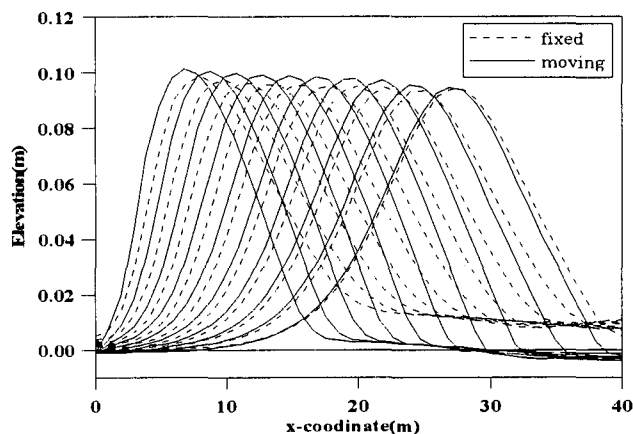


図-8 孤立波の変形状況の比較

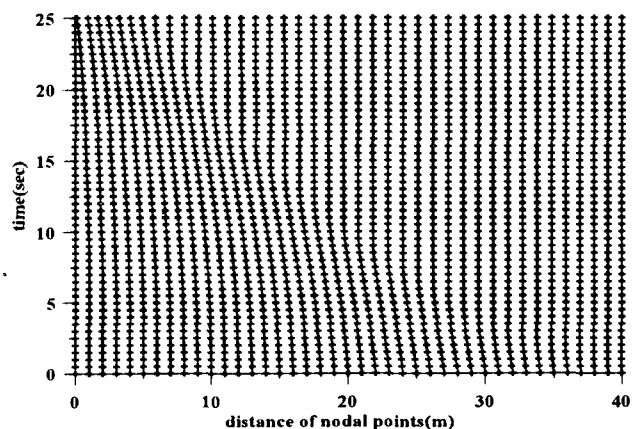


図-9 各時刻における節点の移動状況

させた正弦波を入射させて、岸からの反射波を取り除く処理を施した。なお、水槽の水深は実験ケースと同様に0.25～0.35mであり、水路幅は6mである。なお、この例題は水理模型実験と解析解による比較が報告されている<sup>13)</sup>。周期と振幅の変化で合計50ケースの検討が行われ、遡上高( $R$ )と勾配変化点での水位( $H'$ )を求めている。表-1に文献に報告されている実験ケース(1～10)と遡上高の実験結果を示す。本論文では、実験ケースと同じ条件のもとで計算を全て行い、図-11に示すように遡上高と勾配変化点での水位を求めた。有限要素分割は図-12に示すとおりであり、節点数および要素数はそれぞれ87、112である。計算に用いた境界条件としては、図-10の沖側境界a-bに入射波を与え、側方境界にはスリップ条件を与え、岸側境界c-dを移動境界として水際線が移動するようにメッシュの再構築を行うようにした。なお、微小時間増分は0.1秒として、マンギングの粗度係数を0.014（コンクリート水路の標準値）を用いて計算を行った。

##### (1) 安定化パラメータの違いによる比較

遡上の検討を行うのに先立って、本手法における計算の安定性と精度を検討するために、安定化パラメータを変化させた場合についての比較を行った。比較例としては安定化パラメータの検討を目的として、以下の4種類について行うものとした。

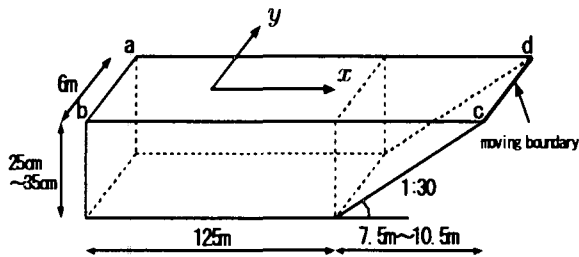


図-10 遡上波検討の実験水槽

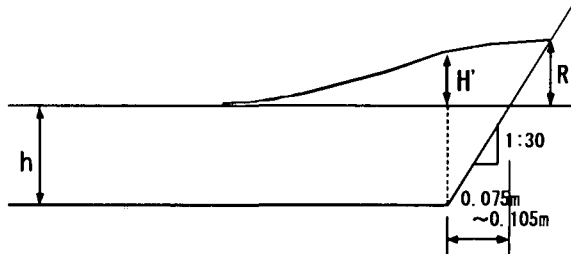


図-11 遡上高の定義

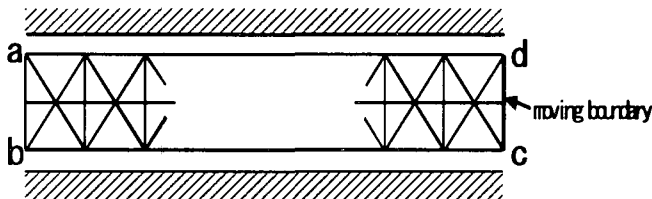


図-12 有限要素分割図（節点数 87，要素数 112）

表-1 実験条件と結果（ケース1～10）

| 計算ケース | 水深 (cm) | 周期 (sec) | 振幅 (cm) | 遡上高 (cm) |
|-------|---------|----------|---------|----------|
| 1     | 30      | 240      | 6.0     | 13.9     |
| 2     | 30      | 320      | 5.3     | 11.6     |
| 3     | 30      | 80       | 7.5     | 20.0     |
| 4     | 30      | 120      | 10.3    | 26.0     |
| 5     | 30      | 150      | 10.0    | 20.1     |
| 6     | 30      | 140      | 9.0     | 21.1     |
| 7     | 30      | 150      | 8.7     | 18.7     |
| 8     | 30      | 160      | 9.0     | 24.0     |
| 9     | 30      | 120      | 6.7     | 15.0     |
| 10    | 30      | 150      | 7.0     | 16.4     |

1. 安定化パラメータの式 (16) の時間に関する項を考慮せず，要素サイズに式 (17) を用いる (SUPG1).
2. 安定化パラメータの式 (16) の時間に関する項を考慮し，要素サイズに式 (17) を用いる (SUPG2).
3. 安定化パラメータの式 (16) の時間に関する項を考慮せず，要素サイズに要素面積の平方根を用いる (SUPG3).
4. 安定化パラメータの式 (16) の時間に関する項を考慮し，要素サイズに要素面積の平方根を用いる (SUPG4).

表-1の計算ケースのうち，ケース1について着目し，上記のSUPG1～4を用いて，計算の安定性の観点から比較を行った。図-13に遡上高の時系列の結果を，図-14に連立方程式を解く際に発生する計算繰り返し回数の時系列の結果を示す。図-13より，時間～遡上高の関係

は，ほぼ同一の結果となっているが，SUPG4の結果については波が引いた時点で若干不安定な値を示している。繰り返し回数の比較では，SUPG2の結果が最も早く収束し，時間に関する項を考慮することによる計算時間の短縮が図られていることが確認できる。この結果より，本手法で採用する安定化パラメータはSUPG2を適用することとした。

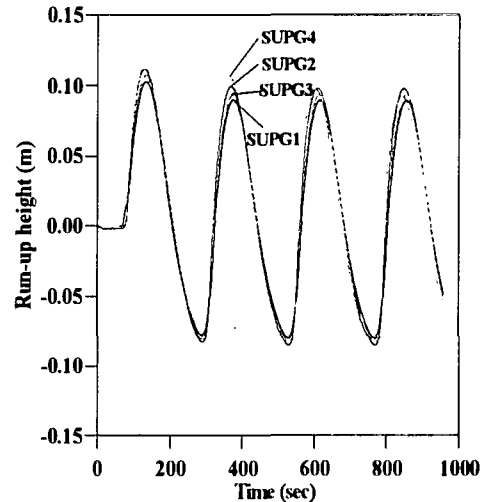


図-13 安定化パラメータの違いによる比較（遡上高時系列）

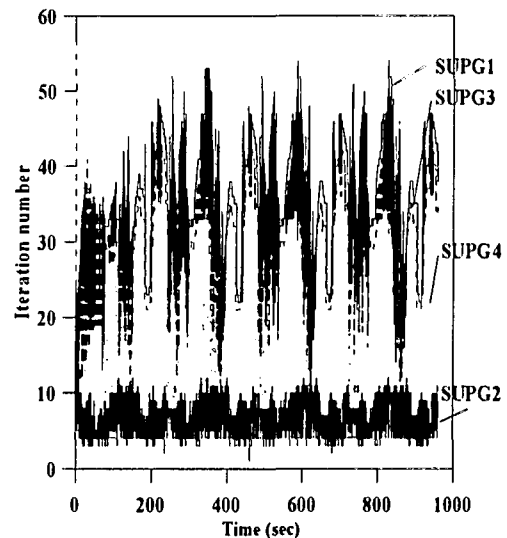


図-14 安定化パラメータの違いによる比較（反復回数）

## (2) 実験結果との比較

次に，本手法の計算精度に関する検討を行うために，遡上高さや勾配変化点の水位について実験結果および解析解との比較を行った。遡上高さおよび勾配変化点の水位における実験値と計算値の比較をそれぞれ図-15，図-16に示す。これらの結果から示されるように，本手法における計算結果は実験値を比較的良く一致している。また，完全流体を仮定した場合の解析解との比較（遡上高）を図-17に示す。なお，解析解との比較においては，本手法においても完全流体を仮定して計算を

行っている。この図からも、本手法による計算結果は解析解とも良い一致を示している。

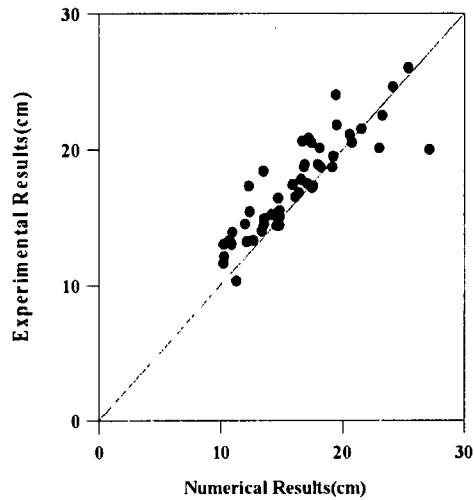


図-15 実験値と計算結果の比較（遡上高）

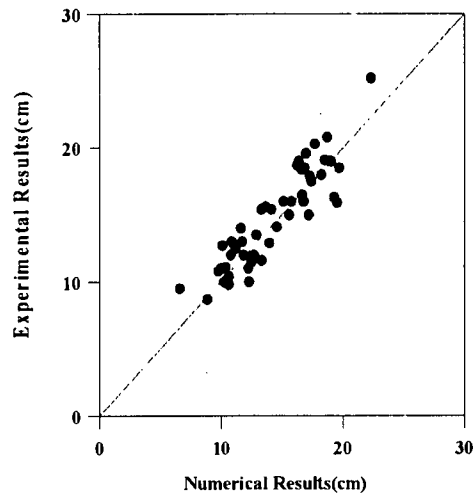


図-16 実験値と計算結果の比較（勾配変化点での水位）

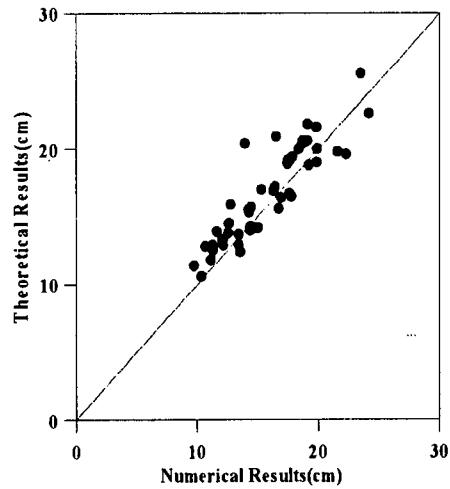


図-17 解析解と計算結果の比較（遡上高）

次に、本手法による計算結果の特徴を調べるために、

実験値との誤差を算定した。図-18に相対水深と実験値との誤差（遡上高）の関係を示す。この結果より、相対水深と実験値との誤差は概ね比例関係になっていることがわかる。このことから、浅水長波理論に基づく本手法の正当性が確認できる。

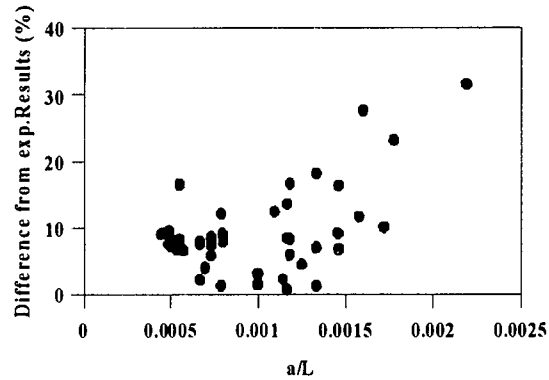


図-18 相対水深と実験値との誤差の関係（遡上高）

また、図に計算ケース 1（周期 240 秒、振幅 6cm）の場合の水面形と要素分割の水際線近傍図を示す。図は遡上波が岸に到達する前（60 秒後）、遡上高最大値（126.4 秒後）および遡上高最小値（290.5 秒後）である。この図から、本手法により、水際線の位置が Lagrange 的に移動していることがわかる。

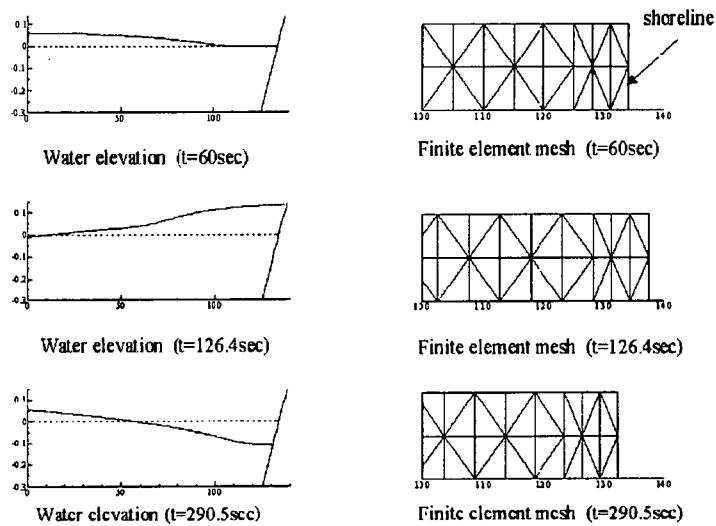


図-19 水位変化図と有限要素分割

## 5. おわりに

本論文では、SUPG 法に基づいた安定化 Space-Time 有限要素法による移動境界を考慮した浅水長波流れ解析手法を提案した。本手法の有効性を検討するために、数値解析例として孤立波の浅水変形問題と矩形水槽における波の遡上問題を取りあげ、既往の実験結果等との比較を行った。その結果、以下のような結論が得ら

れた。

- 離散定式化において安定化パラメータの比較検討を行い、その差異が計算結果及び収束反復回数に及ぼす影響について明らかにした。
- 孤立波の浅水変形問題において、節点位置を波の移動に伴って移動させたところ、数値的な減衰が少なくなった。これにより、本手法はメッシュアダプティブ手法を有効にかつ効果的に取り入れることができる手法であるといえる。
- 遡上問題において、遡上高さについて本手法の計算結果と既往の実験結果と比較した結果、実験結果と良い一致を示した。また、実験結果との差異の傾向を調べたところ、相対水深との比例関係が得られ、浅水長波理論に基づく本手法の正当性が検証できた。

今後は、本手法を実地形の問題に適用して有効性を示すとともに、マニングの粗度係数の評価について検討する所存である。

#### 参考文献

- 1) 岡太郎: ガラーキン・反復型有限要素法による洪水氾濫解析, 土木学会水工学論文集, 第36巻 pp.331-336, 1992.
- 2) Okamoto, T., Kawahara, M., Inoki, N. and Nagaoka, H.: Two-dimensional wave runup analysis by selective lumping finite element method, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 14, pp.1219-1243, 1992.
- 3) Kawahara, M. and Umetsu, T.: Finite element method for moving boundary problem in river flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 6, pp.365-386, 1986.
- 4) Daniel R. Lynch and William G. Gray: Finite element simulation of flow in deforming regions, *J. comp. Phy.* 36, pp.135-153, 1980.
- 5) T.C. Gopalakrishnan and C.C. Tung: Numerical analysis of moving boundary problem in coastal hydrodynamics, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 3, pp.179-200, 1983.
- 6) 岡本隆, 川原陸人: ALE有限要素法による二次元スロッピング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
- 7) T.E. Tezduyar, M. Behr and J. Lion: A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces-the deforming-spatial-domain/Space-Time procedure: I. The concept and the preliminary tests, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 94, pp.339-351, 1993.
- 8) S. Aliabadi and T.E. Tezduyar: Space-time finite element computation of compressible flows involving moving boundaries and interfaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 107, pp.209-224, 1993.
- 9) T.E. Tezduyar: Finite element solution strategies for large-scale flow simulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 112, pp.3-24, 1994.
- 10) Kashiwayama, K., Saitoh, K., M. Behr and T.E. Tezduyar: Parallel finite element methods for large-scale computation of storm surge and tidal flows, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 24, pp.1371-1389, 1997.
- 11) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations,

*Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 87, pp.364-384, 1991.

- 12) S.W. Bova and C.F. Carey: A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations, *Advances in Water Resources*, 19, No.3, pp.123-131, 1996.
- 13) Shuto, N.: Run-up of long wave on a sloping beach, *J. Coastal Eng.* 10, pp.23-38, 1967.
- 14) 藤野清次, 張紹良: 反復法の数理, 朝倉書店, pp.40-42, 1996
- 15) 水上昭: Element-by-Element PCG法のベクトル化と流れ解析への応用, 第2回計算力学シンポジウム論文集, pp.1-6, 1988

(2000年4月21日受付)