

骨組要素を用いたセル構造体のマルチスケールモデリング

Multi-scale Modeling for Cellular Solids with Frame Element

大植 健*, 斉木 功**, 中島 章典***, 寺田賢二郎****

Ken OOUE, Isao SAIKI, Akinori NAKAJIMA and Kenjiro TERADA

*宇都宮大学大学院 工学研究科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

**工修 宇都宮大学 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

***工博 宇都宮大学 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

****Ph.D. 東北大学大学院 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

We here introduce the displacement field of frame structures into the micro-scale problem in the multi-scale homogenization and develop its formulation within linear problems. The micro-scale structure is naturally modeled by the same mechanical model as that of the original macro-scale structure. However, considering computational efficiency especially for the nonlinear homogenization involving bifurcation, it is rational to discretize the microstructures which consist of thin walls like cellular solids by thin-walled structural elements, e.g. frame or shell elements. Some difficulties in the modeling of the cellular microstructure by the frame elements are manifested from several numerical examples provided here and are overcome by examining the characteristic function obtained for some cellular solids in detail.

Key Words : multi-scale modeling, cellular solids, frame element, homogenization method

1. はじめに

セル構造体¹⁾は、優れた構造材料として古くから用いられてきた。木材などはその典型的な例であり、近年では、ハニカムパネルやフォーム材といった、人工的に作られたセル構造材料が、数多く実用化されている。そのため、多くの研究により、その力学挙動の解明が試みられた^{2),3),4)}。圧縮挙動に限定すれば、セル構造体の力学挙動は、図-1に示すようになり、セル構造体の材料としての不安定化が、微視構造であるセル壁の座屈により生じている。既存の多くの研究^{5),6)}は、マイクロメカニクス等の場の平均化理論に基づく等価物性を求めるものであるが、前述のような微視構造の不安定化をモデル化することは困難である。これに対しマルチスケール解法としての均質化法^{7),8),9)}は巨視構造の任意の点における微視構造の応答を求めることができるという特徴を有するため、このような、材料に対して非常に有効な手法である。著者らは、この点に着目し、材料不安定と微視構造の不安定を結びつける幾何学的非線形を考慮した非線形均質化法の開発を進めている^{10),11),12)}。

このマルチスケール均質化法において、オリジナルの問題が連続体の境界値問題であれば、得られる巨視、微視問題も同じ連続体の境界値問題である。しかしながら、それらの数値解法に関しては、それぞれのスケールの問題に適したモデルを考えることができる。例えば、Suquet らは、微視問題に FFT を用いた解析を行っている¹³⁾。非線形問題に対する均質化法においては、巨視構造の Gauss 点などの物性評価点ごとに微視問題を解

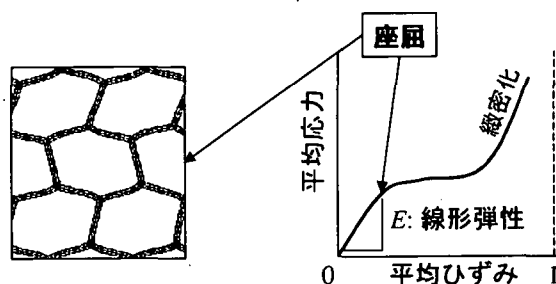


図-1 セル構造体の力学挙動

く必要性があり、特に前述のような不安定問題のマルチスケールモデリングにおいては、座屈解析を伴うことから、その計算コストを低減することは重要である。これに対し、ここで解析対象としている、セル構造体のような薄肉部材からなる構造に対しては、その離散化を連続体ソリッド要素で行うことは、計算コストの面から非効率的であり、骨組、あるいはシェルのような薄肉構造要素による離散化が合理的であると考えられる。

そこで、本報告では、線形平面問題の範疇ではあるが、セル構造体の微視構造に対し Bernoulli-Euler 梁の変位場を導入し、微視構造を骨組モデルによりモデル化された問題を設定し、その定式化を行った。この定式化に基づいた解析例を通して、従来のソリッドモデルにより離散化されたものと、本解析による結果の比較を行うことで、マイクロ問題を骨組要素で離散化することの問題点を見出した。この問題点に対し、ソリッド要素により

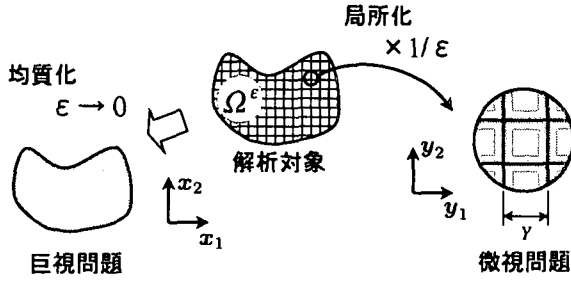


図-2 解析対象

得られる特性変位関数について考察することにより、その解決を試みた。

2. 定式化

本節では、一般的な線形の均質化法^{7),9)}に沿った定式化の概要を示す。次に、得られた微視問題に対し骨組の変位場を導入することにより、骨組構造としてモデル化された微視構造を有する均質化法の定式化を示す。

2.1 漸近展開法による均質化法の定式化

図-2に示すように、大きさ εY のユニットセルによって周期的に埋め尽くされた領域 Ω^ε を解析対象とし、微小変位の線形問題として定式化の概要を示す。ただし、 ε は解析対象の大きさに比べて非常に小さい ($\varepsilon \ll 1$) とし、したがってユニットセルの大きさも解析対象に比べて非常に小さい。ここで扱う、一般的な微小変位の釣合式の弱形式は以下の式で与えられる。

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i v_i^\varepsilon dS + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon d\Omega \quad (1)$$

ここに、 $\partial\Omega^\varepsilon$ は解析対象の境界、 E_{ijkl}^ε は構成テンソルであり、 u_k^ε は変位、 v_i^ε は仮想変位である。 t_i は表面力、 f_i^ε は物体力であり、上付きの ε はユニットセルの大きさの影響を表す。

ここで、微小なユニットセル内での尺度として、微視スケール変数

$$y_i = x_i / \varepsilon \quad (2)$$

を導入する。これに対し、解析領域全体の尺度である。 x_i を巨視スケールと呼ぶこととする。式 (1) に漸近展開法を用いて一般的な均質化法の定式化を進めていく。変位 u_k^ε を微視構造のスケール ε に関して漸近展開を行い、定義した巨視、微視スケールの2変数表示を行うと以下ようになる。

$$u_i^\varepsilon(x) = u_i^0(x) + \varepsilon u_i^1(x, y) + \varepsilon^2 u_i^2(x, y) + \cdots \quad (3)$$

仮想変位 v_i^ε に対しても同様の漸近展開を行い、式 (3) と共に式 (1) に代入する。

この時、 ε に関するリーディングタームはゼロ次であり、後述するように $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることを考慮する

と、 ε の1乗以上のオーダーは無視できる。さらに、仮想変位は任意の値を取り得るので、式 (1) は微視仮想変位 $v_i^1(x, y)$ と巨視仮想変位 $v_i^0(x)$ について表すことができ、それぞれ微視スケール問題

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}(x, y) \left\{ \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \right\} \frac{\partial v_i^1(x, y)}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (4)$$

および、巨視スケール問題

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}(x, y) \left\{ \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \right\} \frac{\partial v_i^0(x)}{\partial x_j} d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i v_i^0(x) dS + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i(x, y) v_i^0(x) d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。

ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うために次に示す積分公式¹⁴⁾を用いる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \psi dY d\Omega \quad (6)$$

この積分公式を式 (4) に用いることで微視スケールの釣合式

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial u_p^1}{\partial y_q} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY + \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = 0 \quad (7)$$

が得られる。ここで、巨視ひずみ $\partial u_k^0 / \partial y_l = -1$ に対する微視変位 u_p^1 を χ_p^{kl} とすると、式 (7)

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY \quad (8)$$

と表される。ここに、 χ_p^{kl} は特性変位関数と呼ばれ、単位の巨視ひずみに対する微視構造の変位を表す微視変位応答関数である。また、上付きの kl は巨視ひずみの成分を表す。式 (8) の右辺は形式的に分布外力と同じ形で表されているが、単位の巨視ひずみに起因する内力であるので、今後、巨視内力と呼ぶこととする。これに対し、式 (8) の左辺を微視内力と呼ぶこととする。また、同様に式 (5) に先の積分公式 (6) を用いることで、巨視スケールの釣合式

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY v_i^0 d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_i v_i^0 dS \end{aligned} \quad (9)$$

を得ることができる。ただし、 E^H は均質化材料定数であり

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left\{ E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right\} dY \quad (10)$$

により定義される。

2.2 変位場の導入

冒頭でも述べたように、微視構造の変位場に関して、骨組の変位場¹⁵⁾を導入する。ただし、ここで扱う問題は

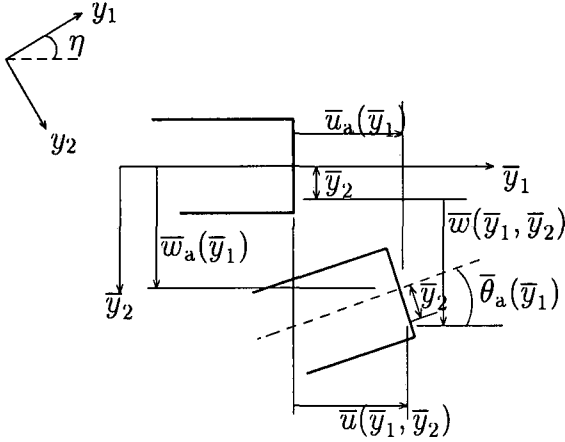


図-3 梁の変位場

平面問題とし、骨組は Bernoulli-Euler 梁として扱う。

有限要素による離散化を前提とし、微視構造の部材に沿ったある有限な長さを要素とし、以下の議論を進める。微視構造における固定座標 y_1, y_2 に加え、微視構造を構成する骨組部材の要素部材軸に沿う方向に $\bar{y}_1$ 軸、それに直交する方向に $\bar{y}_2$ 軸を定義し、これを要素の局所座標とする。この時、図-3の幾何学的な関係より微視構造の任意点の変位は、骨組の中立軸の変位と回転により以下のように表される。

$$\bar{u}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \simeq \bar{u}_a(\bar{y}_1) + \bar{y}_2 \bar{\theta}_a(\bar{y}_1) \quad (11)$$

$$\bar{w}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \simeq \bar{w}_a(\bar{y}_1) \quad (12)$$

ここに、 $\simeq$ は微小変位による近似を意味する。また、変数についているオーバーラインは、それが局所系に属することを表し、 $\bar{u}(\bar{y}_1, \bar{y}_2), \bar{w}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ は梁の任意点における部材軸、及び部材軸直角方向の変位であり、下付きの a は梁の中立軸の変位であることを意味する。 $\bar{u}_a(\bar{y}_1)$ を部材軸方向の変位、 $\bar{w}_a(\bar{y}_1)$ を部材軸直角方向の変位、 $\bar{\theta}_a(\bar{y}_1)$ を回転としている。

さらに、この関係を各変位勾配成分として表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_1} &= \frac{d\bar{u}_a(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} + \bar{y}_2 \frac{d\bar{\theta}_a(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} \\ \frac{\partial \bar{u}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2} &= \bar{\theta}_a(\bar{y}_1) \\ \frac{\partial \bar{w}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_1} &= \frac{d\bar{w}_a(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} = -\bar{\theta}_a(\bar{y}_1) \\ \frac{\partial \bar{w}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、微視問題を表す式 (8) と均質化材料定数の定義式 (10) に用いられている微視構造の変位に対し、骨組の変位場を導入することにより、微視構造を骨組構造とした微視問題と均質化材料定数が得られる。つまり、微視問題に関しては特性変位関数 χ と仮想変位 v につい

て式 (13) の関係を用いる。ここで、単位の巨視ひずみ $\partial u_k^0 / \partial x_\ell$ に対する骨組の変位場における特性変位関数を $\bar{u}_a^{k\ell}$ のように上付きの $k\ell$ を付して表すこととする。同様に、骨組断面の任意点の変位場に関する特性変位関数も $\bar{u}^{k\ell}$ 及び、 $\bar{w}^{k\ell}$ などと上付きの $k\ell$ を付して表すこととする。すると、微視構造を骨組としたものと等価な微視問題が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_Y E_{\text{IIII}} \left\{ \frac{d\bar{u}_a^{k\ell}}{d\bar{y}_1} + \bar{y}_2 \frac{d\bar{\theta}_a^{k\ell}}{d\bar{y}_1} \right\} \left\{ \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} + \bar{y}_2 \frac{d\delta\bar{\theta}_a}{d\bar{y}_1} \right\} dY \\ = \int_Y E_{\text{IIII}} \left\{ \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} + \bar{y}_2 \frac{d\delta\bar{\theta}_a}{d\bar{y}_1} \right\} dY \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 δ 付きの変位は仮想変位であることを示し、指標についているオーバーラインは、その成分が局所座標系に属することを意味する。したがって、上式においては指標 $k\ell$ は巨視ひずみの成分を表し固定座標系、微視構造における変位、仮想変位は局所座標系に属する。また、巨視ひずみと微視構造変位に関係する弾性係数の指標もそれぞれに対応し、例えば上式の右辺においては $E_{\text{II}k\ell}$ となる。

さらに、断面内積分を行えば、要素剛性方程式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\ell_e} E_{\text{IIII}} \left\{ \frac{d\bar{u}_a^{k\ell}}{d\bar{y}_1} \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} + I \frac{d^2\bar{w}_a^{k\ell}}{d\bar{y}_1^2} \frac{d^2\delta\bar{w}_a}{d\bar{y}_1^2} \right\} d\bar{y}_1 \\ = \int_{\ell_e} E_{\text{II}k\ell} \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} d\bar{y}_1 \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 I は要素の断面二次モーメントであり、 ℓ_e は要素の長さとする。上式の積分は要素における部材軸に沿った積分である。

この時、巨視ひずみの成分を表す $k\ell$ は固定座標系に属しているため、局所座標系に座標変換を行う必要がある。 $R_{k\bar{s}}$ を座標変換テンソルとし、固定座標系で定義される指標 k を局所座標系で定義される指標 $\bar{s}$ に座標変換するものとする。図-3のように固定座標と局所座標のなす角を η とすると、座標変換テンソル $R_{k\bar{s}}$ の各成分は以下のようになる。

$$R_{k\bar{s}} = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} \quad (16)$$

この座標変換テンソルを用いて巨視ひずみを局所座標系に座標変換すると、要素剛性方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\ell_e} E_{\text{IIII}} \left\{ \frac{d\bar{u}_a^{st}}{d\bar{y}_1} \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} + I \frac{d^2\bar{w}_a^{st}}{d\bar{y}_1^2} \frac{d^2\delta\bar{w}_a}{d\bar{y}_1^2} \right\} d\bar{y}_1 \\ = \int_{\ell_e} E_{\text{II}k\ell} R_{k\bar{s}} R_{\ell\bar{t}} \frac{d\delta\bar{u}_a}{d\bar{y}_1} d\bar{y}_1 \end{aligned} \quad (17)$$

上の要素剛性方程式に対し、要素内の中立軸の変位を適当な変位関数を用いて近似し、要素内積分を行えば式 (17) は以下のようにマトリクス形式で表すことができ

る。

$$[\mathbf{K}][\bar{\mathbf{u}}] = [\mathbf{f}] \quad (18)$$

ここに、 $[\mathbf{K}]$ は要素剛性マトリクス、 $[\bar{\mathbf{u}}]$ は節点変位、 $[\mathbf{f}]$ は巨視内力である。この要素剛性方程式を重ね合わせ、全体剛性方程式を導く際、式(17)の要素剛性方程式は局所座標系に属するため、固定座標系に座標変換する必要がある。固定座標系での剛性マトリクス $[\mathbf{K}]$ は、用いた要素に応じた適当な座標変換マトリクス $[\mathbf{T}]$ により以下のように表される。

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{T}][\mathbf{K}][\mathbf{T}]^T \quad (19)$$

ここに、 $[\mathbf{T}]^T$ は $[\mathbf{T}]$ の転置マトリクスである。これに加え、

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{u}}], \quad [\mathbf{f}] = [\mathbf{T}][\bar{\mathbf{f}}] \quad (20)$$

となる、固定座標系の節点変位ベクトル、節点力ベクトルを用いて、要素剛性方程式は

$$[\mathbf{f}] = [\mathbf{K}][\mathbf{u}] \quad (21)$$

と表される。例えば、一要素二節点、一節点につき二方向の変位、一つの回転自由度をもつ要素に対しては、その座標変換マトリクス $[\mathbf{T}]$ は以下ようになる。

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_n] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{T}_n] \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここに、

$$[\mathbf{T}_n] = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & -\sin(\eta) & 0 \\ \sin(\eta) & \cos(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

である。

均質化材料定数の定義式(10)についても、同様に骨組の変位場を導入する。この式の積分は微視構造を離散化した要素毎の値の総和を取ることにより以下のように表すことができる。

$$E_{mnkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \sum_e R_{mi}^T R_{nj}^T \int_{Y^e} E_{ijst} R_{ks} R_{\ell t} - \left\{ E_{ij11} \frac{\partial \bar{u}^{kl}}{\partial \bar{y}_1} + E_{ij12} \frac{\partial \bar{u}^{kl}}{\partial \bar{y}_2} + E_{ij21} \frac{\partial \bar{w}^{kl}}{\partial \bar{y}_1} + E_{ij22} \frac{\partial \bar{w}^{kl}}{\partial \bar{y}_2} \right\} dY^e \quad (24)$$

ここに、 Y^e は要素の領域を表し、 $\sum_e$ は全ての要素の総和をとることを表している。ここで、上式に骨組の変位場を導入すると、式(13)より以下のような関係が成り立ち、

$$\frac{\partial \bar{u}^{kl}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2} = -\frac{\partial \bar{w}^{kl}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_1}, \quad \frac{\partial \bar{w}^{kl}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2} = 0 \quad (25)$$

また、構成テンソル E_{ijpq} の pq に関する対称性から、微視構造を骨組とした時の均質化材料定数は以下のよう

になる。

$$E_{mnkl}^H = \frac{1}{|Y|} \sum_e \int_{\ell_e} h_e \left\{ E_{mnkl} - R_{mi}^T R_{nj}^T E_{ij11} \frac{d\bar{u}_a^{kl}(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} \right\} d\bar{y}_1 \quad (26)$$

ここに、 h_e はユニットセルを構成する骨組部材の高さ(厚さ)である。

3. 解析例

正六角形セルの面内問題を解析例として、以下にその結果を示す。本論文では、特定の巨視構造は対象としていないため、微視問題から得られる特性関数と均質化材料定数についてのみ示すこととする。セルの一边の長さ L と骨組部材の高さ h の比を $h/L = 1/8$ とし、セルを構成している材料は、等方弾性体としYoung率 E を1.0(GPa)、Poisson比を0とした。また、離散化に関しては、連続体モデルは4節点アイソパラメトリック平板要素を用い、骨組は2節点、1節点につき二方向の変位、一つの回転自由度を持つ要素を用いた。

3.1 均質化材料定数

式(26)より得られる。骨組モデルを用いた本解析法による均質化材料定数は

$$\begin{aligned} \frac{E_{1111}^H}{E} &= \frac{E_{2222}^H}{E} = 2.22 \times 10^{-1} \\ \frac{E_{1122}^H}{E} &= \frac{E_{2211}^H}{E} = 3.01 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1212}^H}{E} &= 1.92 \times 10^{-1} \\ \frac{E_{1112}^H}{E} &= \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

となった。一方、従来の連続体要素による均質化材料定数は

$$\begin{aligned} \frac{E_{1111}^H}{E} &= \frac{E_{2222}^H}{E} = 3.75 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1122}^H}{E} &= \frac{E_{2211}^H}{E} = 3.55 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1212}^H}{E} &= 6.16 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1112}^H}{E} &= \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

となった。このように、均質化材料定数においては、骨組による本解析の結果は、連続体を用いたものに比べ E_{1111}^H 、および E_{2222}^H で約490%、 E_{1212}^H では約210%と大きく異なり、剛性を過大評価する結果が得られた。

3.2 特性関数

本論文で提案した骨組モデルによって得られた特性変位関数と、従来の連続体ソリッド要素による特性変位関

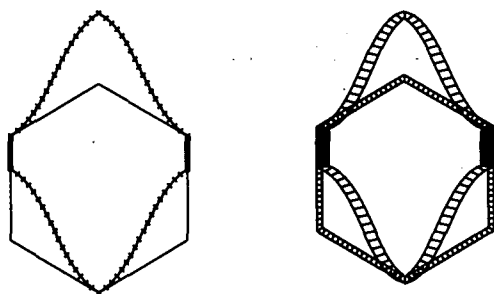


図-4-a 特性関数 (骨組) 図-4-b 特性関数 (連続体)

図-4 巨視ひずみ $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} = -1$ の場合

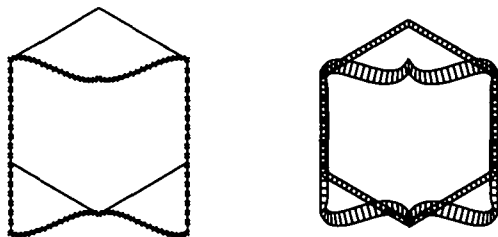


図-5-a 特性関数 (骨組) 図-5-b 特性関数 (連続体)

図-5 巨視ひずみ $\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} = -1$ の場合

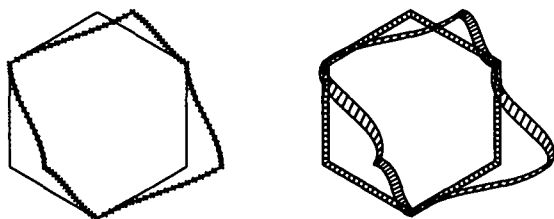


図-6-a 特性関数 (骨組) 図-6-b 特性関数 (連続体)

図-6 巨視ひずみ $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} = -1$ の場合

数を図-4~6に示す。図より、連続体と骨組の特性変位関数は、均質化材料定数ほど違いは見られず、部材の中立軸の変形に関しては、ほぼ同一の変形形状が得られている。しかし、連続体では、部材軸直角方向へ膨張する変形、およびせん断変形が生じているのに対し、骨組では変位場が拘束されるため、当然ながらそのような変形が生じない。

3.3 考察

(1) 部材軸直角方向変形の影響

均質化材料定数はその定義式 (10) より、形式的に、特性関数の変位勾配を重みとし、その重み付き材料定数を元の材料定数から差し引いたものであると解釈できる。よって、その変位勾配が大きい部材ほど材料としての剛性への寄与が小さくなると言える。一般的な骨組構造において、外力の方向に直交するような部材は剛性と

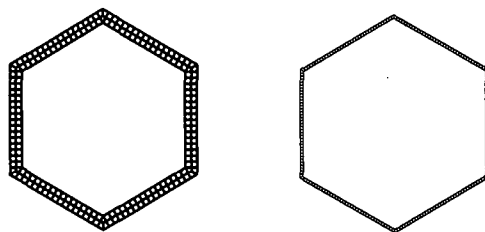


図-7-a $h/L = 1/4$

図-7-b $h/L = 1/16$

図-7 部材の細長比が異なるモデル

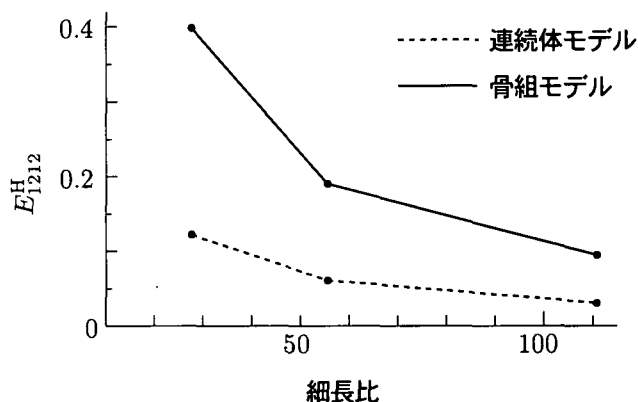


図-8 E_{1212}^H と細長比の関係

しての役割はほとんどなく、軸方向に圧縮 (引張) を受けるような部材が外力に抵抗する。これに対し、従来の連続体モデルは、巨視ひずみの方向と交差している部材が部材軸直角方向へ膨張する形で変形することにより、上の考えを満足させていると考えられる。このことは、例えば図-4-bにおける鉛直部材の横方向の膨張や図-5-bにおける斜材の鉛直方向への膨張に見られる¹。一方で、骨組モデルでは、そのような変形が変位場の拘束により表されず、その分、剛性が高く評価されていると思われる。

したがって、通常の荷重を受ける骨組構造に対しては、ほとんど影響を及ぼさない部材軸直角方向の変形は、ここでの微視問題では重要な役割を果たしていると言える。その対応策は次節に述べる。

(2) せん断変形の影響

図-4~6より、連続体ソリッド要素は、明らかにせん断変形を呈しており、連続体と骨組モデルから得られる均質化材料定数の違いの生じる原因として、梁部材を Bernoulli-Euler 梁とし、せん断変形を拘束したことが考えられる。このせん断変形は Timoshenko 梁を用いることにより、考慮できるが、その前にこのせん断変形を無視したことによる影響について、ユニットセルを構成している部材の細長比を変えることにより考察を行った。梁部材においてはその細長比を大きくすれば曲

¹ ここに挙げた変形は、材料の Poisson 比を 0 としているので、軸変形の影響ではない。

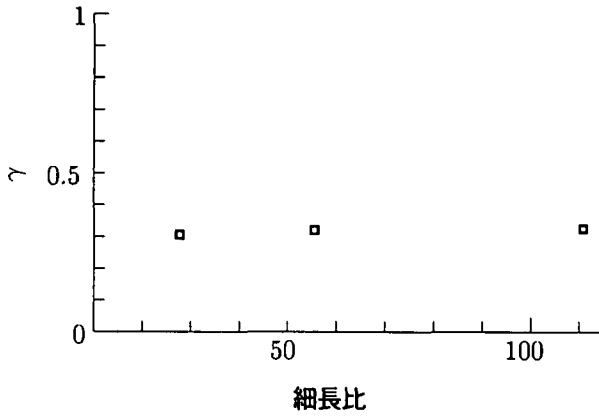


図-9 γと細長比の関係

げに伴うせん断変形による影響は少なくなり、逆に細長比を小さくすれば、そのことによる誤差は大きくなる。そこで、連続体モデルと骨組モデルとで、梁部材の細長比を変えて算出した均質化材料定数の比較を、一例として E_{1212}^H を取り上げて行う。ここで、ユニットセルを構成している梁の長さを L 、梁の全高を h としたとき、 $h/L = 1/4$ 、 $h/L = 1/8$ 、 $h/L = 1/16$ とした梁部材により構成されるユニットセルを用いた。 $h/L = 1/8$ のモデルは図-4～図-6に示したものと同一であり、 $h/L = 1/4$ 、 $h/L = 1/16$ については、図-7に示す。この時、部材の細長比はそれぞれ 27.7, 55.5, 110.8 となる。これらより得られた連続体モデル、骨組モデルそれぞれの細長比と E_{1212}^H の関係を図-8に示す。また、その相対誤差を表すものとして、骨組の均質化材料定数に対する連続体の均質化材料定数の比率を γ として、細長比との関係を図-9に示す。

この結果より、細長比を変えても連続体モデルと骨組モデルとの相対誤差は大きく変わらず、曲げに伴うせん断変形を無視することの影響が、均質化材料定数に対して支配的ではないことが示される。よって、Timoshenko 梁を用いたせん断変形の考慮も効果的ではないことが予想される。

4. 特性変位関数の考察に基づく変位場による拘束の補正方法

先に述べたように、従来の連続体要素による結果に対し、骨組み要素を用いた本解析法による均質化材料定数は非常にかけ離れた値となった。さらに、このことは骨組要素の変位場によって拘束される部材軸直角方向の膨張や収縮といった変形、およびせん断変形が原因であると考察された。そのため、部材軸直角方向およびせん断変形の影響を考慮することにより、本解析結果を従来の連続体要素を用いたものに近づけることができると考えられる。そこで、本節では、このことに着目し、本解析法の精度の向上を試みる。

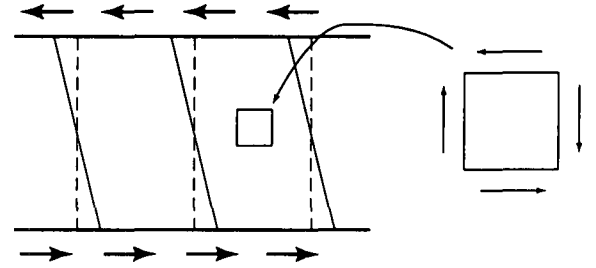


図-10 骨組部材に作用する巨視内力のせん断力成分

3.3 節に述べたように、均質化材料定数は、元の材料定数から、特性変位に材料定数を乗じたものを差し引いたものと考えられる。特性変位関数は、式 (14) で示される巨視変位による変形と微視変位による変形に起因する応力の自己つり合いを意味する微視問題より、単位巨視ひずみに対する微視構造の応答変位として得られる。したがって、特性変位の変位勾配に材料定数を乗じたものは、単位巨視ひずみに対する特性変位による変形に起因する応力と考えることもできる。均質化材料定数は形式的に元の材料定数とこの応力の差となっている。ところが、骨組モデルでは、変位場の拘束により、微視構造の変形から直接微視構造の応力を求める事は不可能である。しかし、式 (14) で表される微視問題は、微視構造における巨視ひずみによる内力と、微視変位による変形に起因する内力の釣合式であるので、この式における巨視内力の部材軸直角方向成分およびせん断成分から、微視構造の内力が半解析的に求められそうである。つまり、この単位巨視ひずみに対する微視構造の部材軸直角方向およびせん断応力を予測できれば、それを部材軸直角方向およびせん断変形の補正項として考え、均質化材料定数を算出する際に、元の材料定数から差し引く微視内力として考えることで最終的に得られる均質化材料定数の精度の改善が期待できる。以下に、その補正項の具体的な導出手順を述べる。

固定座標系で与えられた巨視ひずみ $\partial u_k^0 / \partial x_\ell$ に対する、局所座標系における巨視内力 $f_{ijk\ell}$ は以下のようになる。

$$f_{ijk\ell} = E_{ijst} R_{ks} R_{\ell t} \quad (29)$$

この成分のうち、部材軸方向の変形は骨組みの変位場で表せるため、それ以外の成分を補正項 $f'_{ijk\ell}$ とする。すなわち、 $f'_{11k\ell} = 0$ である。

また、巨視内力のせん断成分は図-10の右の微小要素に示すように作用する。この時、部材内部に関しては自己釣合を保つが、図-10の左に示したように、部材表面にのみ、それに見合う微視内力が必要となり、同図のような微視変形が生じる。したがって、 $\partial \bar{u} / \partial \bar{y}_2$ 成分に相当する補正を行えばよい。以下のひずみの定義

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}_1} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}_2} \right) \quad (30)$$

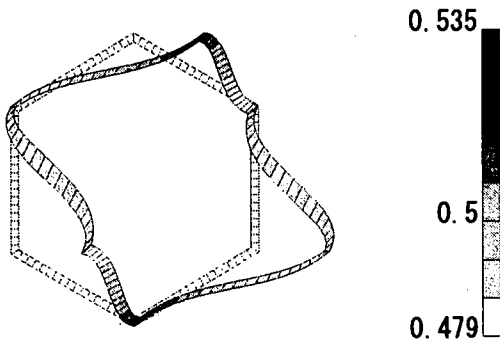


図-11 巨視ひずみ $\partial u_1^0 / \partial x_2 = -1$ に対する微視応答

を考慮すれば、せん断成分に対しては巨視内力の $1/2$ を補正項とすればよいことになる。図-11における濃淡は前節の解析例において得られた巨視ひずみ $\partial u_1^0 / \partial x_2 = -1$ に対する微視変形に起因するせん断応力を Young 率 E で無次元化したものであるが、特に鉛直部材において生じているせん断応力がほぼ 0.5 付近となっている。このことから、前述の補正項が $1/2$ となることが裏付けられる。また、このせん断成分とはマクロ構造の一物質点にせん断変形が生じた時、そのミクロ構造の各部材に生じる変形のせん断成分であり、3.3(2)節で論じた曲げに伴うせん断変形とは異なるものである。

以上の二点を踏まえると、最終的な補正項 $f_{ij\bar{k}\bar{l}}$ をその成分を $\bar{i}\bar{j}$ についてのみ書き下せば

$$f_{ij\bar{k}\bar{l}}^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_{12\bar{s}\bar{t}} R_{k\bar{s}} R_{l\bar{t}} \\ \text{symm.} & E_{22\bar{s}\bar{t}} R_{k\bar{s}} R_{l\bar{t}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。

この補正項を、単位巨視ひずみに対する微視構造における付加的な応答力として考え、骨組構造としての応答力に加える。これにより、均質化材料定数の算定式は以下のように補正される。

$$E_{mnkl}^H = \frac{1}{|Y|} \sum_c \int_{\ell_c} h_c \left\{ E_{mnkl} - R_{m\bar{i}}^T R_{n\bar{j}}^T \left(E_{i\bar{j}1\bar{1}} \frac{d\bar{u}_a^{kl}(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} + f_{i\bar{j}k\bar{l}}^t \right) \right\} d\bar{y}_1 \quad (32)$$

5. 補正項を考慮した解析結果と考察

5.1 補正結果

再び、3節で取り上げた正六角セルを解析例として、前節に述べた部材軸直角方向およびせん断変形を考慮するための補正項を用いた解析結果を示す。正六角形セルおよび有限要素分割および材料特性は3節の解析例で用いたものと同じものを用いた。連続体モデルの均質化材料定数については、すでに式(28)のように得られている。

骨組モデルの均質化材料定数は部材軸直角方向およびせん断変形の補正項を含む式(32)により与えられ

$$\begin{aligned} \frac{E_{1111}^H}{E} &= \frac{E_{2222}^H}{E} = 3.17 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1122}^H}{E} &= \frac{E_{2211}^H}{E} = 3.13 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1212}^H}{E} &= 4.77 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1112}^H}{E} &= \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

となった。補正項を含む骨組モデルの均質化材料定数の連続体による均質化材料定数との差は E_{1111}^H 及び E_{2222}^H で約 15%, E_{1122}^H 及び E_{2211}^H で約 11%, E_{1212}^H で約 23% となった。

5.2 補正後の考察

この補正後の結果は補正前の結果と異なり、連続体の値よりも剛性が低く得られた。したがって、連続体モデルにおける要素分割の不足、ロッキング等により、連続体での剛性を過大評価していることが原因として考えられる。そこで、連続体における要素をさらに4分割し、要素数を4倍としたものの結果を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{E_{1111}^H}{E} &= \frac{E_{2222}^H}{E} = 3.69 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1122}^H}{E} &= \frac{E_{2211}^H}{E} = 3.55 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1212}^H}{E} &= 6.14 \times 10^{-2} \\ \frac{E_{1112}^H}{E} &= \frac{E_{2212}^H}{E} = \frac{E_{1211}^H}{E} = \frac{E_{1222}^H}{E} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

この結果、連続体の均質化材料定数は2%程度低くなった。これにより、骨組による均質化材料定数との差は E_{1111}^H 及び E_{2222}^H で約 14%, E_{1122}^H 及び E_{2211}^H で約 11%, E_{1212}^H で約 22% となり、連続体モデルの要素分割の問題が支配的ではないことが分かる。よって、補正項により過剰補正されていることになり、今後、補正項に対するさらなる検討が必要とされる。

6. おわりに

本論文は従来の均質化法に対し異なる離散モデルの適用を目的とし、均質化法において導かれる微視問題に対して、骨組モデルの変位場を導入し定式化を行った。ミクロ問題に骨組要素を適用することは、単なる既存の手法の組み合わせでしかないが、本論文では正六角形セル構造体を対象とした解析例から、均質化法におけるミクロ問題では、その離散モデルに関して骨組要素の適用の際に注意が必要となることを明らかにした。

上記の問題点に対し、特性変位関数について考察することで部材軸直角方向の変形の影響などを考慮した均質化材料定数の補正方法を提案した。この補正項を導入す

ることにより、骨組モデルによる解析の精度は大きく向上したと言えるが、実用できるほどの一致は見られず、改善の余地を残す結果となった。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: *Cellular solids*, CAMBRIDGE, 1997.
- 2) Gent, N. and Thomas, A.G.: The deformation of foamed elastic materials *J. Appl. Polymer Science*, Vol.1, pp.107-113, 1959.
- 3) Warren, W.E., Kraynik, A.M. and Stone, C.M.: A constitutive model for two-dimensional nonlinear elastic foams, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, No.6, pp.717-733, 1989.
- 4) Papka, S.D. and Kyriakides, S.: Biaxial crushing of honeycombs—part I: Experiments, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol.36, pp.4367-4396, 1999.
- 5) Harren, S.V. and Asaro, R.J.: Nonuniform deformations in polycrystals and aspects of the validity of the Taylor model, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, No.2, pp.191-232, 1989.
- 6) Chapman, A.M. and Higdon, J.J.L.: Effective elastic properties for a periodic bicontinuous porous medium, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42, No.2, pp.283-305, 1994.
- 7) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, 1978.
- 8) Bakhvalov, N. and Panasenko, G.: *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 9) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 10) 齊木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏: 局所的不安定性を考慮したセル構造体のマルチスケール解析におけるユニットセルの適切なモデルに関する一考察, 計算工学講演会論文集, Vol.4, No.2, pp.745-748, 1999.
- 11) 齊木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏: セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.2, pp.287-294, 1999.
- 12) 齊木 功, 寺田賢二郎, 堀 宗朗, 池田清宏: 巨視的材料不安定性のマルチスケールモデリングにおける微視的構造周期のブロック対角化法による同定, 応用力学論文集, Vol.3(掲載予定).
- 13) Moulinec, H. and Suquet, P.: A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites, *C.R Acad. Sci. Paris*, Vol.318, pp.1417-1423, 1994.
- 14) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 15) 齊木 功, 後藤文彦, 岩熊哲夫: 有限回転を許容する棒部材の三次元動的数値解析の一手法, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.315-322, 1998.

(2000 年 4 月 21 日 受付)