

時間領域二次元面外波動場境界要素法への パネルクラスタリング法の適用

APPLICATION OF THE PANEL CLUSTERING METHOD TO THE BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF THE ANTI-PLANE WAVE FIELD

市村 強*・堀 宗朗**

Tsuyoshi ICHIMURA and Muneo HORI

*学生会員 修士 東京大学大学院 社会基盤工学専攻 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

**正会員 Ph.D. 東京大学助教授 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

The application of transformation methods such as the Fourier transformation is difficult, when the boundary condition is implicitly given and changes with time such as in time domain problems. We consider that solving this kind of problem by applying time subtraction solution method. When time subtraction solution method is applied, domain integration of the apparent body force requires a huge amount of computation. In this paper, the panel clustering method is applied for this domain integration, and the reduction of a huge amount of computation is being attempted. This method is applied to the anti-plane wave field problem, and it is confirmed that the amount of computation was drastically reduced.

Key Words : Boundary Element Method, Panel Clustering Method

1. はじめに

地震の波動場問題のような半無限構造における波動場計算をおこなう場合、有限領域で打ち切って計算をおこなう。そのため仮想的に導入した境界からの反射波の除去が課題となる。たとえば、この問題の解決は有限要素法などの領域型計算手法ではいまだに難しいとされている¹⁾。一方、境界要素法では開領域を扱うのは比較的難しくないとされている。そのため、ここでは境界要素法を用いて半無限構造における波動場計算をおこなうことを考える。

時間依存問題の境界要素法解析に対しては、次の3種類の解析法が適用できる²⁾³⁾。

1. Laplace 変換または Fourier 変換を用いる解法 (変換解法)
2. 時間依存の基本解を用いる解法 (直接解法)
3. 時間微分を時間差分で近似する方法 (時間差分解法)

しかし、例えば断層の釣り合いを各時間ごとに計算しながら解いていく場合などのように、境界条件が時間に依存して変化しさらに陽的に与えられていない場合には、変換解法の適用は難しい。また、直接解法でも各時間ごとの断層の釣り合いを考えて解くのは難しいと考えられる。一方、時間差分解法では各時間ごとに解いていくので比較的導入が簡単であろうと考えられる。そのため、ここでは時間差分解法をもちいて波動場の計算をおこなうことをめざす。

時間差分解法を適用する際にはいくつかの課題がある。たとえば、時間差分のスキーム、スキームのパラメータに鋭敏である²⁾、みかけの物体力に関する領域積分をどの程度の精度でおこなえばよいのかの判断、計算量が膨大となることなどがある。

以上の課題のうちとくに計算量が膨大となることの解決をはかる。境界要素法の計算量は反復法を使った場合、要素数の2乗に比例することが知られており、これが大規模問題に境界要素法を適用することの難点とされていた。近年、この計算量を軽減するために多重極展開法⁴⁾⁵⁾やパネルクラスタリング法⁶⁾などの計算手法が提案されている。ここでは、パネルクラスタリング法をみかけの物体力に関する領域積分に適用することにより計算量の軽減をはかる。検証のための問題として面外波動場問題を選んだ。

2. 定式化

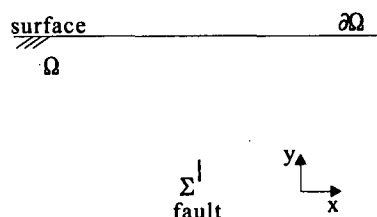


図-1 定式化のためのモデル

ここでは、面外波動場問題の時間に関する二回微分を時間差分で近似した場合の積分方程式を導出する。解析の対象として図-1のような表面 $\partial\Omega$ 、断層 Σ を含む半無限領域 Ω を考える。物体力がない場合の面外波動場の支配方程式は以下になる。

$$\rho \ddot{u}(\mathbf{x}, t) - \rho c_t^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1)$$

ここで c_t は横波速度、 ρ は密度、 u は変位、 $\mathbf{x}$ は位置ベクトル (x, y) 、 t は時間、 $\ddot{}$ は時間に関する二回微分、 ∇^2 は $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ をそれぞれあらわしている。

時間に関する二回微分 $\ddot{u}$ を時間差分で近似する。ここでは、参考文献²⁾を参考にして Wilson の θ 法⁷⁾で近似することとする。時間ステップ dt は一定とする。 $t_n \leq t_n + \tau \leq t_n + \theta dt$ ($\theta \geq 1$) の区間で加速度が線形変化するものとする。すなわち、

$$\ddot{u}(t_n + \tau) = \ddot{u}(t_n) + \frac{\tau}{\theta dt} (\ddot{u}(t_n + \theta dt) - \ddot{u}(t_n)). \quad (2)$$

式 (2) を τ について積分し次の二式をえる。

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_n + \tau) &= \dot{u}(t_n) + \tau \ddot{u}(t_n) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2\theta dt} (\ddot{u}(t_n + \theta dt) - \ddot{u}(t_n)). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(t_n + \tau) &= u(t_n) + \tau \dot{u}(t_n) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}(t_n) + \frac{\tau^3}{6\theta dt} (\ddot{u}(t_n + \theta dt) - \ddot{u}(t_n)). \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) で $\tau = \theta dt$ として $\ddot{u}(t_n + \theta dt)$ について解く。

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t_n + \theta dt) &= \frac{6}{(\theta dt)^2} (u(t_n + \theta dt) - u(t_n)) \\ &\quad - \frac{6}{\theta dt} \dot{u}(t_n) - 2\ddot{u}(t_n). \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) を式 (1) に代入し、 $u(t_n + \theta dt)$ に関する次式をえる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{6}{(\theta dt)^2} u(\mathbf{x}, t_n + \theta dt) + f_n(\mathbf{x}) \right) \\ - \rho c_t^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t_n + \theta dt) = 0, \\ f_n(\mathbf{x}) = -\frac{6}{(\theta dt)^2} u(\mathbf{x}, t_n) - \frac{6}{\theta dt} \dot{u}(\mathbf{x}, t_n) - 2\ddot{u}(\mathbf{x}, t_n). \end{aligned}$$

積分方程式になおすと以下のようになる。

$$\begin{aligned} cu(\mathbf{x}, t_n + \theta dt) &= - \int_{\partial\Omega} q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u(\mathbf{y}, t_n + \theta dt) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Sigma} q^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) [u(\mathbf{z}, t_n + \theta dt)] dS(\mathbf{z}) \\ &\quad + \int_{\Omega} u^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) f_n(\mathbf{z}) dV(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $[*]$ は断層面上での食い違い量をしめしている⁸⁾。これを解いて $u(\mathbf{x}, t_n + \theta dt)$ をもとめ、式 (5)

と $\tau = dt$ とした式 (2), (3), (4) に代入し $u(t_{n+1})$, $\dot{u}(t_{n+1})$, $\ddot{u}(t_{n+1})$ をもとめる。

ここで、

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi G} K_0\left(\frac{\sqrt{6}}{c_t \theta dt} r\right), \\ q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= -\frac{\sqrt{6}}{2\pi r c_t \theta dt} K_1\left(\frac{\sqrt{6}}{c_t \theta dt} r\right) (x n_x + y n_y), \\ r &= |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \end{aligned}$$

K_0 , K_1 はそれぞれ 0 次、1 次の第 2 種変形 Bessel 関数、 c は境界形状によって決まる定数、 c_t は横波速度、 G はせん断剛性、 x, y はそれぞれ $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ の x, y 成分、 n_x, n_y はそれぞれ面上の点 $\mathbf{y}$ での法線の x, y 成分である。

3. 数値実験

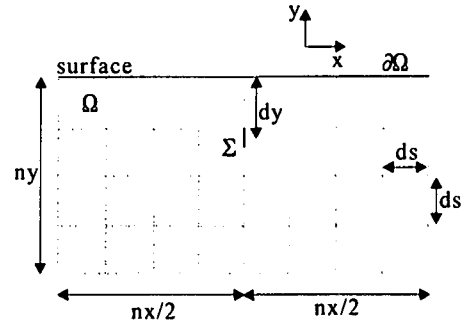


図-2 数値実験のためのモデル

数値実験のためのモデルとして図-2を設定する。定式化で用いたモデルにおいて水平半無限構造とし、断層 Σ の法線を $(x, y) = (1, 0)$ とした。断層 Σ は地表 $\partial\Omega$ から dy の深さとする。 x 方向の位置としては領域の中心とした。領域積分の対象となる範囲 Ω として x 方向に nx 要素、 y 方向に ny 要素を考慮する。要素は $ds \times ds$ の大きさの正方形要素とする。このとき積分方程式 (6) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} cu(\mathbf{x}, t_n + \theta dt) &= \int_{\Sigma} q^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) [u(\mathbf{z}, t_n + \theta dt)] dS(\mathbf{z}) \\ &\quad + \int_{\Omega} u^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) f_n(\mathbf{z}) dV(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) の積分方程式を解く場合、領域積分に関する計算量が膨大となる。そのため、要素数が多い問題を解くことが難しいとされる。ここでは、パネルクラスタリング法⁶⁾ (付録 I, 付録 II 参照) をこの領域積分に対して適用し大規模問題に対しても解析をおこなうことができるようにした¹⁾。図-3, 4 において、パネルク

¹⁾ 一次要素をもちい、面積分には Gauss の 16 点数値積分を線積分には Gauss の 4 点数値積分をもちいた。

ラスタリング法適用の効果を検証する。グラフの横軸は領域 Ω の x 方向の要素数 n_x を表している。系列の数字は y 方向の要素数 n_y を、pcm と none はそれぞれパネルクラスタリング法が適用されているか否かをしめしている。図-3 は 1 ステップ計算するのに要する cpu time, 図-4 はそのうちで領域積分に要する cpu time をあらわしている。両図からパネルクラスタリング法の導入によって必要な cpu time が大幅に軽減されていることがわかる²。ここでもちいたパネルクラスタリング法では、局所展開を用いていないので計算量は $n \log(n)$ に比例する⁹⁾といわれており、実際、本論文での結果もそれと同様になっている。多重極展開法をもちいた場合には、計算量が n に比例することが知られているのでさらに大幅な計算量の軽減がみこまれる。また、クラスタリング条件や Taylor 展開の微係数などをメモリ上に保持することや並列化を巧みにおこなうことによりさらに大幅な計算量の軽減をはかることが期待できる。

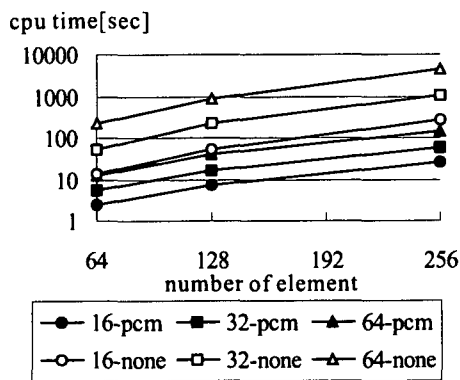


図-3 1 ステップに要する cpu time

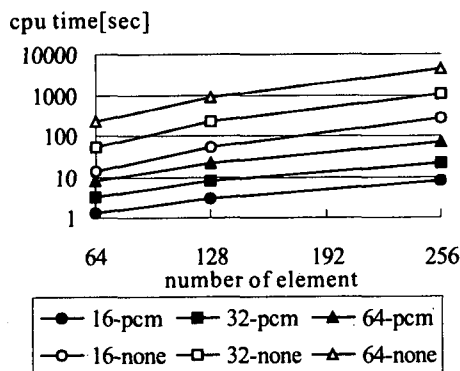


図-4 1 ステップにおける領域積分の cpu time

次に厳密解との比較により精度を検証する (付録 III 参照)。パラメータは、 $\rho = 1.0[\text{kg}/\text{m}^3]$, $c_t =$

$1.0[\text{m}/\text{sec}]$, $ds = 0.1[\text{m}]$, $dy = 0.15[\text{m}]$; $\theta = 1.45$ とした。考える領域 $\partial\Omega$ は、 $n_x = 128$, $n_y = 32$ とした。断面面 Σ は点震源として食い違い量が振幅 1, 周期 $20dt[\text{sec}]$ の調和波動を入力する。図-5, 6, 7 においてそれぞれ $dt = 5.[\text{sec}]$, $dt = 10.[\text{sec}]$, $dt = 20.[\text{sec}]$ の場合の厳密解との比較をおこなう。縦軸は振幅, 横軸は地表面でのノード番号をしめしている (ノード数 129 で中心のノードを 0 とおいた)。 dt が小さい場合でも中心のノード付近では厳密解との良好な一致がみられる。しかし、端点に近づくにつれて厳密解との乖離が大きくなっている。これは領域積分を有限域で打ち切っているためその影響が端点に近づくにつれて大きくなるためと考えられる。

つぎに時間領域で波動が厳密に形成されているかを確認する。ここでは調和波動を入力しているので定常状態に達した後は調和波動場がえられる。この調和波動場の振幅, 周期を確認し厳密解と比較する。図-8 は上記のパラメータで、 $dt = 10.[\text{sec}]$ としたときのノード番号 1 の地点でえられた変位をあらわしている。縦軸は振幅, 横軸はタイムステップをそれぞれしめしている。波の形が崩れることなく良好な調和波動場が形成されていることがわかる。また、振幅, 周期ともに厳密解と良好な一致をみた。

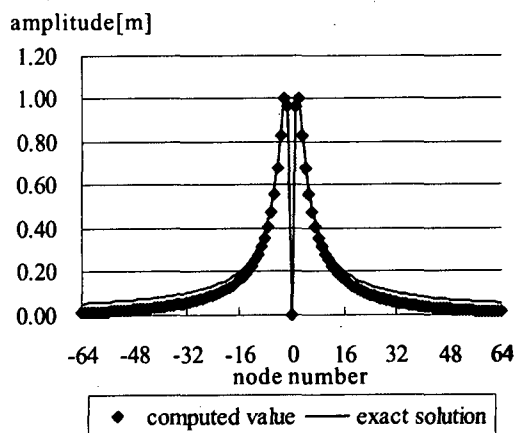


図-5 厳密解との比較 ($dt = 5.[\text{sec}]$)

4. おわりに

時間差分法であられる領域積分にパネルクラスタリング法を適用することにより計算時間を大幅に軽減した。また、厳密解と比較することにより精度の検証をおこなった。

本論文では、領域積分にのみパネルクラスタリング法を導入したが他の計算部分にも適用することにより、さらに計算量の軽減をはかることが出来る。また、パ

² 数値計算には DELL PRECISION 610, Pentium III 550MHz, メモリ 512[MB] をもちいた

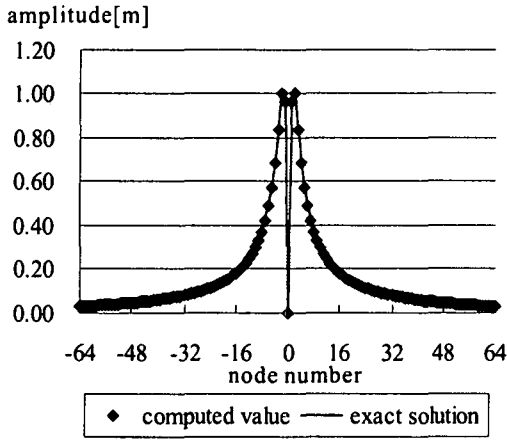


図-6 厳密解との比較 ($dt = 10.[sec]$)

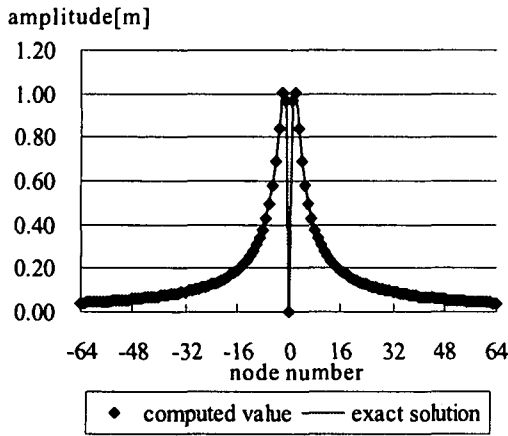


図-7 厳密解との比較 ($dt = 20.[sec]$)

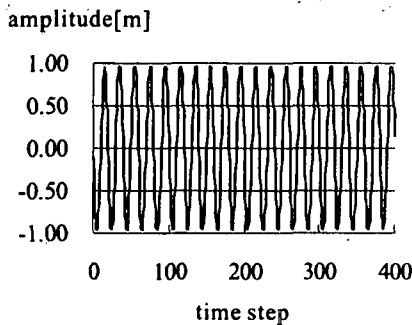


図-8 計算結果の例 ($dt = 10.[sec]$)

ネルクラスタリング法だけでなく多重極展開法をもちいても同様のことをおこなうことができる。さらにいままで研究されてきた種々の両手法のアルゴリズムを多少の改良のみで適用することが可能であると考えられる。

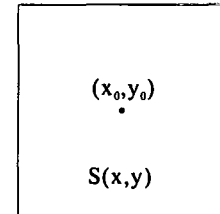
本論文では、計算量の軽減を主目標としたため個別

に領域積分の精度に対する検討や時間近似スキームに対する検討をくわえなかった。しかし、厳密解との比較でもわかるように効率的な解析のためには今回第一義としなかった課題についても考慮すべき余地があることが示唆されている。今後は領域積分の精度をどの程度までとればよいのか、また、時間近似スキームの影響についても検討をくわえながら面内波動場問題、三次元動弾性問題に対して本手法の適用を検討していきたいと考えている。

付録 I パネルクラスタリング法

ここでは、参考文献⁶⁾に基づいてパネルクラスタリング法について概説する。直交座標をもちいた境界要素法を考える。図-9であらわされる領域 $S(x, y)$ 面上の $u(x, y)$ (変位, トラクションなど) の原点 o への影響は形式的に式 (I.1) に帰着される (ここで $u(x, y)$ のグリーン関数を $G(x_0, y_0; x, y)$ とする)。

$$\int_S G(0, 0; x, y) u(x, y) dS(x, y). \quad (I.1)$$



o

図-9 $S(x, y)$ 面と原点 o

以下では、この式であらわされる積分計算の効率化のためのパネルクラスタリング法を導出する。まず、 $G(0, 0; x, y)$ を $S(x, y)$ 面上の (x_0, y_0) について Taylor 展開し整理すると式 (I.2) をえる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \frac{\partial^{(k+l)} G(0, 0; x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \bigg|_{(x_0, y_0)} \times \int_S (x - x_0)^k (y - y_0)^l u(x, y) dS(x, y). \quad (I.2)$$

つぎに、図-9の $S(x, y)$ 面を図-10のように分割する場合を考える。式 (10) の積分は Taylor 展開により次式に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_S (x - x_0)^k (y - y_0)^l u(x, y) dS(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \binom{k}{k'} \binom{l}{l'} (x_i - x_0)^{k-k'} (y_i - y_0)^{l-l'} \\ & \quad \times \int_{S_i} (x - x_i)^{k'} (y - y_i)^{l'} u(x, y) dS_i(x, y) \end{aligned}$$

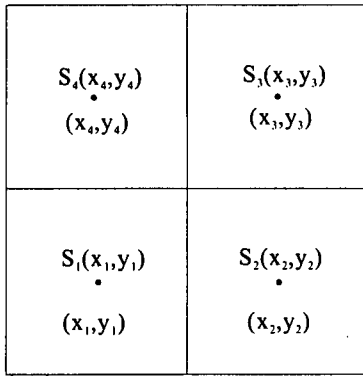


図-10 $S(x, y)$ 面の分割法

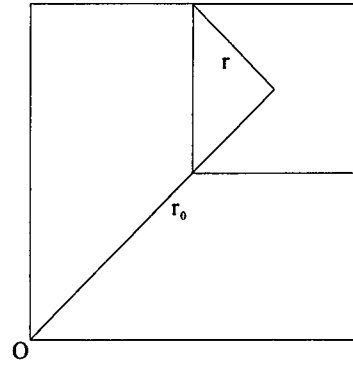


図-11 クラスタリング条件

これは $S(x, y)$ 面による影響を考える場合には、先に計算しておいた $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$, $S_4(x, y)$ の積分の結果を組み合わせればよいことをしている。すなわち、はじめに最も細かいメッシュについて積分の値を計算しておけば、それらを許容される誤差の範囲内で組み合わせることによって、いちいち積分計算をしなくてもよいことになる。この結果、境界要素法的高速化が達成される。

付録 II パネルクラスタリング法の精度

式 (I.2) をもちいてパネルクラスタリング法で実際に数値計算をおこなう場合、Taylor 展開の項数を途中で打ち切る。そのため、グリーン関数がどの程度の精度で Taylor 展開によって再現されているかを考慮しなければならない。具体的には、次式の最大の展開項数 n 、微係数、補間する距離 $(x - x_0)$ と $(y - y_0)$ に精度は支配される。

$$G(0, 0; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{k! l!} \left. \frac{\partial^{(k+l)} G(0, 0; x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^k (y - y_0)^l.$$

また、近似精度は同じクラスタリング条件 (図-11 の $\frac{r}{r_0}$)・展開項数であってもグリーン関数の内の各定数 (θ , c_t , dt 等) に依存する。そのため、解析への適用の際には、モデルのパラメータにしたがって、数値的に精度を評価する必要がある。

今回は領域積分に関連する基本解 u^* のパラメータ、 $\theta = 1.45$, $c_t = 1.0[\text{m/sec}]$, $\rho = 1.0[\text{kg/m}^3]$, $dt = 5.[\text{sec}]$, $10.[\text{sec}]$, $20.[\text{sec}]$ について評価をおこなった。図-12 に $dt = 10.[\text{sec}]$ のときの精度評価をしめす³。ここで、前式の x , y , x_0 , y_0 をもちいて、 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ とし、 $x_0 = 5.0$, $y_0 = 5.0$, $x = 5.0 + 0.5i$, $y = 5.0 + 0.5i$ を代入した ($i=1, 2, 3, 4, 5$)。 $dt = 5.[\text{sec}]$, $20.[\text{sec}]$ の各場

³ 相対誤差を $|\frac{u_{\text{exa.}} - u_{\text{approx.}}}{u_{\text{exa.}}}|$ と定義した。

合についても評価をくわえ、結局、 $\frac{r}{r_0} < 0.2$, Taylor 展開の項数を 6 とした。

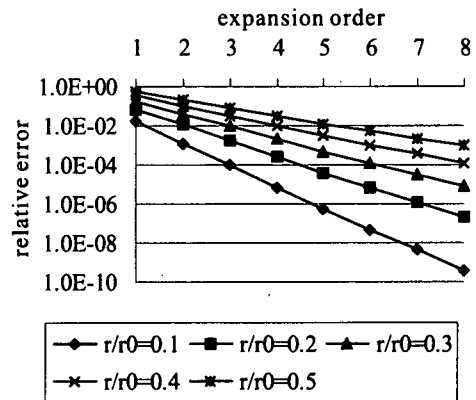


図-12 基本解 u^* の精度

付録 III 比較に用いた解

面外波動場問題の支配方程式は、式 (1) であらわされる。周波数 ω をもちいて解が $\tilde{u}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$ の形であらわされるとすると支配方程式は次のようになる。

$$\omega^2 \rho \tilde{u}(\mathbf{x}) + \rho c_t^2 \nabla^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{III.1})$$

図-1 のモデルに対する積分方程式は、

$$c \tilde{u}(\mathbf{x}) = - \int_{\partial \Omega} q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{u}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\Sigma} q^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \tilde{u}(\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}).$$

ここで、

$$q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\omega i}{4c_t r} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_t} r\right) (x n_x + y n_y),$$

$$r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|,$$

$H_1^{(2)}$ は 1 次の第 2 種 Hankel 関数、 c_t は横波の速度、 c は境界形状によって決まる定数、 x , y はそれぞれ $\mathbf{y} - \mathbf{x}$

の x, y 成分, n_x, n_y はそれぞれ面上の点 y での法線の x, y 成分.

とくに, 本論文の数値実験で扱ったように表面 $\partial\Omega$ が水平の場合, 簡単になり以下のようになる.

$$\frac{1}{2}\ddot{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} q^*(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \ddot{u}(\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}).$$

参考文献

- 1) Hesheng Bao: FINITE ELEMENT SIMULATION OF EARTHQUAKE GROUND MOTION IN REALISTIC BASINS, *Carnegie Mellon University*, Ph. D. thesis, 1998.
- 2) 田中正隆, 松本敏郎: 時間差分スキームに基づく非定常動弾性境界要素法解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 55 巻 515 号, pp.1577-1583, 1989.
- 3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, 1996.
- 4) 福井卓雄, 井上耕一: 高速多重極境界要素法による 2 次元動弾性問題の解析, 応用力学論文集, vol.1, pp.373-380, 1998.
- 5) 渡辺修, 速水謙: 多重極展開法による境界要素法の高速度化, *BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集*, 4, pp.39-44, 1994.
- 6) 市村強, 堀宗朗: 都市強震動予測のためのマクロ・ミクロ解析, 応用力学論文集, vol.1, pp.607-612, 1998.
- 7) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック 2 応用編, 培風館, 1997.
- 8) K. Aki, Paul G. Richards: QUANTITATIVE SEISMOLOGY Theory and Methods VOLUME 1, W. H. FREEMAN AND COMPANY, 1980.
- 9) 福井卓雄: 境界要素法の研究—高速・高精度計算法の開発と応用—京都大学大学院工学研究科学学位論文, 1998.

謝辞

本研究を進めるにあたり, 福井卓雄教授 (福井大学) に大変有益なご助言をいただきました. また, 西村直志教授 (京都大学), 速水謙教授 (東京大学) にも有益なご示唆をいただきました. ここに記して感謝いたします. 本研究は第一著者が日本学術振興会特別研究員であった期間中に行われ, 平成 11 年度科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) の補助を受けた.

(2000 年 4 月 21 日 受付)