

Differential Quadrature 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析

Vibration of Rectangular Mindlin Plates by the Differential Quadrature Method

近藤八重* 高木信治** 水澤富作***

Yae KONDO, Sinji TAKAGI and Tomisaku MIZUSAWA

*大同工業大学 非常勤講師 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

**工修 日本技術開発K.K.名古屋支社 構造部主任 (〒450-0003 名古屋市中村区名駅南1-27-2)

***工博 大同工業大学 教授 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

The differential quadrature method(DQM) is a numerical method which has been successfully employed in a variety of problems in engineering and physical sciences. The DQM is accomplished by expressing at each grid point, the calculus operator value of a function at any discrete point as the weighted linear sum of the values of the function at all the discrete points. This paper presents an application of the semi-analytical DQM to analyze vibration of rectangular Mindlin plates with two opposite edges simply supported. The convergence and accuracy of the present method are demonstrated to be compared with those obtained by other numerical methods. The effects of simple supported models on the frequencies of rectangular Mindlin plates are analyzed for the different aspect ratios and ratios of width to thickness.

Key Words: rectangular thick plate, differential quadrature method, vibration, Mindlin plate

1. まえがき

長方形板は、スラブ、デッキや種々の構造要素として用いられており、その振動特性を知ることが、設計上重要な課題である。横せん断変形や回転慣性などの影響を考慮した長方形厚板の振動問題^{1), 2)}は、Mindlin 板理論や3次元弾性理論を適用し、Rayleigh-Ritz 法⁴⁾、スプライン帯板法⁸⁾や有限要素法^{6), 7)}などのエネルギー変分法に基づく数値解析法を用いて解析されている。また、三上ら⁵⁾は、選点法を用いて、相対する2辺が単純支持された変厚長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている。

長方形 Mindlin 板の自由振動方程式は、たわみと2つの回転角からなる3元連立偏微分方程式で与えられる。

最近、偏微分方程式を数値的に解く解法として、1971年に Bellman ら⁹⁾により提案された Differential Quadrature 法(DQ法)が広く理工学分野の問題に適用されている¹⁰⁾。DQ法は、関数の微分係数(導関数)を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表し、支配方程式と境界条件式を線形代数方程式に置き換えて解く数値解析法である。また、DQ法は、直交多項式の零点を離散点に取る選点法を一般化した数値解析法と考えられている。その後、Quan ら¹²⁾や Shu ら¹³⁾は、高次導関数の重み係数行列を求める漸化式を提案している。DQ法の構造解析への適用は、比較的新し

く、1988年に Bert らによる薄板の研究¹¹⁾が挙げられる。最近では、任意の幾何形状や不連続領域を有する板を離散化するために、座標変換を適用したDQ法¹⁴⁾や解析領域を要素に分割するDQ要素法¹⁵⁾も提案されている。DQ法は、少なくとも幾何学的境界条件を満たす必要があるエネルギー変分法と異なり¹⁶⁾、全ての境界条件を厳密に導入することができる。

DQ法の解析精度は、Lagrange 多項式などの補間多項式から求められる重み係数行列の計算精度、解析領域に設ける離散点の取り方や境界条件の導入方法に依存している¹⁰⁾。しかしながら、DQ法の解の数値安定性については、必ずしも明確にされていないように思われる¹⁷⁾。

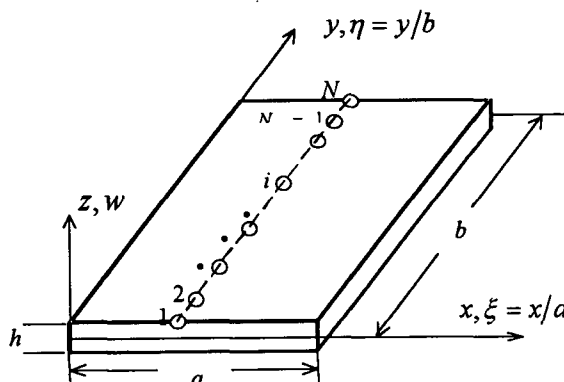


図-1 長方形 Mindlin 板と座標系

本文では、一方向に Fourier 級数展開し、他の方向に DQ 法を展開した半解析的な Differential Quadrature 法を提案し、図-1 に示すような y 軸に平行な 2 辺が単純支持された長方形 Mindlin 板の振動解析への適用とその数値安定性について検討を行っている。

2. Differential Quadrature 法による定式化

ここでは、3 元連立偏微分方程式で与えられる長方形 Mindlin 板³⁾の振動方程式を数値的に解くために、Levy 法と DQ 法を適用した半解析的な DQ 法の定式化について示す。

2.1 DQ 法

DQ 法では、次式で表される関数 $Y(\eta)$ の離散点 i での r 階の導関数は、図-1 に示す解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和で定義される¹⁰⁾。

$$d^{(r)}Y(\eta_i)/d\eta^r = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} Y_j ; j, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

ここで、 $Y_j = Y(\eta_j)$ 、 $A_{ij}^{(r)}$ は r 階の導関数の重み係数行列であり、 N は η 軸方向に設けられた離散点の数である。1 階の重み係数行列は、Lagrange 補間多項式 $\Pi(\eta)$ を用いれば、次式で与えられる。

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(\eta_i)}{(\eta_i - \eta_k)\Pi'(\eta_k)} ; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

ここで、

$$\Pi(\eta_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (\eta_i - \eta_v), \Pi(\eta_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (\eta_k - \eta_v) ; i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

また、 r 階の重み係数行列は、次式で与えられる漸化式を用いれば¹⁴⁾、式(2)で求めた $A_{ik}^{(1)}$ より、次式で表される。すなわち、 $2 \leq r \leq (N-1)$ に対して、

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{(\eta_i - \eta_k)} \right] ; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

また、 $1 \leq r \leq (N-1)$ に対して、重み係数行列の対角要素は、

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N A_{iv}^{(r)} ; i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

から求められる。

2.2 長方形 Mindlin 板の支配方程式

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では³⁾、任意の点 (x, y, z) の変位は、それぞれ独立した 3 つの変位関数を用いて、次式で仮定される。

$$\begin{aligned} u &= z\psi_x(x, y) \\ v &= z\psi_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の変位であり、また ψ_x と ψ_y はそれぞれ x 軸と y 軸回りの回転角である。

したがって、図-1 に示すような長方形 Mindlin 板の自由振動方程式は、調和振動するので、次式のように 2 階の 3 元連立偏微分方程式で表される。

$$\frac{(1-\nu)D}{2} \nabla^2 \psi_x + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \kappa Gh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \right) \psi_x \quad (7a)$$

$$\frac{(1-\nu)D}{2} \nabla^2 \psi_y + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \kappa Gh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \right) \psi_y \quad (7b)$$

$$\kappa Gh \left(\nabla^2 w + \frac{\phi}{D} \right) = -\rho h \omega^2 w \quad (7c)$$

ここで、

$$\phi = D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (8)$$

である。また、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 ω は円振動数、 E, G はそれぞれヤング係数とせん断弾性係数であり、 ρ は密度、 h は板厚、 ν はポアソン比、 κ はせん断修正係数である。

曲げモーメント、ねじりモーメントそしてせん断力は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_x &= D(\partial \psi_x / \partial x + \nu \partial \psi_y / \partial y) \\ M_y &= D(\partial \psi_y / \partial y + \nu \partial \psi_x / \partial x) \\ M_{xy} &= D(\partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x) \\ Q_x &= \kappa Gh(\psi_x + \partial w / \partial x) \\ Q_y &= \kappa Gh(\psi_y + \partial w / \partial y) \end{aligned} \quad (9)$$

次に、次式の無次元直交座標系を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b \quad (10)$$

ここで、 a, b は長さとお幅である。

式 (10) を用いて、式 (7) を無次元座標系で表すと、

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2} \right] + \frac{(1+\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + (a/b) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\ &- 6\kappa(1-\nu) \left[(b/h)^2 (a/b)^2 \psi_x + (b/h)(a/b) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \\ &= -(\rho h/12D) \omega^2 a^4 (h/a)^2 \psi_x \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \right] + \frac{(1+\nu)}{2} \left[(a/b) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \right] \\ & - 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \left[\psi_y + (h/b) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \\ & = -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 \psi_y, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa G h)}{D} \left[(h/a)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \xi^2} + (h/b)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \eta^2} + (h/a) \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + (h/b) \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right] \\ & = -(\rho h^3/D)\omega^2 w' \end{aligned} \quad (11c)$$

ここで、 $w' = W/h$ 、また y 軸に平行な 2 辺がハードタイプの単純支持 ($w = 0, \psi_y = 0, M_x = 0$) された長方形 Mindlin 板では、Levy 法を適用すると、変位関数は次式で表される。

$$\psi_x = \sum X(\eta) \cos m\pi\xi \quad (12a)$$

$$\psi_y = \sum Y(\eta) \sin m\pi\xi \quad (12b)$$

$$w' = \sum W(\eta) \sin m\pi\xi \quad (12c)$$

ただし、 m は、固有関数の級数項である。

式(12)を、式(11)に代入すると、次に示す 3 元連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 X + (a/b)^2 X''] \\ & + \frac{(1+\nu)}{2} [(-m\pi)X + (a/b)(m\pi)Y'] \\ & - 6\kappa(1-\nu)[(b/h)^2 (a/b)^2 X + (b/h)(a/b)(m\pi)W] \\ & = -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 X \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 Y + (a/b)^2 Y''] \\ & + \frac{(1+\nu)}{2} [(a/b)(-m\pi)X' + (a/b)^2 Y''] \\ & - 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 [Y + (h/b)W'] \\ & = -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 Y \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} & 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \{ (m\pi)^2 W - (a/b)^2 W'' \} \\ & + (a/h) \{ (m\pi)X - (a/b)Y' \} \\ & = (\rho h/D)\omega^2 a^4 (h/a)^4 W \end{aligned} \quad (13c)$$

ただし、

$$\begin{aligned} X' &= dX/d\eta, X'' = d^2 X/d\eta^2, \\ Y' &= dY/d\eta, Y'' = d^2 Y/d\eta^2, \\ W' &= dW/d\eta, W'' = d^2 W/d\eta^2 \end{aligned} \quad (14)$$

である。

したがって、DQ 法を用いて、式を書き換えると、

次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 X_i + (a/b)^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} X_j] \\ & + \frac{(1+\nu)}{2} [-(m\pi)^2 X_i + (a/b)(m\pi) \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} Y_j] \\ & - 6\kappa(1-\nu)[(b/h)^2 (a/b)^2 X_i + (b/h)(a/b)(m\pi)W_i] \\ & = -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 X_i, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 Y_i + (a/b)^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} Y_j] \\ & + \frac{(1+\nu)}{2} [(a/b)(-m\pi) \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} X_j + (a/b)^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} Y_j] \\ & - 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 [Y_i + (h/b) \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j] \\ & = -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 Y_i, \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \left\{ (m\pi)^2 W_i - (a/b)^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} W_j \right\} \\ & + (a/h) \{ (m\pi)X_i - (a/b)Y_i \} \\ & = (\rho h/D)\omega^2 a^4 (h/a)^4 W_i, \end{aligned} \quad (15c)$$

ここで、 $i = 2, 3, \dots, N-1$ である。

x -軸に平行な 2 辺の境界条件は、以下に示すように、それぞれ独立した 3 つの式で定義される。

1) 固定辺 (C)

$$w = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0 \quad (16a)$$

2) 単純支持辺 (S or SS)

Mindlin 板理論では、単純支持モデルとして、ハードタイプ(S)とソフトタイプ(SS)の 2 種類が定義される。

i) ハードタイプ

$$w = 0, \psi_x = 0, M_y = 0 \quad (16b)$$

ii) ソフトタイプ

$$w = 0, M_y = 0, M_{xy} = 0 \quad (16c)$$

3) 自由辺 (F)

$$M_y = 0, M_{xy} = 0, Q_y = 0 \quad (16d)$$

したがって、DQ法を用いて、 $\eta = 0(i=1)$ での境界条件を示せば、以下ようになる。

固定辺は、

$$W_1 = 0, X_1 = 0, Y_1 = 0 \quad (17a)$$

で表される。また、ハードタイプの単純支持辺は、

$$W_1 = 0, X_1 = 0, \quad (17b)$$

$$\nu(m\pi)X_1 - (a/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} Y_j = 0$$

になる。また、ソフトタイプの単純支持辺は

$$W_1 = 0 \quad (17b)$$

$$\nu(m\pi)X_1 - (a/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} Y_j = 0$$

$$(a/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} X_j + (m\pi)Y_1 = 0$$

で表される。自由辺は、

$$\nu(m\pi)X_1 - (a/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} Y_j = 0,$$

$$(a/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} X_j + (m\pi)Y_1 = 0, \quad (17c)$$

$$(h/b) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(1)} W_j + Y_1 = 0$$

となる。同様に、 $\eta = 1 (i = N)$ についても定式化できる。

DQ法で表した式(15)と境界条件式は、次式のような $3N$ の線形代数方程式として表される。ただし、境界条件式に対応する $\{W_1 X_1 Y_1 W_N X_N Y_N\}$ を $\{w_b\}$ で表している。

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bd}] \\ [K_{db}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_b\} \\ \{w_d\} \end{Bmatrix} = n^* \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w_d\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $\{w_d\} = \{W_2 X_2 Y_2 W_3 X_3 Y_3 \cdots W_{N-1} X_{N-1} Y_{N-1}\}$

である。 n^* は振動数パラメータであり、 $\omega b^2 \sqrt{\rho h/D}$ で表わされる。式(18)を2つに分け表示すれば、

$$[K_{bb}]\{w_b\} + [K_{bd}]\{w_d\} = \{0\} \quad (19)$$

$$[K_{db}]\{w_b\} + [K_{dd}]\{w_d\} = n^* [I]\{w_d\} \quad (20)$$

になる。ただし、 $[I]$ は単位マトリックスである。したがって、式(19)を $\{w_b\}$ について解くと、

$$\{w_b\} = -[K_{bb}]^{-1} [K_{bd}]\{w_d\} \quad (21)$$

になるので、式(20)に代入すると、次式が得られる。

$$([K_{dd}] - [K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}])\{w_d\} = n^* [I]\{w_d\} \quad (22)$$

式(22)のカッコ内を $[K]$ とおくと、

$$([K] - n^* [I])\{w_d\} = 0 \quad (23)$$

で表される。 $[K]$ は、 $3(N-2)$ の実非対称行列になる。したがって、式(23)の固有値計算を行えば、振動数と固有ベクトルが求められる。

3. 数値計算例および考察

ここでは、 y 軸に平行な2辺が単純支持され、他の2辺が任意の境界条件を有する長方形 Mindlin 板の振動解析への半解析的なDQ法の適用とその数値安定性について示す。また、長方形 Mindlin 板の振動特性に与える幅厚比、辺長比や境界条件などの影響について示す。なお、相対する他の2辺の境界条件はC-Fのように表し、それぞれ2辺($\eta=0, 1$)が固定辺(C)と自由辺(F)に相当している。また、以下の数値計算例では、ポアソン比は0.3、せん断修正係数 κ は $12/\pi^2$ と仮定している。

はじめに、本手法の収束性について示す。

DQ法では、離散点の取り方が解の収束性や精度に影響を及ぼすことが報告されている¹⁰⁾。この離散点は、解析領域に任意に設けることができる。計算上の便宜を考えると等分割に配置することが望ましいが、計算例でも示すように、離散点の数を増大させると、不安定な収束が示される。一方、この問題点を改善する方法として、解析領域で定義される残差を効率よく零にするために、直交多項式の零点を離散点に仮定する方法が提案されている。したがって、本文では以下に示す2つの分割パターンで離散点の位置を仮定している。

- 1) 均等に離散点を取る方法(等分割パターン)
- 2) Shifted Chebyshev 多項式の零点を離散点にとる方法(不等分割パターン)¹⁰⁾

図-2には、これらの方法による y 方向に設ける離散点の値を求める式と分割パターンが示してある。

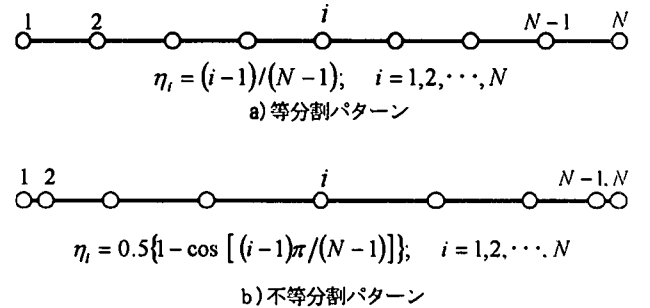


図-2 離散点の分割パターン

図-3と図-4には、それぞれ相対する2辺の境界条件がC-CとF-Fである正方形 Mindlin 板の1次振動数パラメータ、 $n_1^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える離散点の分割パターンの影響が示されている。ここで、幅厚比、 b/h は1.0に仮定し、また離散点の数 N は7から29まで変化させている。これより、不等分割パターンは、境界条件やモード次数に関係なく、非常に安定した収束性を示している。しかしながら、等分割パターンに基づく本DQ法は、 N を増大させると不安定な収束を示し、特に自由の境界条件を含む問題では、分割数を

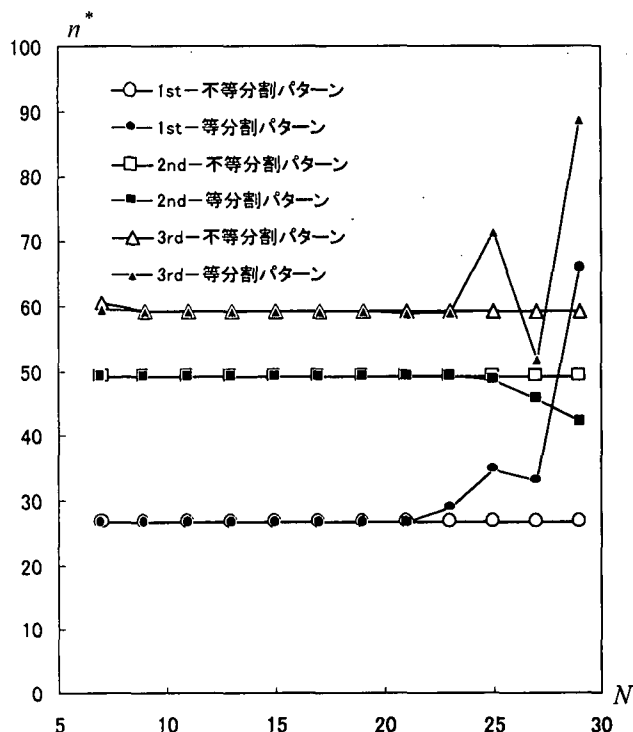


図-3 相対する2辺が固定である正方形 Mindlin 板の1次振動数パラメータ n_1^* の収束性に与える離散点の分割パターンの影響；C-C, $a/b = 1.0$, $b/h = 10.0$

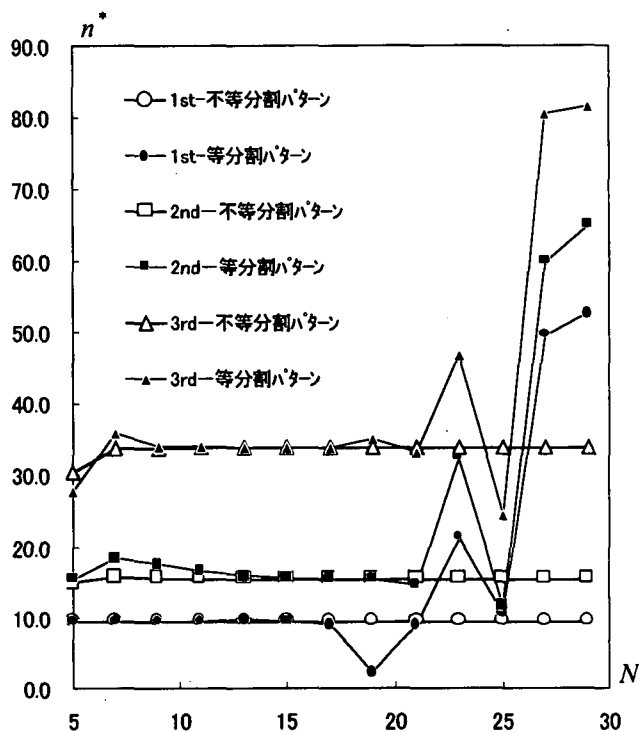


図-4 相対する2辺が自由である正方形 Mindlin 板の1次振動数パラメータ n_1^* の収束性に与える離散点の分割パターンの影響；F-F, $a/b = 1.0$, $b/h = 10.0$

19以上にすると、急激に収束性が悪くなる。これは、等分割された離散点で表現される Lagrange 多項式を用いた場合、多項式の次数の増大とともに、この多項式の零点を離散点にとると数値誤差が生じてくるために、不安定な収束が示されると思われる。この問題点を改善するために、直交多項式の零点を離散点に仮定すれば、離散化誤差を最小化できるので数値安定性が高められる。したがって、以下の数値計算例では、不等分割パターンを用いた DQ 法の適用について示す。

表-1は、不等分割パターンを用いた正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性を示している。ここで、 b/h は10に仮定している。これより、不等分割パターンを用いると、高次の振動数を含めて、安定した収束状態が得られている。

図-5と図-6は、相対する2辺がC-CとF-Fである正方形 Mindlin 板の振動解析における幅厚比の適用限界を示している。ここで、 b/h は、5から100まで変化させている。これより、本DQ法を用いる場合、 b/h が80を超えると、不安定な収束状態が示される。また、自由の境界条件を含む問題では、 b/h が50を超えると離散点の分割数により、かなり異なった値が示される。これは、DQ法で求めたシステム係数行列が実非対称になり、また板厚が薄くなると横せん断剛性の値が大きくなるので、この係数行列の性質が悪くなり、計算誤差が累

表-1 正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ n^* に与える不等分割を用いた離散点の数, N の影響； $a/b = 1.0$, $b/h = 10.0$

B.C.	N	Modes						
		1st (1-1)	2nd (2-1)	3rd (1-2)	4th (2-2)	5th (3-1)	6th (1-3)	7th (3-2)
C-C	7	26.643	49.065	60.483	79.323	86.721	103.70	112.08
	9	26.645	49.063	59.118	78.677	86.721	101.06	111.84
	11	26.645	49.062	59.118	78.681	86.720	101.16	111.85
	13	26.644	49.062	59.118	78.683	86.720	101.15	111.85
	15	26.645	49.063	59.118	78.683	86.720	101.15	111.85
	17	26.645	49.063	59.118	78.683	86.720	101.15	111.85
F-F		(1-1)	(1-2)	(1-3)	(2-1)	(2-2)	(2-3)	(1-4)
	7	9.4338	15.810	33.731	36.318	43.246	61.858	62.027
	9	9.4387	15.557	33.779	36.330	43.027	61.975	66.924
	11	9.4387	15.438	33.832	36.334	42.852	62.070	66.128
	13	9.4397	15.398	33.840	36.334	42.785	62.084	66.147
	15	9.4389	15.387	33.841	36.334	42.766	62.084	66.139
	17	9.4391	15.384	33.841	36.334	42.761	62.084	66.137
	19	9.4388	15.384	33.841	36.334	42.760	62.083	66.137
	21	9.4390	15.384	33.841	36.332	42.763	62.084	66.137
	23	9.4395	15.383	33.841	36.334	42.761	62.084	66.137

(ij): i, jは、それぞれx、y方向の振動モード次数

積するために不安定な収束が示されると思われる。したがって、自由辺を含む場合には、 b/h を50より小さい値をとる必要がある。

次に、表-2には、Mindlin 板理論で定義される2つの単純支持モデルが正方形 Mindlin 板の振動数パラメー

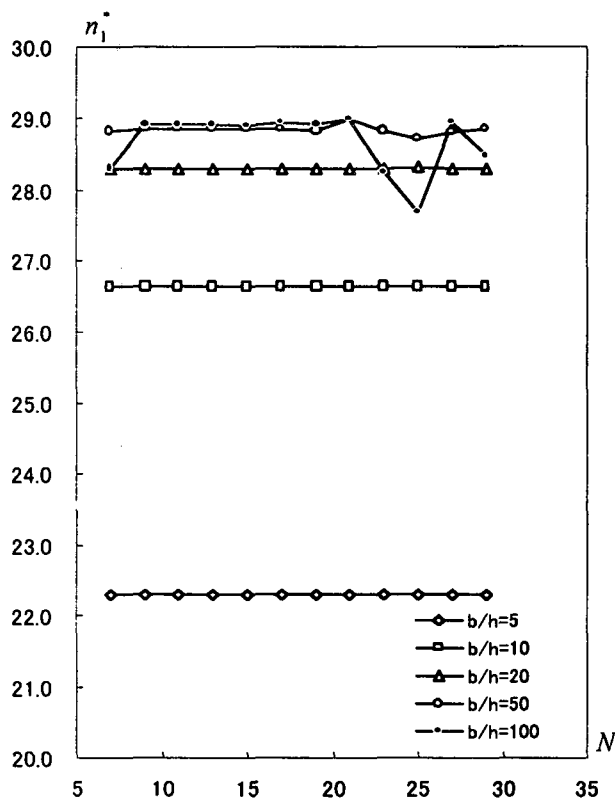


図-5 DQ法で求めた基本振動数パラメータに対する b/h による適用限界; C-C, $a/b = 1.0$

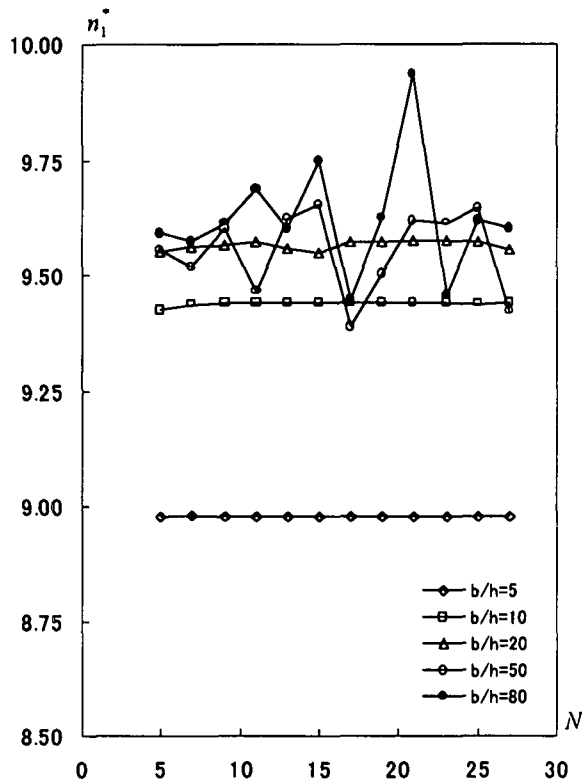


図-6 DQ法で求めた基本振動数パラメータに対する b/h による適用限界; F-F, $a/b = 1.0$

タに与える影響について示してある。ここで、ハードタイプの単純支持モデルを S, またソフトタイプの単純支持モデルを SS で表している。幅厚比 b/h は, 5, 10, 50 とし, N は 15 に仮定している。これより, Mindlin 板の振動数パラメータに与える単純支持モデルの影響はさほど顕著に見られず, ハードタイプの単純支持の値が, ソフトタイプの支持モデルと比較して, 1%~2% 程度大きな値を示している。また, モード形状に与える単純支持モデルの影響は見られない。

表-3 は, 他の相対する 2 辺が固定された長方形 Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較を示している。ここで, 辺長比 a/b は 0.5, 1.0, 2.0 とし, b/h は, 100, 10, 5 に仮定している。また, 比較のために, スプライン帯板法(SSM)を用いた水澤の数値解⁹⁾, 選点法を用いた三上らの値¹⁰⁾と Dawe らの有限帯板法による数値解¹¹⁾も示してある。これより, 本手法の値は, スプライン帯板法, 選点法や有限帯板法により求められた数値解と比較して, 辺長比や幅厚比を変化させても, 1% 以内の精度で一致した結果を示している。

表-4 には, 種々の境界条件を持つ正方形 Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較が示されている。ここで, b/h は 100, 10, 5 に仮定して, また解析精度を高めるために, 自由辺の境界条件を含む場合では, N を 21, その他の境界条件を含む場合には, 15 としている。また,

表-2 正方形 Mindlin 板の振動数パラメータ, n^* に与える単純支持モデルの影響; $a/b = 1.0, N = 15$

b/h	B.C. Type	Modes						
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
5	S-S	(1-1) 17.43	(1-2) 38.07	(2-1) 38.07	(2-2) 55.00	(1-3) 64.95	(3-1) 64.95	(2-3) 78.43
	SS-SS	(1-1) 16.79	(1-2) 37.33	(2-1) 37.38	(2-2) 53.65	(1-3) 64.36	(3-1) 64.47	(2-3) 77.04
10	S-S	(1-1) 19.06	(1-2) 45.45	(2-1) 45.45	(2-2) 69.72	(1-3) 84.93	(3-1) 84.93	(2-3) 106.5
	SS-SS	(1-1) 18.67	(1-2) 44.86	(2-1) 44.87	(2-2) 68.42	(1-3) 84.38	(3-1) 84.38	(2-3) 105.0
50	S-S	(1-1) 19.71	(1-2) 49.17	(2-1) 49.17	(2-2) 78.50	(1-3) 97.98	(3-1) 97.98	(2-3) 127.1
	SS-SS	(1-1) 19.56	(1-2) 48.97	(2-1) 48.99	(2-2) 78.04	(1-3) 97.76	(3-1) 97.77	(2-3) 126.4
5	F-S	(1-1) 10.69	(1-2) 23.12	(2-1) 32.66	(2-2) 43.48	(1-3) 45.21	(3-1) 60.57	(2-3) 62.16
	F-SS	(1-1) 10.58	(1-2) 22.78	(2-1) 32.57	(2-2) 42.98	(1-3) 44.87	(3-1) 60.52	(2-3) 61.48
10	F-S	(1-1) 11.37	(1-2) 26.14	(2-1) 38.26	(2-2) 53.20	(1-3) 55.58	(3-1) 78.27	(2-3) 80.98
	F-SS	(1-1) 11.31	(1-2) 25.91	(2-1) 38.19	(2-2) 52.76	(1-3) 55.30	(3-1) 78.22	(2-3) 80.30
50	F-S	(1-1) 11.69	(1-2) 27.65	(2-1) 41.07	(2-2) 58.73	(1-3) 61.46	(3-1) 89.68	(2-3) 93.59
	F-SS	(1-1) 11.62	(1-2) 27.56	(2-1) 41.09	(2-2) 58.49	(1-3) 61.40	(3-1) 89.70	(2-3) 93.43
5	C-S	(1-1) 19.67	(2-1) 38.86	(1-2) 41.33	(2-2) 55.67	(3-1) 65.25	(1-3) 67.70	(3-2) 79.21
	C-SS	(1-1) 19.21	(2-1) 38.32	(1-2) 40.80	(2-2) 55.64	(3-1) 64.88	(1-3) 67.22	(3-2) 78.26
10	C-S	(1-1) 22.38	(2-1) 47.06	(1-2) 52.09	(2-2) 74.00	(3-1) 85.76	(1-3) 93.06	(3-2) 109.1
	C-SS	(1-1) 22.11	(2-1) 46.65	(1-2) 51.74	(2-2) 73.14	(3-1) 85.37	(1-3) 92.71	(3-2) 108
50	C-S	(1-1) 23.59	(2-1) 51.45	(1-2) 58.32	(2-2) 85.49	(3-1) 99.51	(1-3) 112.1	(3-2) 132.4
	C-SS	(1-1) 23.53	(2-1) 51.33	(1-2) 58.22	(2-2) 85.23	(3-1) 99.37	(1-3) 112.0	(3-2) 132.0

(ij): i, j は, それぞれ x, y 方向の振動モード次数, また S, SS はそれぞれ, ハードタイプの単純支持とソフトタイプの単純支持

表一 3 長方形 Mindlin 板の振動数パラメータの
精度比較; $N = 15$, C-C

a/b	b/h	Modes						
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
0.5		(1-1)	(1-2)	(1-3)	(2-1)	(2-2)	(1-4)	(2-3)
	100	13.677	23.598	38.543	42.442	51.454	58.322	65.926
	SSM	13.668	23.590	38.548	42.448	51.455	58.328	-
	10	12.266	19.671	29.664	33.584	38.860	41.334	46.796
	SSM	12.266	19.671	29.665	33.585	38.860	41.335	-
	5	9.939	14.589	20.460	23.668	26.505	26.968	30.701
1.0		(1-1)	(2-1)	(1-2)	(2-2)	(3-1)	(1-3)	(3-2)
	100	28.899	54.709	69.202	94.392	101.98	128.67	139.79
	CM	28.920	54.680	69.190	94.350	102.00	-	-
	SSM	28.924	54.671	69.193	94.359	102.00	128.67	-
	FSM	28.920	54.680	69.210	94.440	102.00	-	-
	10	26.645	49.063	59.118	78.683	86.720	101.15	111.85
2.0		(1-1)	(2-1)	(3-1)	(4-1)	(1-2)	(2-2)	(3-2)
	100	94.753	115.59	156.19	218.84	253.82	276.81	317.42
	SSM	95.184	115.7	156.19	218.68	253.68	276.77	-
	10	88.372	106.58	142.46	196.25	218.27	236.47	268.40
	SSM	88.372	106.58	142.46	196.25	218.27	236.47	-
	5	74.505	89.234	118.09	159.02	164.55	177.87	200.96
5.0		(1-1)	(2-1)	(3-1)	(4-1)	(1-2)	(2-2)	(3-2)
	100	94.753	115.59	156.19	218.84	253.82	276.81	317.42
	SSM	95.184	115.7	156.19	218.68	253.68	276.77	-
	10	88.372	106.58	142.46	196.25	218.27	236.47	268.40
	SSM	88.372	106.58	142.46	196.25	218.27	236.47	-
	5	74.505	89.234	118.09	159.02	164.55	177.87	200.96

SSM: スプライン帯板法による解⁸⁾ CM: 選点法による解⁵⁾,
FSM: 有限帯板法による値⁷⁾

精度比較のために、スプライン帯板法(SSM)を用いて得られた数値解⁸⁾も示されている。これより、自由辺を含まない問題では、両者の値は、 b/h に関係なく、非常によく一致した結果が得られている。

一方、自由辺を含む問題では、幅厚比が大きくなると、本手法と SSM の結果に差が見られる。これは、DQ 法で求められる実非対称なシステム行列に与える横せん断剛性と自由辺を表す力学的境界条件の影響が大きく現れ、数値安定性を低下させていると考えられる。

図一7には、3種類の境界条件を持つ正方形 Mindlin 板の低次の振動数パラメータに与える b/h の影響が示してある。ここで、 b/h は5から 100 まで変化させている。これより、 b/h が 20 より小さくなると、横せん断変形と回転慣性の影響により、振動数パラメータがかなり小さな値を示している。また、振動モード次数が高くなるほど、その影響が顕著に現れてくる。さらに、境界条件の拘束が大きくなるほど、横せん断変形と回転慣性の影響が大きくなり得る。

3. あとがき

本文では、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺で任意の境界条件を持つ長方形 Mindlin 板の振動解析への半解析的な DQ 法の適用とその数値安定性について検討

表一 4 種々の境界条件を持つ正方形 Mindlin 板の
振動数パラメータの精度比較; $a/b = 1.0$

B.C.	N	b/h	Modes					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
C-C	15		(1-1)	(2-1)	(1-2)	(2-2)	(3-1)	(1-3)
		100	28.899	54.709	69.202	94.392	101.98	128.67
		SSM	28.924	54.671	69.193	94.359	102.00	128.67
		10	26.645	49.063	59.118	78.683	86.683	86.720
		SSM	26.645	49.063	59.118	78.683	86.683	86.720
		5	22.308	39.756	44.667	58.357	65.568	70.285
S-S	15		(1-1)	(2-1)	(1-2)	(2-2)	(3-1)	(1-3)
		100	19.732	49.303	49.366	78.802	98.431	98.514
		SSM	19.732	49.303	49.306	78.841	98.512	98.512
		10	19.059	45.448	45.448	69.717	84.926	84.926
		SSM	19.058	45.448	45.448	69.717	84.926	84.926
		5	17.429	38.073	38.073	55.002	64.951	64.951
C-S	15		(1-1)	(2-1)	(1-2)	(2-2)	(3-1)	(1-3)
		100	23.632	51.626	58.565	85.968	100.07	112.96
		SSM	23.632	51.619	58.565	85.973	100.08	112.94
		10	22.376	47.063	52.090	74.004	85.759	93.064
		SSM	22.376	47.063	52.090	74.004	85.759	93.064
		5	19.671	38.860	41.334	56.667	65.248	67.699
F-C	19		(1-1)	(1-2)	(2-1)	(2-2)	(1-3)	(3-1)
		100	12.957	32.877	41.600	63.250	72.167	90.451
		SSM	12.677	33.009	41.654	62.885	72.237	90.431
		10	12.245	30.386	38.604	55.746	62.649	78.429
		SSM	12.245	30.386	38.607	55.743	62.649	78.429
		5	11.351	25.706	32.832	44.616	48.371	60.624
F-S	19		(1-1)	(1-2)	(2-1)	(2-2)	(1-3)	(3-1)
		100	11.702	27.705	41.141	59.000	61.711	90.129
		SSM	11.677	27.718	41.153	58.963	61.752	90.118
		10	11.370	26.142	38.261	53.199	55.576	78.270
		SSM	11.370	26.142	38.261	53.199	55.576	78.270
		5	10.690	23.123	32.656	43.478	45.210	60.566
F-F	19		(1-1)	(1-2)	(1-3)	(2-1)	(2-2)	(2-3)
		100	9.6330	15.967	36.641	38.883	46.793	70.793
		SSM	9.6279	16.109	36.644	38.908	46.661	70.545
		10	9.4390	15.384	33.841	36.334	42.760	62.083
		SSM	9.4388	15.384	33.841	36.334	42.760	62.082
		5	8.9774	14.080	29.096	31.215	35.891	49.447

SSM: スプライン帯板法による解⁸⁾

を行った。本文で得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

1) 3 元連立偏微分方程式で与えられる長方形 Mindlin 板の自由振動方程式と与えられた境界条件は、DQ法を用いれば、容易に連立一次元方程式に置き換えられる。また、Mindlin 板理論で定式化される 3 つの境界条件が各境界辺で厳密に導入できる。

2) DQ法の数値安定性は、重み係数行列の計算法と離散点の設け方に関係する。Shifted Chebyshev 多項式の零点を選点に用いた DQ法を用いれば、自由辺を含まない長方形 Mindlin 板の振動パラメータは、安定した収束性を示す。しかしながら、自由辺を含む問題では、低次の振動モードの収束性が悪くなるので、離散点の数をある程度大きくとる必要がある。

3) DQ法で求めた値は、他の数値解と比較して、幅厚比が比較的小さい場合には、辺長比や境界条件にかかわらず、よく一致した結果が得られている。しかしながら、

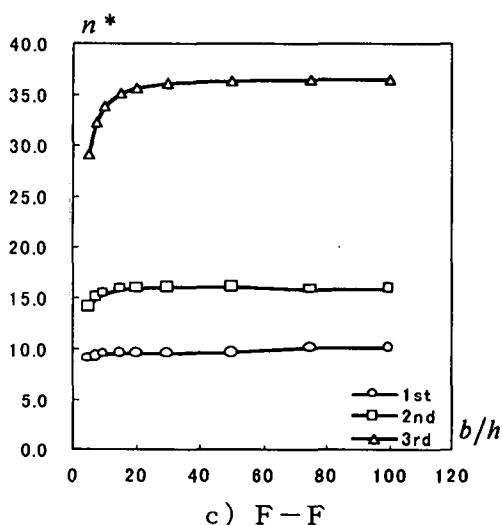
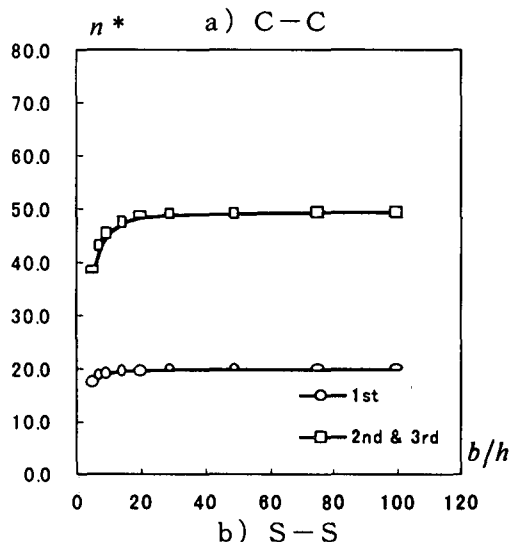
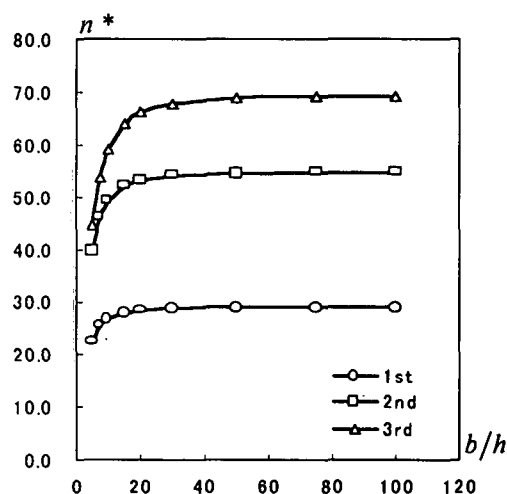


図-7 正方形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える b/h と境界条件の影響
; $a/b=1.0$, $N=15$

幅厚比の増大とともに、DQ法で求められる実非対称なシステム行列の性質が横せん断剛性の影響により悪くなり、計算誤差が累積し、不安定な収束を示す。

4) 長方形 Mindlin 板の振動数パラメータに与えるハードタイプの単純支持(式 14b)とソフトタイプの単純支持(式 14c)の相異は小さいが、ハードタイプの単純支持はソフトタイプの単純支持と比較して、 B/h に関係なく 1~2% 程度大きな値が示される。

5) 長方形 Mindlin 板の振動特性は、 b/h を 20 より小さくなると、横せん断変形と回転慣性の影響により、振動数パラメータがかなり小さな値を示す。また、振動モード次数が高くなるほど、また境界条件の拘束が大きくなるほど、振動数パラメータに与える横せん断変形と回転慣性の影響が大きく現れてくる。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。また、貴重なご意見を頂きました査読者に謝意を表します。

参考文献

- 1) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Research on thick plate vibration: a literature survey. J. Sound and Vibr., Vol. 180, pp. 163-176, 1995.
- 2) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick rectangular plates, I: comprehensive sets of boundary conditions. Comput. Struct., Vol. 49, pp. 1-29, 1993.
- 3) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951
- 4) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. J. Sound and Vibr., Vol. 69, pp. 345-359, 1980.
- 5) Mikami, T. and Yoshimura, J.: Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. Comput. Struct., Vol. 18, pp. 425-431, 1984.
- 6) Rock, T.A. and Hinton, E.: A finite element method for the free vibration of plates allowing for transverse shear deformation. Comput. Struct., Vol. 6, pp. 37-44, 1976.
- 7) Dawe, D.J.: Finite strip models for vibration of Mindlin plates. J. Sound and Vibr., Vol. 59, pp. 441-452, 1978.
- 8) Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates by the spline strip method. J. Sound and Vibr., Vol. 163, pp. 193-205, 1993.
- 9) Bellman, R.E. and Casti, J.: Differential

- quadrature and long-term integration. *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
- 10) Bert, C.W. and Malik, M.: Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 49, pp. 1-28, 1996.
 - 11) Bert, C.W., Jang, S.K. and Striz, A.G.: Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 612-618, 1988.
 - 12) Quan, J.R. and Chang, C.T.: New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I Analysis. *Comp. Chemical Engng*, Vol.13, pp. 779-788, 1989.
 - 13) Shu, C. and Richards, B.E.: Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 15, pp. 791-798, 1992.
 - 14) Striz, A.G., Chen, W. and Bert, C.W.: Static analysis of structures by the quadrature element method(QEM). *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 31, pp. 2807-2818, 1994.
 - 15) Liew, K.M. and Han, J.B.: A Four node differential quadrature method for straight-sided quadrilateral Reissner/Mindlin plates. *Comm. in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 73-81, 1997.
 - 16) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: Three-dimensional vibration of rectangular plates: Variance of simple support conditions and influences of in-plane inertia, *International of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 3233-3247, 1994.
 - 17) Han, J.B. and Liew, K.M.: Axisymmetric free vibration of thick annular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 1089-1109, 1999.

(2000年4月21日受付)