

圧縮力を受ける一对の曲がり部材で構成された構造体の振動特性に関する研究

Dynamic Characteristics of Curved Pair Members subjected to Axial Compression

石原 元*・山尾敏孝**・平井一男***

Hajime ISHIHARA, Toshitaka YAMAO and Itio HIRAI

*正会員 工修 国土工営コンサルタンツ(株) (〒541-0057大阪市中央区北久宝寺町4-3-5)

**正会員 工博 熊本大学教授 工学部環境システム工学科 (〒860-0862熊本市黒髪2-39-1)

***正会員 工博 崇城大学教授 工学部土木工学科 (〒860-0082熊本市池田4-22-1)

This paper presents dynamic characteristics of curved pair members tied with struts subjected to axial compression. Numerical calculation was performed by using the natural frequency analysis method (QR method) changing the end support conditions, rise-to-span ratio and the axial load to check the practical use of the proposed paired structures. The effects of the end support conditions of those structures on the natural circular frequencies and the natural mode shapes were clarified using non-dimensional parametric analysis. It was found that curved pair members with both "fixed" or "hinged" ends subjected an axial load have higher natural circular frequencies in comparison with the usual straight structures with under the same conditions.

Key Words : Natural circular frequency, Natural mode shape, Dynamic behaviors, Curved pair members, QR method, Rise-to-span ratio

1. 序論

著者らは、図-1(c)に示すようなアーチ効果を利用した一对の曲がり部材を数本のタイで簡単に結合した構造を提案し、静的な軸圧縮力を受ける場合の耐荷力特性や挙動特性について明らかにしてきた¹⁾。一对の曲がり部材で構成された平面構造体(図-1(c))に軸方向圧縮力を作用させた場合、1本の真直ぐな部材(図-1(a))やタイで結合した2本の真直ぐな部材(図-1(b))に比べて軸直角方向の変形量が抑えられ、かつ弾性座屈強度も増加することなどの特徴があることを明らかにしてきた。このような曲がり部材で構成された構造体は軸圧縮力に対して支配的な構造であり、用いる曲がり部材のライズは通常のアーチ橋などで用いられるライズより小さくてすむ。つまり、同じ長さに対して小さな断面(大きな細長比)の部材で耐荷する構造体といえる。具体的には、高橋脚、アーチ橋、主塔、圧縮力が卓越する構造部材(トラスの圧縮部材、土留工の切梁、クレーンブームなど)として使用することが現時点で考えられる。さらに、将来コスト削減に向けて断面がよりスレンダーになった場合に、圧縮が卓越する部材や構造に適用される可能性があると思われる。しかし、提案する構造体の実用化を目指すには、静的挙動のみならず基本的な振動特性を調べる必要があると考えられる。

そこで、曲がり部材で構成された平面および立体構造モデルを対象にして、部材端の境界条件を変えて軸方向に対する振動固有値解析を実施した。解析では、その基本的な振動特性である固有振動モードや固有振動数を調べるため、パラメータとして部材の細長比、初期軸力やライ

ズ-支間比(以下ライズ比とよぶ)を変化させることとした。なお、現存する構造物を想定すると、橋脚のような軸直角方向の振動特性が問題になるケースが多いと考えられるが、軸方向荷重に対する曲がり部材としての構造特性上のメリットを研究してきた経緯があり、今回は軸方向に対する解析に焦点を絞り、振動数の定式化においても軸方向のみに対して考慮した。軸直角方向についての振動特性については、今後の検討課題としたい。

2. 解析手法と解析モデル

解析では、平面及び立体構造モデルを対象に幾何剛性を考慮した棒理論に基づく有限要素法を用いており、固有値解析にはQR法²⁾を使用した。なお、定式化は次のようであるが、詳細は参考文献3)を参照されたい。

多自由度系の運動方程式をマトリックス表示すれば、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1)$$

となる。ここに、 $\mathbf{M}$ は質量マトリックス、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{y}$ 、 $\ddot{\mathbf{y}}$ はそれぞれ変位ベクトル、加速度ベクトルである。なお、 $\mathbf{K}$ には幾何剛性マトリックスも考慮する。自由振動する時の変位ベクトルを

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} \sin \omega t \quad (2)$$

とおいて、これを式(1)に代入すると次式が得られる。

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3)$$

この時、 $\mathbf{Y}$ が $\mathbf{0}$ でない有意義な解を持つには、係数行列式が 0 になる必要があり、次式となる。

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad (4)$$

上式を解くことにより固有値及び固有振動数(以下固有振動数は固有円振動数として取扱う。)が求まる。

平面解析に用いたモデルは図-1 に示すように、Type I として剛性 EI (E : ヤング係数 I : 断面 2 次モーメント) を持つ 2 本の真直ぐな部材をタイで結合したモデル、Type II は 2 本の曲がり部材をタイで結合したモデルとした。立体解析に用いたモデルは図-2 に示すように、4 本の主部材で構成され、Type I として 4 本の真直ぐな部材をタイで結合したモデル、Type II として 4 本の曲がり部材をタイで結合したモデルの 2 タイプを用いることとした。なお、座標系もあわせて同図に示す。

3 種類の境界条件について、パラメーターとして、主部材の細長比、曲がり部材のライズ比および初期軸力を変えて解析を行った。

細長比は道路橋示方書⁴⁾に定められている主圧縮部材の細長比の上限である 120、それより小さい 80、そしてよりスレンダーな断面を想定して、上限より大きい 200 の 3 種類とした。主部材の断面は図-3 に示すように長方形箱形断面とし、断面積を一定にして細長比がそれらに近似するように、部材長をそれぞれ 80、120、200cm とした。また、断面の局部座屈が生じないよう構成板の幅厚比を小さくした。

曲がり部材のライズ比 f/L については、通常のアーチ構造で用いられる 0.1 と、それより小さい 0.0~0.08 とした。 $f/L=0.0$ とは真直ぐな部材 (Type I) のことである。

主部材両端の境界条件は、図-4 に示すように、構造部

材への適用を想定して、両端固定および両端ヒンジ、また橋脚などへの適用を想定して、一端固定・他端自由と、計 3 ケースについて解析を行った。なお、立体構造での両端ヒンジでは、できるだけ平面解析と等価になるよう、部材端の軸方向 (X 軸) まわりの回転を拘束した。また、各主部材の初期軸力 P (圧縮力) については、初期軸力なし、座屈荷重 P_{cr} の 0.4 倍および 0.8 倍を与えた 3 ケースとし、部材はすべて弾性範囲内として検討した。

以上の諸元を表-1 にまとめて示す。

主部材の間隔は $a=15\text{cm}$ 、タイの断面積は主部材の 20% で、7 本を均等に配置し、すべての解析で一定とした。曲がり部材の形状は放物線で、ライズ差、初期たわみおよび残留応力は与えていない。また、解析では図-5 に示すように全体モデルを等分割して離散モデル化し、各部の質量は各節点に集中しているものとみなした。

なお、タイの両端は主部材と全てピン結合としているが、本構造の基本的な静的挙動の性状をできるだけ簡潔に把握するため、従来よりこの条件で研究してきており、今回もそれに倣って解析を行った。ただし、現在の一般的な構造として実用化するにはタイ両端を剛結とすることが必要と考えられ、その際にタイは曲げモーメントも伝達する部材となるので、本構造はより複雑な挙動を示すと予想される。

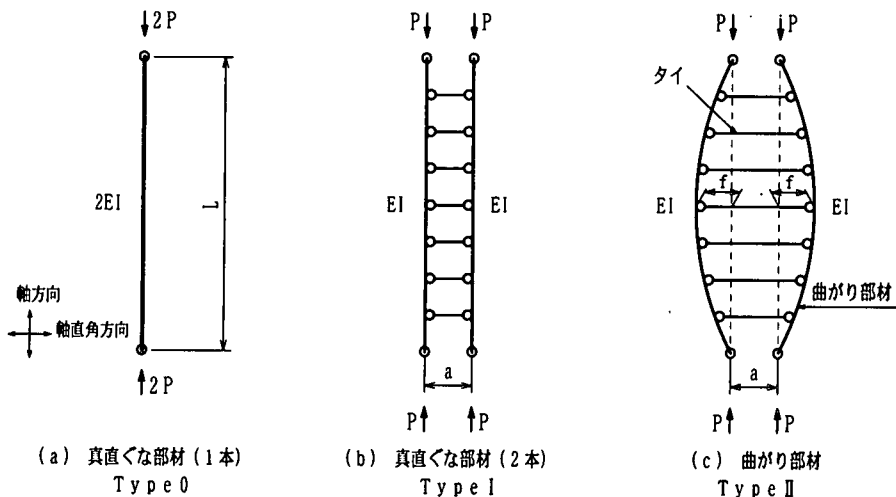


図-1 平面解析モデル

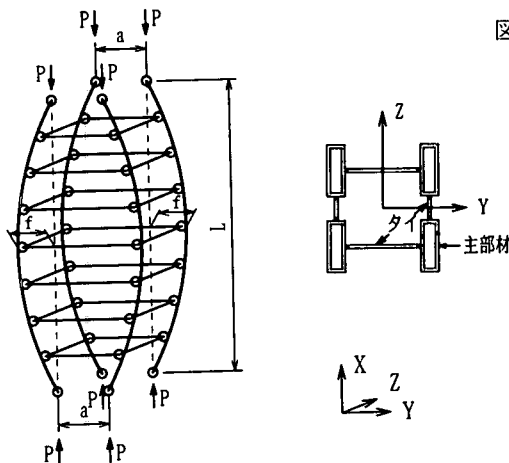


図-2 立体解析モデル

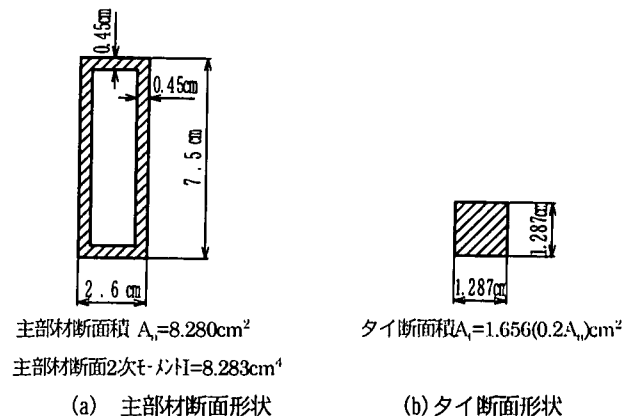


図-3 断面形状

表-1 解析諸元と解析パラメータ

解析次元		平面および立体解析
ヤング係数	E (kN/mm ²)	206
単位体積重量	w (kN/m ³)	77
部材長	L (cm)	80, 120, 200
細長比	L/r	80, 120, 200
ライズ・支間比	f/L	0.0, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1
部材端部間隔	a (cm)	15
部材端境界条件		両端固定, 両端ヒンジ, 一端固定・他端自由
初期軸力 (1主部材当り) P (kN)		0.0P _{cr} , 0.4P _{cr} , 0.8P _{cr}

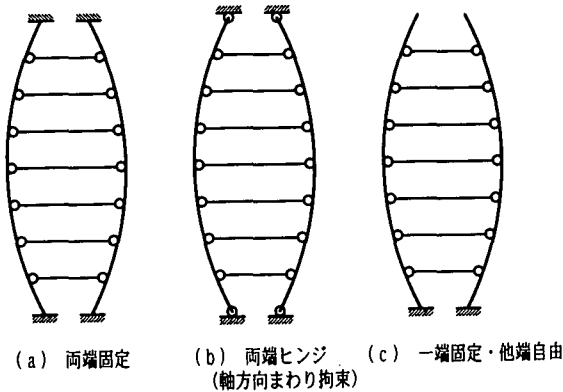


図-4 構造体端部境界条件

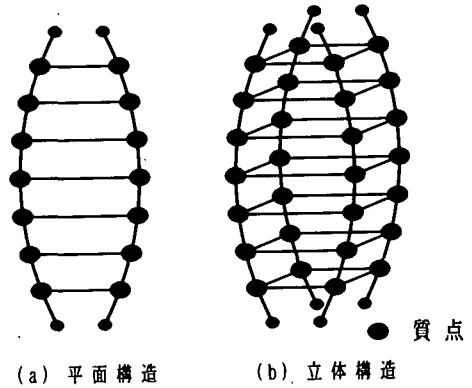


図-5 離散化モデル

3. 解析結果と考察

今回実施した固有振動解析結果について、初期軸力と1次固有振動数比との関係を図-6～7に、ライズ比と固有振動数との関係を図-8～9に、固有振動モードを図-10～11に、それぞれ平面および立体解析ごとにまとめて示す。

3.1 初期軸力と固有振動数との関係

(1) 平面解析の場合

図-6には、平面構造で細長比 $L/r=120$ の場合について、初期軸力と1次固有振動数との関係を主部材のライズ比ごとに示した。図-6の(a), (b), (c)はそれぞれ両端固定、両端ヒンジ、一端固定・他端自由という主部材端部の境界条件である。グラフの縦軸には剛性EIを持つ真直ぐな部材のEulerの座屈荷重 P_{cr} (式(5))で各主部材に作用させる初期軸力Pを除して無次元化したものを、横軸には同じ細長比 $L/r=120$ 、初期軸力なしの2本の真直ぐな部材 (Type I) の1次振動数 ω_{g1} で各ケースの1次固有振動数 ω を除して無次元化したもの (振動数比) をとった。

ここで、

$$P_{cr} = \pi^2 EI / l^2 \quad (1 \text{ 部材当り}) \quad (5)$$

である。

なお、細長比80や200の場合もグラフの傾向は特に変わらなかったため、代表して細長比120の場合を示した。

まず、境界条件が両端固定の場合は、曲がり部材の1次固有振動数は真直ぐな部材より上昇し、たとえば曲がり部材 (Type II) の $f/L=0.08$ 、軸力なしの場合は真直ぐな部材 (Type I) の約2.5倍の1次固有振動数を有する。また、グラフの傾きに注目すると、初期軸力の増加

に伴い1次固有振動数は減少するが、各ライズ比におけるグラフの傾きには大きな差異はなく、初期軸力 P/P_{cr} を大きくしても、真直ぐな部材の1次固有振動数に対する曲がり部材のその割合はほとんど変わらない。

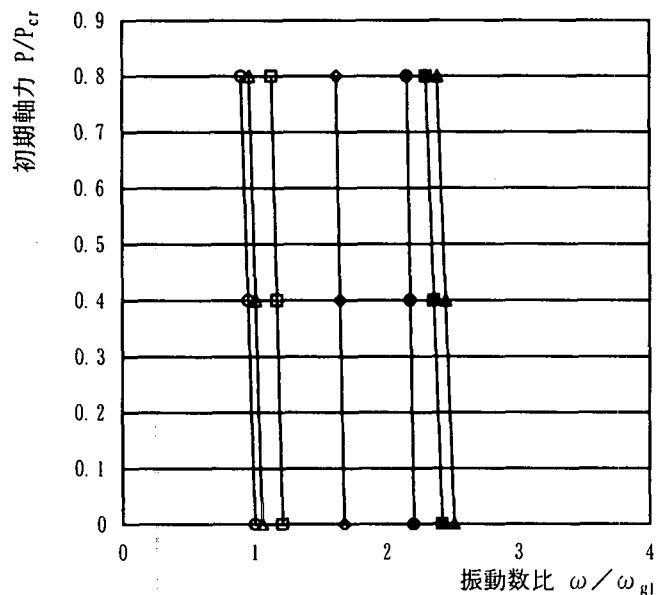
次に、両端ヒンジの場合についてであるが、図-6(b)中において点線で示す曲線は2EIの剛性を持つ1本の真直ぐな部材Type0 (図-1(a)) の1次固有振動数比 ω/ω_{g0} (ω_{g0} : 軸圧縮力を受ける単純梁の1次固有振動数) で、次の理論式²⁾で表される。

$$\frac{\omega}{\omega_{g0}} = n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)} \quad (6)$$

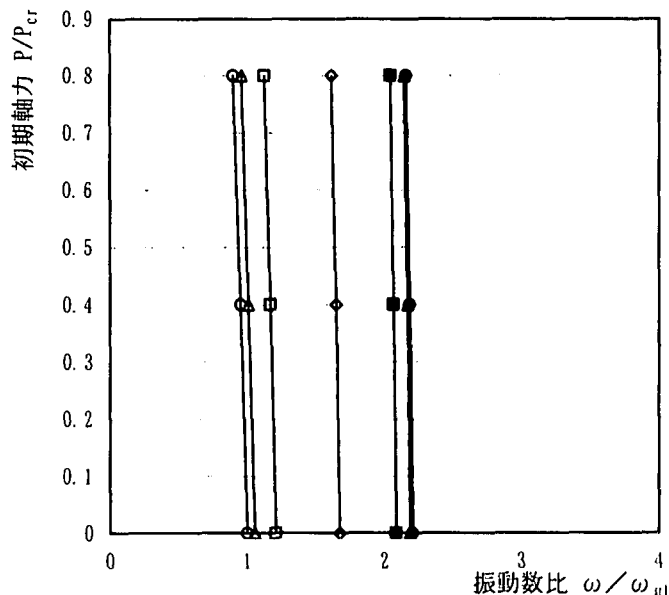
ここで、Pは1部材当りの初期軸力である。

図からわかるように、2本の真直ぐな部材 (Type I) の値はほぼこの曲線上にあり、1本の真直ぐな部材 (Type0) と同等の1次固有振動数を有するといえる。両端ヒンジでは、たとえばライズ比が0.02で初期軸力がない場合、Type0およびType I の1次固有振動数の約2倍の、また0.08で約3.6倍の固有振動数を有する。

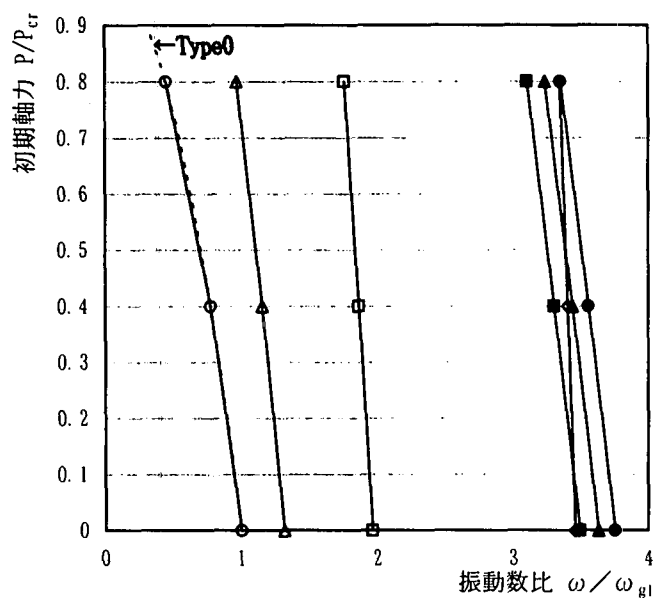
ここで注目すべきは、両端固定および両端ヒンジでは、あるライズ比を境にそれ以上ライズ比を大きくしても逆に振動数が下がる現象が見られることである。特に両端ヒンジで軸力なしの場合は、ライズ比を大きくしてもType I の1次固有振動数の4倍を越えることはなく、この傾向は細長比80や200の場合も同様であった。このことは、平面弾性座屈に対する検討結果⁵⁾において、曲がり部材ではあるライズ比を越えると対称1次モードから逆対称1次モードによる座屈が支配的になり、弾性1次座屈荷重の4倍以上にはならないという結果と対応している。



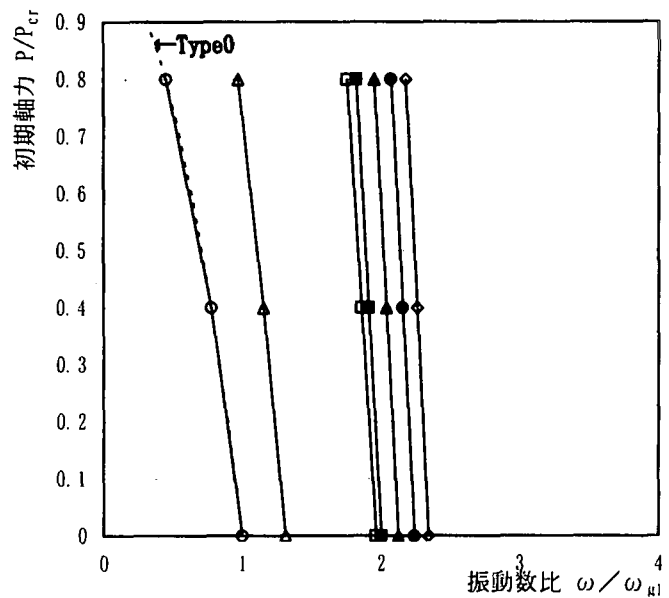
(a) 両端固定



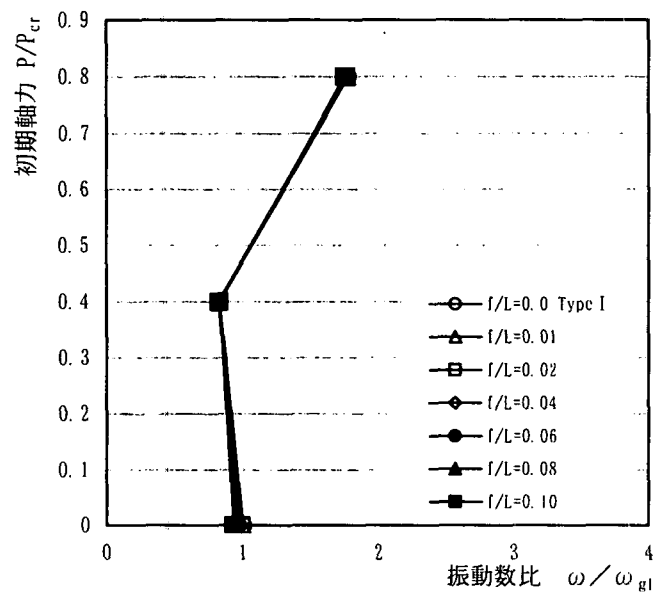
(a) 両端固定



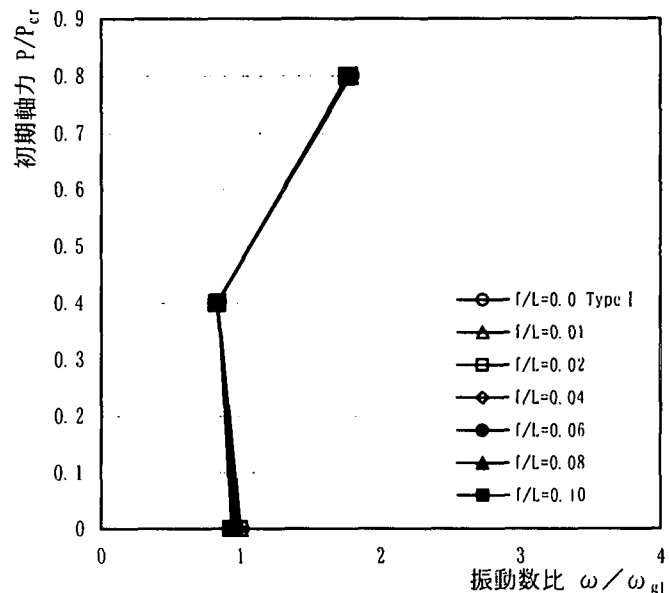
(b) 両端ヒンジ



(b) 両端ヒンジ



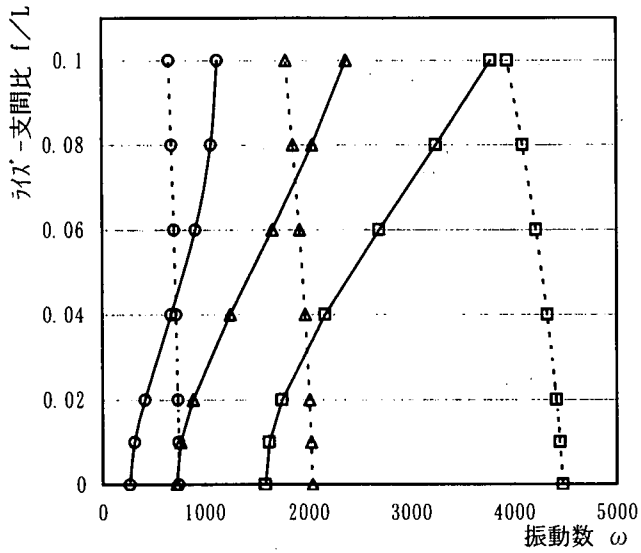
(c) 一端固定・他端自由



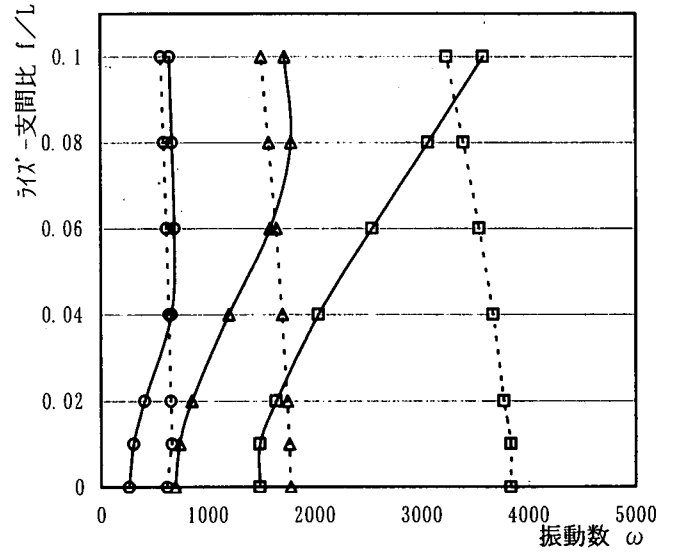
(c) 一端固定・他端自由

図-6 初期軸力と振動数比 (平面解析, $L/r=120$)

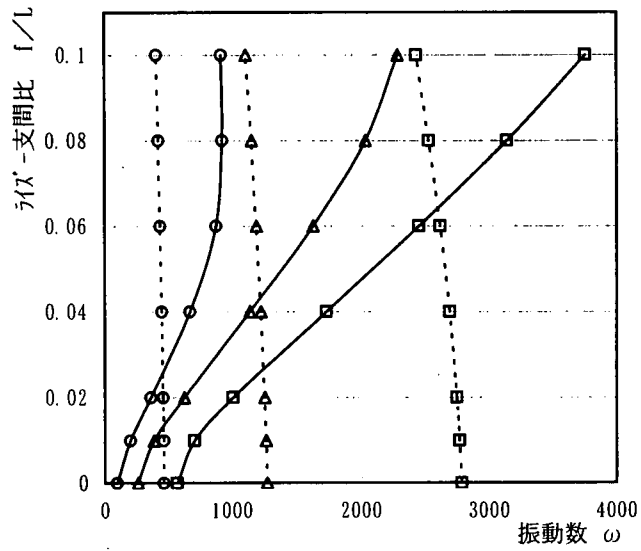
図-7 初期軸力と振動数比 (立体解析, $L/r=120$)



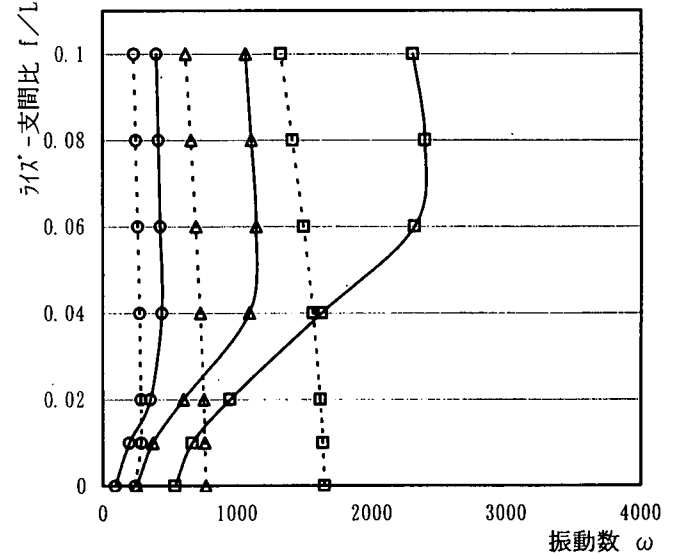
(a) 両端固定



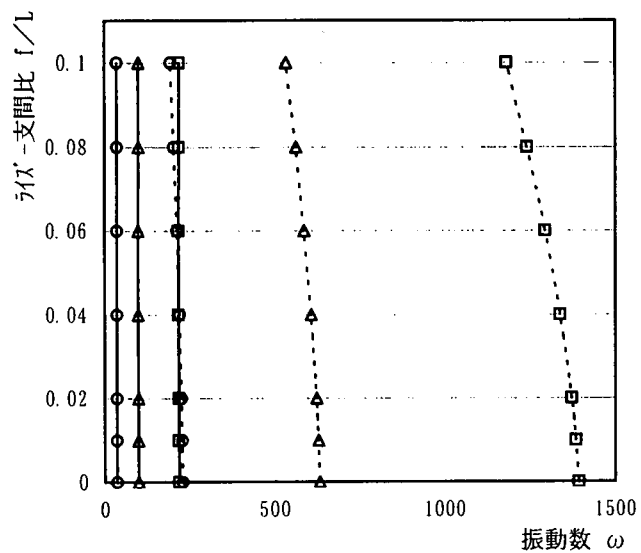
(a) 両端固定



(b) 両端ヒンジ

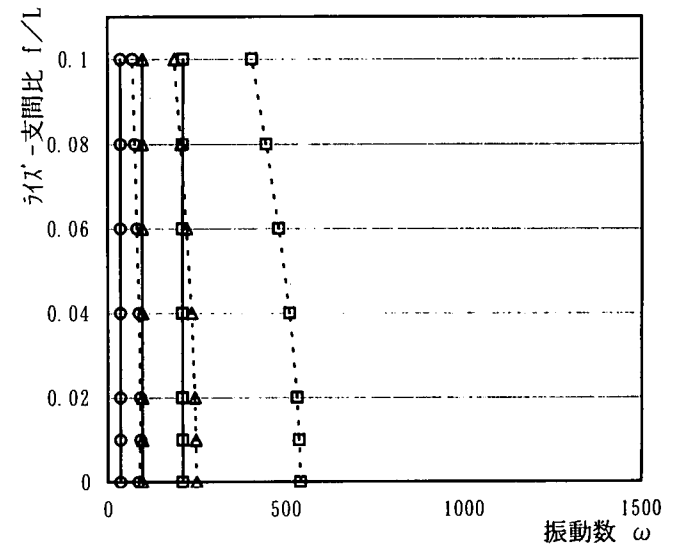


(b) 両端ヒンジ



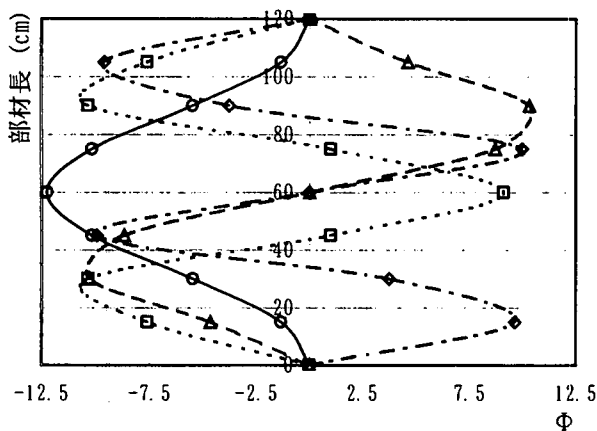
(c) 一端固定・他端自由

図-8 ライズ比と振動数 (平面解析, $P=0.4P_{cr}$)

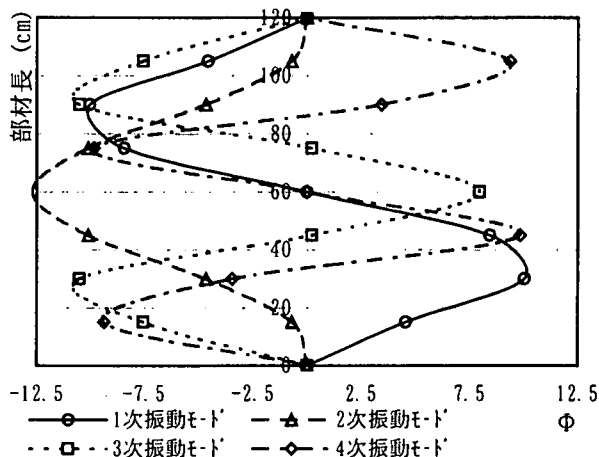


(c) 一端固定・他端自由

図-9 ライズ比と振動数 (立体解析, $P=0.4P_{cr}$)

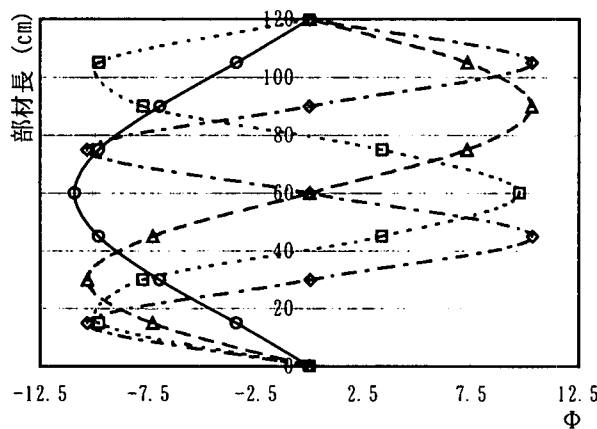


(a-1) $f/L=0.06$

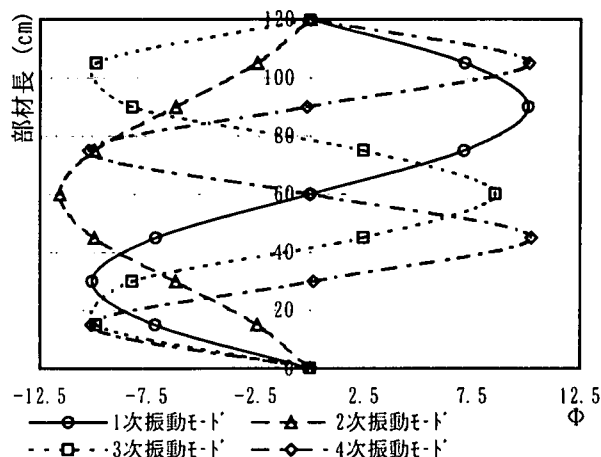


(a-2) $f/L=0.08$

(a) 両端固定



(b-1) $f/L=0.04$



(b-2) $f/L=0.06$

(b) 両端ヒンジ

図-10 固有振動モード (正規化モード) (平面解析, $L/r=120$, $P/P_{cr}=0.4$)

一方、一端固定・他端自由の場合には、図-6(c)のようにほとんど線が重なっていることから、ライズ比の上昇による1次固有振動数の増加はなく、真直ぐな部材とほぼ同等であるといえる。初期軸力については、 $0.4P_{cr}$ までは減少傾向を示し、 $0.8P_{cr}$ と大きくすると1次固有振動数が上昇するので、初期軸力 $0.4 \sim 0.8P_{cr}$ 間に1次固有振動数の増減の分岐点が存在すると考えられる。

(2) 立体解析の場合

図-7 には、立体構造で細長比 $L/r=120$ について、初期軸力と1次固有振動数の関係を主部材のライズ比ごとに示した。縦軸、横軸は平面構造と同様である。

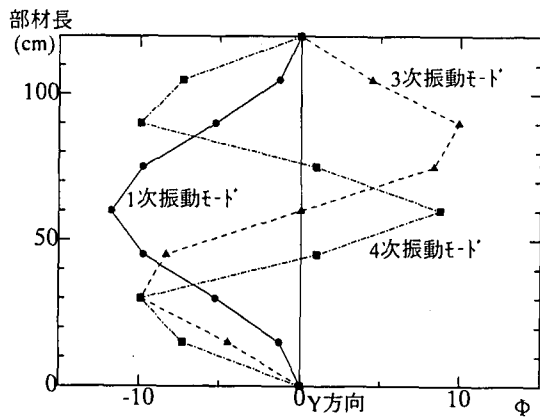
立体解析の場合の傾向は、平面解析の場合と同様であるが、立体解析における両端ヒンジのライズ比を大きくしても振動数が上がらない限界の振動数比は両端固定と同じくらいの2.2~2.5になり、平面解析の4付近まではいかない。これは立体のため、奥行き方向 (Z 方向) の剛性が影響したものと考えられる。その他の詳述は省略した。

3.2 ライズ・支間比と固有振動数および固有振動モードとの関係

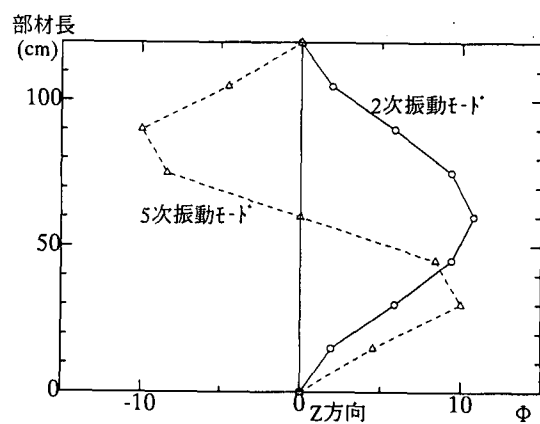
(1) 平面解析の場合

図-8には平面構造の曲がり部材におけるライズ比と固有振動数の関係を調べるため、代表して初期軸力 $P=0.4P_{cr}$ を与えたモデルについて示した。なお、初期軸力 $P=0$ および $0.8P_{cr}$ の解析結果は、 $P=0.4P_{cr}$ の場合とほとんど同様であった。当然であるが、どのケースにおいても細長比が小さくなるほど1次振動数は大きくなった。

両端固定および両端ヒンジの場合は、どの細長比においてもライズ比が大きくなるに従い対称1次モードに対応する振動数は増加し、逆対称1次モードに対応する振動数は減少した。また、あるライズ比において、1次固有振動モードが対称1次モードから逆対称1次モードに変化する。このときのライズ比を限界ライズ比 ($(f/L)_{lim}$) とよぶことにすると、この限界ライズ比 (対称1次モードと逆対称1次モードの交点) は細長比が小さく

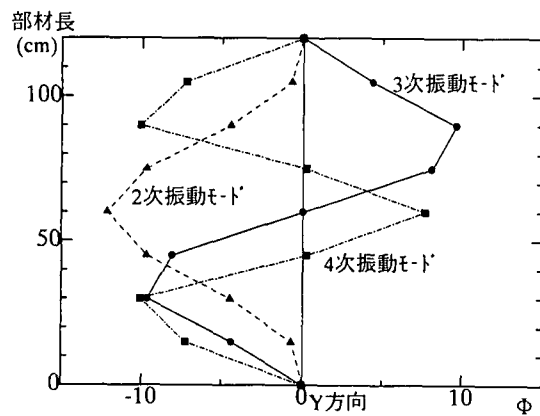


(a-1) $f/L=0.06$

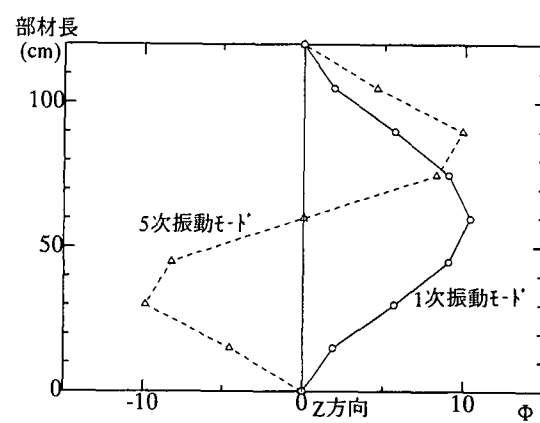


(a-2) $f/L=0.08$

(a) 両端固定



(b-1) $f/L=0.02$



(b-2) $f/L=0.04$

(b) 両端ヒンジ

図-11 固有振動モード (正規化モード) (立体解析, $L/r=120$, $P/P_{cr}=0.4$)

なるにつれ大きくなる。3.1. (1)と同様に、Type II のモデルの弾性座屈解析では、あるライズ比以下では変形モードが対称 1 次モードになり、それ以上とした場合は逆対称 1 次モードで座屈するという結果^{1), 5)}が得られたが、今回の振動解析結果でも同様な傾向となった。

図-10(a)は、初期軸力 $P=0.4 P_{cr}$ を与えたType I 及び Type II の片側主部材の固有振動（正規化）モードである。たとえば、両端固定の場合の図-8(a)で、細長比 $L/r=120$ の 1 次振動モードが対称 1 次から逆対称 1 次に変化する交差点が 0.072 であることと対応するように、図-10(a)の振動モードも 0.06 と 0.08 では 1 次振動モードが対称 1 次から逆対称 1 次へと変化する。すなわち曲がり部材のライズ比 0.06 のときの 1 次振動モードは対称 1 次モード、0.08 のときは逆対称 1 次モードとなり、このことは上記と同様に座屈荷重時の変形モードの変化と対応していることがわかる^{1), 5)}。両端ヒンジの場合についても同様のことがいえる。（図-8(b)および 図-10(b)参照）

一方、一端固定・他端自由とした場合（図-8(c)）では、各ライズ比で大きな差異は見られず、曲がり部材は真直ぐな部材と同じような振動数となることがわかった。一端固定・他端自由の場合の主部材は片持ち状態で、両端固定などよりは揺れやすいことになるが、このことは曲がり部材と真直ぐな部材とともに共通のことであり、したがって曲がり部材と真直ぐな部材との間であまり差異がなかったと考えられる。

(2) 立体解析の場合

図-9 は立体構造の曲がり部材で初期軸力 $P=0.4 P_{cr}$ を与えたモデルのライズ比と固有振動数の関係を示す。

両端固定および両端ヒンジの場合、どの細長比においても、Y 方向対称 1 次モードと Z 方向対称 1 次モードの曲線が交差する限界ライズ比が存在することが認められる。また、細長比が小さいほど固有 1 次振動数は上昇する。

ここで、前述の平面構造の両端固定の解析結果と比較してみると、たとえば細長比 $L/r=120$ で初期軸力 $P=0.4 P_{cr}$ の場合、平面構造では限界ライズ比が 0.072 であるのに対し、立体構造では 0.064 あった。その他の細長比でも同じように 10%程度の誤差はあるものの、図の傾向はほぼ一致している。これより、両端固定の場合は、立体を平面に等価に置き換えて解析することが可能であることが窺われる。

図-11(a)には、両端固定とした曲がり部材の固有振動モードを示した。すべての軸直角方向（Y 軸方向）の低次のモードで共通しているのは、曲がり部材で構成された前後 2 面（X-Y 平面）が、ともに大きく変位することではなく、前面あるいは後面のみが変形することである。このことは主に、Z 方向へのタイがすべてピン結合されていることに起因していると考えられる。

また、両端固定の場合、平面解析ではライズ比の上昇により、1 次振動モードが対称 1 次から逆対称 1 次に変

表-2 限界ライズ比

	境界条件	解析	L/r		
			80	120	200
	両端固定	平面	0.104	0.072	0.044
		立体	0.090	0.064	0.039
	両端ヒンジ	平面	0.064	0.044	0.026
		立体	0.038	0.025	0.015
		平面弾性座屈	(0.030)	(0.020)	(0.012)

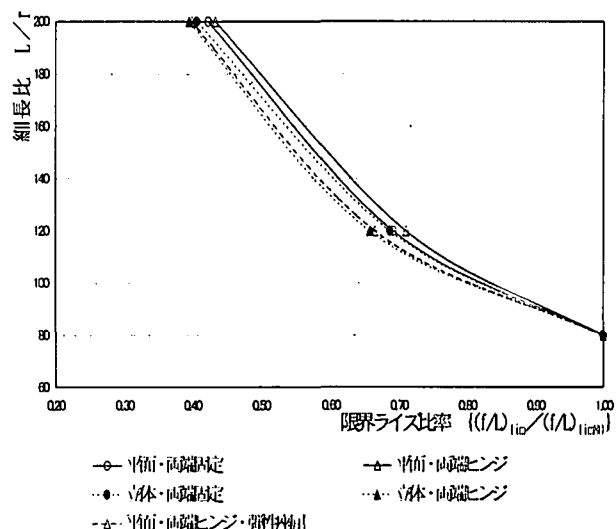


図-12 限界ライズ比率

化するのに対し、立体解析では Y 方向への対称 1 次モードより先に Z 方向への対称 1 次モードが出現するようになった。たとえば、細長比 $L/r=120$ で初期軸力 $P=0.4 P_{cr}$ の場合、限界ライズ比が 0.064 であることと対応するように、固有振動モードも 0.06（図-11(a-1)）と 0.08（同図(a-2)）では 1 次振動モードが Y 方向の対称 1 次から Z 方向の対称 1 次へと変化するが認められる。ちなみに、本研究のモデルと比べて、Y 方向より Z 方向に高い剛性をもつような断面のモデルでは、平面解析のように Y 方向の対称 1 次から逆対称 1 次という振動モードの現れ方となる。

両端ヒンジの場合については、両端固定の場合と同様の傾向を示した。（図-10(b)、図-11(b)参照）ただ、平面解析結果と傾向は似通っているが、結果値に差異があり、立体を平面に等価に置換して解析するには、奥行き方向の適切な評価が必要と考えられる。その他詳述は省略した。

図-9(c)の一端固定・他端自由の場合は、平面解析の場合と同様で、曲がり部材で構成された部材は真直ぐな部材と同じような振動特性を有する。また、一端固定・他端自由の場合も、両端固定と同様に立体を平面に等価に置換して解析することが可能であると考えられる。

3.3 限界ライズ比の検討

今まで述べてきたように、両端固定および両端ヒンジの境界条件の場合は限界ライズ比が存在する。表-2には各細長比ごとのこれらの限界ライズ比をまとめて示し、

図-12には縦軸に細長比、横軸に各ケースの限界ライズ比を細長比80のときの限界ライズ比で除したものをとってグラフ化した。これより、部材端の境界条件（両端固定および両端ヒンジ）、平面および立体解析、初期軸力などの条件が相違しても、限界ライズ比の各細長比ごとの割合は、ほぼ一定となる。参考のため先の研究⁹⁾に準じて、平面弾性座屈に対する限界ライズ比の計算結果についても表-2および図-12に記したが、これともよく対応している。このことより、部材長が与えられひとつの細長比に対する限界ライズ比を算出すれば、このグラフを利用して、細長比をパラメータとしたときの限界ライズ比が予想できるので、曲がり部材設計時の断面やライズ比決定の際に、振動特性に関する一指標として利用することが期待できる。

4. 結論

一对の曲がり部材で構成された構造体の振動特性について、平面および立体での振動固有値解析を実施し、真直ぐな部材の構造体と比較しながら検討を行った。最後に、本研究より得られた結論を以下にまとめる。

- (1) 一对の曲がり部材の構造体の振動特性は両端部の境界条件によって異なる。すなわち、両端固定、両端ヒンジの場合には真直ぐな部材より1次固有振動数は上昇するが、一端固定・他端自由の場合は両者の差異は見られなかった。
- (2) 両端固定、両端ヒンジの曲がり部材では、同じ細長比に対して、ライズ比が大きくなるほど1次固有振動数は上昇するが、限界ライズ比を境にそれ以上は上昇しないことがわかった。
- (3) 限界ライズ比においては、1次振動モードが対称1次モードから他のモード（平面では逆対称1次モード、立体では z 方向対称1次モード）へと変化する。また、部材両端の境界条件、解析次元、初期軸力などが相違しても各細長比ごとの限界ライズ比の比率はほぼ一定であることがわかった。

- (4) 各境界条件における平面および立体解析結果の傾向は共通しており、断面形状を等価に評価できれば、立体を平面に置換して振動解析を行うことは可能と考えられる。

本論文では、軸方向の振動特性の上昇を振動数の上昇として捉えたが、このことは動的挙動に対する軸方向剛性が大きくなることを意味するので、軸方向部材としてこの曲がり部材の構造を組み込むことにより、構造全体の振動特性を向上させたり、他部材の剛性を落として重量軽減を図って同じ振動特性を保つことができると考えられる。

また、細長比が大きくなるに伴い限界ライズ比が小さくなることは、同じ圧縮力に対してより大きな細長比およびより小さなライズで耐荷することを意図する本構造体としては好都合であるといえる。

謝辞：本研究において、九州産業大学水田教授に貴重な助言をいただいた。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 山尾敏孝 石原完 平井一男：タイで結合した2本曲がり部材の座屈強度と挙動について、構造工学論文集, Vol. 41A, pp. 229-234, 1995.
- 2) 水田洋司, 中尾学, 山尾敏孝, 平井一男：圧縮を受ける部材の振動特性について, 土木学会西部支部研究発表会講演概要集, I-61, pp. 118-119, 1996. 3
- 3) 平井一男 水田洋司：耐震工学入門, 森北出版, 1994
- 4) 道路橋示方書Ⅱ鋼橋編, 日本道路協会 平成8年12月
- 5) 石原元, 山尾敏孝, 平井一男：タイで結合した一对の曲がり部材の圧縮力に対する挙動と一解析法, 土木学会論文集, 2000. 4.

(2000年4月21日受付)