

## 多重極積分方程式法を用いたクラックによる 3次元弾性波動散乱問題の解析

Analysis of Three Dimensional Scattering of Elastic Waves by a Crack with Fast Multipole  
Boundary Integral Equation Method

吉田研一\*, 西村直志\*\*, 小林昭一\*\*\*

Ken-ichi YOSHIDA, Naoshi NISHIMURA and Shoichi KOBAYASHI

\*学生会員 工修 京都大学工学研究科環境地球工学専攻  
\*\*正会員 工博 助教授 京都大学工学研究科環境地球工学専攻  
\*\*\*フェロー 工博 教授 福井工業大学工学部

This paper discusses an application of FMM (Fast Multipole Method) using Wigner-3j symbols to the BIE (Boundary Integral Equation) analysis of the three dimensional scattering of elastic waves by a crack. The boundary integral equation is discretised with piecewise constant shape functions. The resulting algebraic equation is solved with preconditioned GMRES (Generalised MinimuN RESidual method). It is shown that FMM is more efficient than the conventional BIEM (Boundary Integral Equation Method) when the number of unknowns is larger than several thousands.

**Key Words :** FMM, Wigner-3j symbol, BIE, GMRES, BIEM

### 1. 序

多重極法 (FMM) は, Rokhlin<sup>1)</sup>の積分方程式の研究に端を発し, Greengard<sup>2)</sup>らによって多体問題に応用され, 未知数の多い問題に有利な数値計算の手法のひとつとして発達してきた. 今では, 境界積分方程式や天文学などの多体問題<sup>3)</sup>だけでなく, 分子動力学<sup>4)</sup>の分野でも使われている. 従来の境界積分方程式法では  $n$  個の要素に対して, それらの相互の影響を計算する時に  $O(n^2)$  の計算量が必要となり, 直接法によって代数方程式を解くと  $O(n^3)$  の計算量が必要である. 一方, 多重極法では要素相互の影響を計算する時に, 近傍の要素に対しては従来どおり直接計算を用いるが, 離れた要素からの影響は多重極モーメント, 局所展開係数などを用いて計算する. これを反復法による線形方程式の解法と結び付けると, 反復一回あたりの計算量は  $O(n^{1+\alpha} \log^\beta n)$  ( $\alpha, \beta \geq 0, \alpha < 1$ ) 程度になる. このため, 多重極法は大規模問題の解法として有望であると考えられる. 最近の積分方程式に関連する研究としては, Laplace 方程式では, 速水<sup>5)</sup>, 西村<sup>6)</sup>, 静弾性問題では, 福井<sup>7)</sup>, Fu<sup>8)</sup>, 高橋<sup>9)</sup>, 吉田<sup>10),11)</sup> 等がある. 特に Helmholtz 方程式への多重極法の適用に関する研究は, diagonal form を用いたものが盛んで Rokhlin<sup>12),13)</sup>, 福井<sup>14)</sup>, Chew<sup>15)</sup>, Gyure<sup>16)</sup>, Epton<sup>17)</sup> などがある (diagonal form を用いた研究が盛んな理由については 4.1 で述べる). しかし, Rokhlin の diagonal form は Laplace 方程式や<sup>18)</sup> Helmholtz 方程式で周波数が高くない場合<sup>19)</sup> には数値的に不安定

である事が知られている. これを解決する方法としては, 従来型の多重極法を用いること, 及び, 数値的不安定を生じない新しい多重極法を用いることが考えられる. 後者の試みとして, Hrycak and Rokhlin が 2 次元 Laplace 方程式, Greengard and Rokhlin, Cheng らが 3 次元 Laplace 方程式, Greengard らが 3 次元 Helmholtz 方程式において, それぞれ改良型の新しい diagonal form を提案している<sup>20),21),22),23)</sup>. これらの新しい diagonal form では, 従来型の多重極法で用いられた M2M や L2L の道具が必要となり, これを用いた数値手法の開発が必要である<sup>24)</sup>. しかし, 3次元周波数域動弾性方程式の積分方程式への多重極法の適用は, 著者らの知る限りでは Rokhlin の diagonal form による解析が Fujiwara<sup>25)</sup>によって行われているのみで, 従来型の多重極法で 3次元解析が行われた例は無い. そこで, 本論文では, 3次元周波数域動弾性方程式を支配方程式とするクラックによる散乱問題において, 従来型の多重極法の定式化を試みる. 従って, 周波数が低い場合を取り扱い, 数値解法としては選点法, 形状関数としては区分一定要素, 代数方程式の解法としては反復法の GMRES を用いている. 数値実験の結果, 未知数が数千 (波数に依存する) の問題では従来法より多重極法が高速であることが結論される.

### 2. 積分方程式の定式化

無限領域  $D = R^3$  にクラック  $S$  が存在している場合を取り扱う. ここに, クラックとは, 自分自身と交わ

らない，縁  $\partial S$  を有する，一般には複数の滑らかな曲面である．動弾性クラック問題は次のように定式化される．なお，本論文では入射波の時間依存は  $e^{-i\omega t}$  とする．

支配方程式

$$C_{ijkl}u_{k,lj} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad \text{in } R^3 \setminus \bar{S}$$

境界条件

$$t^\pm = 0 \quad \text{on } S$$

正則条件

$$\phi = 0 \quad \text{on } \partial S$$

遠方で  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^I$  は放射条件を満たす．

ここに， $C_{ijkl}$  は弾性定数テンソルで  $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  と表され， $(\lambda, \mu)$  は Lamé 定数， $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである．また， $\rho$  は密度， $\mathbf{u}$  は変位， $\mathbf{u}^I$  は入射波，上つきの  $+(-)$  はクラックの単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の正(負)の向きからの極限值を意味し， $\mathbf{t}$  はトラクションであって，変位  $\mathbf{u}$  によって  $t_i = C_{ijkl}u_{k,l}n_j$  と書ける．更に， $\phi$  はクラック上での  $\mathbf{u}$  の不連続量，すなわち開口変位であり，

$$\phi := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$$

と表される．

この問題の解の変位に関する積分表示は次のようになる．

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^I(\mathbf{x}) + \int_S C_{jkn\ell} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (1)$$

ここに， $\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  は周波数域の 3 次元動弾性学の基本解であり，次のように書ける．

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \right) \quad (2)$$

また， $r$  は  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  を表しており， $k_T, k_L$  は横波，縦波の波数で

$$k_T = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega, \quad k_L = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \omega$$

と書ける．式(1)を微分して領域内の点  $\mathbf{x}$  をクラック上に極限移行し，境界条件を考慮すると，開口変位に関する超特異積分方程式

$$t_a^I(\mathbf{x}) = -n_b(\mathbf{x}) C_{ablm} \text{p.f.} \int_S C_{jkn\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial y_n} \Gamma_{mp}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times n_k(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{x} \in S \quad (3)$$

が得られる．ここに，p.f. は発散積分の有限部分を意味し， $t^I$  は  $\mathbf{u}^I$  に対応するトラクションである．さらに，上式にいわゆる正則化<sup>27)</sup>を用いて次のように変形

することが出来る．

$$t_a^I(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x}) C_{ablm} \text{v.p.} \int_S e_{rkl} C_{jkn\ell} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{mp}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times e_{riq} \phi_{j,i}(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - n_b(\mathbf{x}) C_{ablm} \rho \omega^2 \int_S \Gamma_{mj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

ここに， $e_{ijk}$  は交代記号，v.p. は Cauchy の主値を意味する．以上がクラックによる弾性波の散乱問題における積分方程式である．

### 3. 多重極法

ここでは，多重極法に必要な諸式の定式化及び多重極法のアルゴリズムについて述べる．

#### 3.1 基本解の展開

多重極法では最初に基本解に対する変数分離形の展開を求める．動弾性学の基本解の多重極展開を行なう．まず，基本解(2)は， $r \neq 0$  の時，次のように変形出来る．

$$\Gamma_{ip}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu k_T^2} \left( e_{rqi} e_{rsp} \partial_q^x \partial_s^y \frac{e^{ik_T r}}{r} + \partial_i^x \partial_p^y \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \quad (5)$$

ここに， $\partial_i^x, \partial_j^y$  はそれぞれ  $x_i, y_i$  に関する偏微分を表す．なお，変形にあたって，次の式を用いた．

$$(\Delta + k_T^2) \frac{e^{ik_T r}}{r} = 0 \quad (r \neq 0)$$

ここに， $\Delta$  は Laplacian である．さらに，次の 3 次元 Helmholtz 方程式の基本解の展開式を用いる．

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \bar{I}_n^m(k, \vec{Oy}) O_n^m(k, \vec{Ox}) \quad |\vec{Ox}| > |\vec{Oy}| \quad (6)$$

ここに， $\bar{A}$  は  $A$  の複素共役を意味し，関数  $O_n^m(k, \vec{Ox})$ ， $I_n^m(k, \vec{Ox})$  は以下のように表される．

$$O_n^m(k, \vec{Ox}) = h_n^{(1)}(k|\vec{Ox}|) Y_n^m(\widehat{Ox})$$

$$I_n^m(k, \vec{Ox}) = j_n(k|\vec{Ox}|) Y_n^m(\widehat{Ox})$$

上式で， $j_n(k|\vec{Ox}|)$ ， $h_n^{(1)}(k|\vec{Ox}|)$  はそれぞれ球 Bessel 関数，球 Hankel 関数で， $\widehat{Ox}$  は単位ベクトル  $\vec{Ox}/|\vec{Ox}|$  を意味する．また， $Y_n^m(\widehat{Ox})$  は

$$Y_n^m(\widehat{Ox}) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

で表される．ここに， $\theta, \phi$  は  $\vec{Ox}$  を極座標で表した時の天頂角と方位角で， $P_n^m(\cos\theta)$  は Legendre 陪関数である．

式(6)を式(5)に代入すれば，次の基本解の展開が得られる．

$$\Gamma_{ip}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) =$$

### 3.2 多重極展開と多重極モーメント

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{ri,n,m}^{T,O}(\vec{Ox}) e_{rsp} \partial_s^y \bar{I}_n^m(k_T, \vec{Oy}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{i,n,m}^{L,O}(\vec{Ox}) \partial_p^y \bar{I}_n^m(k_L, \vec{Oy}) \quad (7)$$

ここに、関数  $D_{ri,n,m}^{T,O}(\vec{Ox}), D_{i,n,m}^{L,O}(\vec{Ox})$  は

$$D_{ri,n,m}^{T,O}(\vec{Ox}) = \frac{i(2n+1)}{4\pi\mu k_T} e_{rqi} \partial_q^x O_n^m(k_T, \vec{Ox}) \quad (8)$$

$$D_{i,n,m}^{L,O}(\vec{Ox}) = \frac{ik_L(2n+1)}{4\pi\mu k_T^2} \partial_i^x O_n^m(k_L, \vec{Ox}) \quad (9)$$

また、 $O_n^m, \bar{I}_n^m$  には次節の定式化に必要な次の関係式<sup>17)</sup>がある。

$$\begin{aligned} \bar{I}_n^m(k, \vec{O'y}) = & \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^{m'} W_{n,n',m,m',l} \\ & \times \bar{I}_{n'}^{m'}(k, \vec{Oy}) I_l^{-m-m'}(k, \vec{O'O}) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_n^m(k, \vec{Ox}) = & \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^{m+n'} W_{n,n',m,m',l} \\ & \times I_{n'}^{-m'}(k, \vec{Ox}_0) O_l^{m+m'}(k, \vec{Ox}_0) \\ & \quad \quad \quad |\vec{Ox}_0| > |\vec{Ox}| \quad (11) \end{aligned}$$

ここに、 $W_{n,n',m,m',l}$  は

$$W_{n,n',m,m',l} = (2l+1)i^{n'-n+l} \begin{pmatrix} n & n' & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & n' & l \\ m & m' & -m-m' \end{pmatrix}$$

であり、 $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$  は次式で定義される Wigner-3j symbol である<sup>26)</sup>。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = & \left[ \frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!} \right]^{1/2} \\ & [(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)! \\ & (j_3+m_3)!(j_3-m_3)!]^{1/2} \sum_i [(-1)^{i+j_1-j_2-m_3}] \\ & \{i!(j_1+j_2-j_3-i)!(j_1-m_1-i)!(j_2+m_2-i)! \\ & (j_3-j_2+m_1+i)!(j_3-j_1-m_2+i)!\}^{-1} \end{aligned}$$

上式で、 $i$  は  $\{ \}$  内のすべての階乗をとる数が非負であるような有限の範囲を動く。

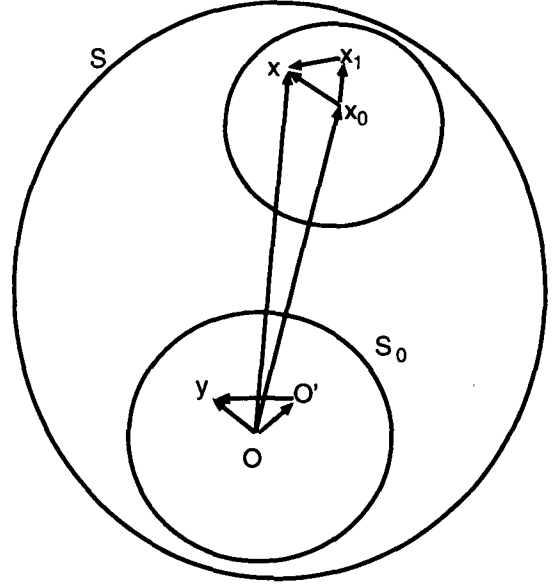


図-1 多重極展開

今、開口変位  $\phi$  が既知であるとする。この時クラック上の点  $\mathbf{x}$  において式 (3) の積分を評価することを考える。この際、基本解には  $\mathbf{x}$  において  $O(1/r)$  の特異性があるので、点  $\mathbf{x}$  の近傍からの寄与は正確に評価しなければならないが、 $\mathbf{x}$  から離れた  $S$  の部分  $S_0$  からの式 (3) の積分への寄与は、ひとまとめにして評価しようというのが多重極法である。そこで、 $\mathbf{x}$  は  $S_0$  から十分遠く、 $|Ox| > |Oy|$  ( $y \in S_0$ ) であるような  $O$  を考える (図-1)。そこで、式 (7) を使うと、式 (3) の積分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \text{p.f.} \int_{S_0} C_{jkt p} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial y_t} \Gamma_{ip}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ & \quad \times n_k(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) dS_y \quad \mathbf{x} \in S \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \partial_i^x D_{ri,n,m}^{T,O}(\vec{Ox}) M_{r,n,m}^T(O) \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \partial_i^x D_{i,n,m}^{L,O}(\vec{Ox}) M_{n,m}^L(O) \quad (12) \end{aligned}$$

ここに、 $M_r^T(O), M^L(O)$  は  $O$  に関する多重極モーメントであり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} M_{r,n,m}^T(O) = & \int_{S_0} C_{jkt p} e_{rsp} \partial_t^y \partial_s^y \bar{I}_n^m(k_T, \vec{Oy}) \phi_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (13) \\ M_{n,m}^L(O) = & \int_{S_0} C_{jkt p} \partial_t^y \partial_p^y \bar{I}_n^m(k_L, \vec{Oy}) \phi_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (14) \end{aligned}$$

$M_{r,n,m}^T$  はベクトル、 $M_{n,m}^L$  はスカラーであるので、この定式化は4つのモーメントを含んでいる事がわかる。次に、多重極モーメントを評価する際の原点を  $O$  から

$O'$  に移動した時の、多重極モーメントを変換する式を導出する (図-1). 式 (10) と式 (13), 式 (14) より次の多重極モーメントの原点移動の式が得られる.

$$M_{r,n,m}^T(O') = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^{m'} W_{n',n',m',m',l} \times I_l^{-m-m'}(k_T, \overrightarrow{O'O}) M_{r,n',-m'}^T(O) \quad (15)$$

$$M_{n,m}^L(O') = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^{m'} W_{n',n',m',m',l} \times I_l^{-m-m'}(k_L, \overrightarrow{O'O}) M_{n',-m'}^L(O) \quad (16)$$

### 3.3 局所展開係数

積分方程式 (3) を選点法によって解く場合,  $S$  上の多くの点  $\mathbf{x}$  で式 (3) に含まれる積分を評価しなければならない. しかし, これらを個々の  $\mathbf{x}$  について直接評価したのではあまり計算効率が高くない. そこで, ある点  $\mathbf{x}_0$  の近傍の点  $\mathbf{x}$  については,  $\mathbf{x}_0$  から遠くはなれた  $S$  の部分  $S_0$  からの式 (3) への寄与を, 点  $\mathbf{x}_0$  における何らかの級数展開の係数として評価することを考える (図-1). 具体的には,  $|\overrightarrow{Ox_0}| > |\overrightarrow{x_0x}|$  となる点  $\mathbf{x}$  の近傍  $\mathbf{x}_0$  を考えると, 式 (11) より, 次式を得る.

$$\begin{aligned} & \text{p.f.} \int_{S_0} C_{jktp} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_t} \Gamma_{ip}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ & \quad \times n_k(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) dS_y \quad \mathbf{x} \in S \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \partial_i^{\alpha} D_{r,i,n,m}^{T,\bar{I}}(\overrightarrow{x_0\hat{x}}) L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_0) \\ & \quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \partial_i^{\alpha} D_{i,n,m}^{L,\bar{I}}(\overrightarrow{x_0\hat{x}}) L_{n,m}^L(\mathbf{x}_0) \quad (17) \end{aligned}$$

ここに,

$$L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_0) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1) W_{n',n',m',m',l} \times \tilde{O}_l^{-m-m'}(k_T, \overrightarrow{Ox_0}) M_{r,n',m'}^T(O) \quad (18)$$

$$L_{n,m}^L(\mathbf{x}_0) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1) W_{n',n',m',m',l} \times \tilde{O}_l^{-m-m'}(k_L, \overrightarrow{Ox_0}) M_{n',m'}^L(O) \quad (19)$$

となり,  $L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_0)$ ,  $L_{n,m}^L(\mathbf{x}_0)$  を  $\mathbf{x}_0$  を展開中心とした局所展開係数と呼ぶ. また,  $D^{T,\bar{I}}$ ,  $D^{L,\bar{I}}$  は式 (8),

式 (9) の  $O$  を  $\bar{I}$  に入れ替えたものであり,  $\tilde{O}_n^m$  は

$$\tilde{O}_n^m(k, \overrightarrow{Ox}) = h_n^{(1)}(k|\overrightarrow{Ox}|) \bar{Y}_n^m(\overrightarrow{Ox})$$

を意味する. 次に, 展開中心を  $\mathbf{x}_0$  から  $\mathbf{x}_1$  に移動した時の局所展開係数の変換式を求める (図-1). 式 (10) より  $\mathbf{x}_1$  を展開中心とした局所展開係数  $L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_1)$ ,  $L_{n,m}^L(\mathbf{x}_1)$  は  $L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_0)$ ,  $L_{n,m}^L(\mathbf{x}_0)$  を用いて以下のように表される.

$$L_{r,n,m}^T(\mathbf{x}_1) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^m W_{n',n',m',-m',l} \times I_l^{m-m'}(k_T, \overrightarrow{x_0x_1}) L_{r,n',m'}^T(\mathbf{x}_0) \quad (20)$$

$$L_{n,m}^L(\mathbf{x}_1) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{\substack{l=|n-n'| \\ n'+n-l:\text{even}}}^{n+n'} (2n'+1)(-1)^m W_{n',n',m',-m',l} \times I_l^{m-m'}(k_L, \overrightarrow{x_0x_1}) L_{n',m'}^L(\mathbf{x}_0) \quad (21)$$

式 (20), 式 (21) が局所展開係数の移動公式である.

以上で多重極法のアルゴリズムに必要な式はすべて揃ったことになる.

### 3.4 多重極法のアルゴリズム

本節では多重極法のアルゴリズムについて述べる.

- (要素分割) クラック  $S$  を, 通常境界要素法の要領で要素分割する.
- (ツリー構造の決定) クラック  $S$  に外接する立方体を考える. これを level 0 の cell とする. 今, level  $i (\geq 0)$  の cell  $C$  を考える. この立方体の各辺を 2 等分して, 立方体を 8 個の部分立方体に分割する. このうち境界要素を含む立方体を level  $i+1$  の cell と呼ぶ. 以下同様に cell を分割して, 8 分木構造を導入する. また, level  $i$  の cell  $C$  が level  $i+1$  の cell  $C'$  を含む時,  $C$  は  $C'$  の親 cell,  $C'$  は  $C$  の子 cell と呼ぶ. cell の分割の際には, cell の含む境界要素数が予め決めた数よりも多い場合に限ってその cell をさらに分割する. 子 cell を持たない, つまり分割をする必要のなくなった cell のことを leaf と呼ぶ.
- (多重極モーメントの計算) 最下層の level の cell (leaf) から level 2 の cell まで, level 数をひとつづつ減少させながら多重極モーメントを cell の中心に関して求める. この際, cell  $C$  が leaf である場合は, 式 (13), 式 (14) を用いて計算する. また, cell  $C$  が leaf でない場合は,  $C$  が含む全ての子 cell について, 子 cell の多重極モーメントを子 cell の中心から,  $C$  の中心へ式 (15), 式 (16) によって移し, 足し合わせる. この操作を繰り返しながら,

全ての level の全ての cell の多重極モーメントを計算する。

4. (局所展開係数の計算) level 2 の cell から最下層の cell (leaf) まで, level 数をひとつずつ増加させながら cell の中心での局所展開係数を計算していく。今, level  $i$  の cell  $C$  を考える。この cell  $C$  での局所展開係数は,  $C$  の少し遠い cell からの寄与と, 遠方の cell からの影響に分けて計算し, それらを足し合わせて求める。

(a) 少し遠い cell からの影響

少し遠い cell とは,  $C$  の親 cell と隣接している level  $i-1$  の cell に含まれる level  $i$  の cell 全体 (最大 216 個) から,  $C$  に隣接している level  $i$  の cell (最大 27 個) を除いた cell の集合 (最大 189 個) のことであり, これらの cell からの寄与は, 各々の cell の多重極モーメントから式 (18), 式 (19) を用いて計算したものを足し合わせたものである。

(b) 遠方の cell からの影響

遠方からの寄与は  $C$  の親 cell の局所展開係数を, その展開中心を親 cell のものから cell  $C$  の中心に式 (20), および式 (21) を使って移動したものをたしあわせて求める。

この様にして, 最終的には全ての leaf における展開係数を計算する。

5. (積分の評価) 式 (3) の積分の評価は, leaf において, 局所展開係数から式 (17) によって計算される遠方からの影響と cell  $C$  に隣接する cell (最大 27 個) からの影響を従来法で式 (4) を用いて直接積分したものとの和として評価する。

実際, 多重極モーメントを計算するためには開口変位が既知でなければならない。そこで多重極法では上記のアルゴリズムと線形方程式の反復解法を組み合わせ、高速計算を実現している。

## 4. 数値計算の方法について

### 4.1 無限和の打ち切り項数について

数値計算では式 (7), (12), (15)-(21) に現れる無限和は有限項で打ち切らなければならない。式 (6) については, 打ち切り項数  $p$  を

$$p = kR + 5 \ln(\pi + kR) \quad (22)$$

とすることで相対誤差  $10^{-6}$  の精度が得られる<sup>28)</sup>(図-2)。ここに,  $k$  は波数,  $R$  はソースの cell に外接する球の直径を表し, cell の一辺の長さの  $\sqrt{3}$  倍になる。式 (22) は周波数が高くなったり, cell のサイズが大きくなると, 精度を保つためにはより多くの項が必要となり, 計算量もそれにつれて増えることを意味している。これが, 多重極法を  $kR$  の大きな問題に適用する上での問題の一つになっている。これを解決するための手法と

して diagonal form が提案されている事は前述のとおりである。本論文では, 式 (22) に従い, 各 level の cell での多重極モーメントや局所展開係数の必要となる項数を決めることにする。具体的に書くと, 式 (12) の無限和が  $p$  で打ち切られるので必要となる多重極モーメントは  $0 \leq n \leq p$  となる。式 (15), (16), (18)-(21) の  $n, n'$  は  $0 \leq n, n' \leq p$  で,  $l$  は  $0 \leq l \leq 2p$  となる。また, 式 (17) の  $n$  は  $0 \leq n \leq p$  である。level によらず  $p$  を一定として計算しようとする,  $p$  は必然的に level 2 で必要な項数となるので, このように各 level ごとに項数を変化させる方が計算量の節約になる。

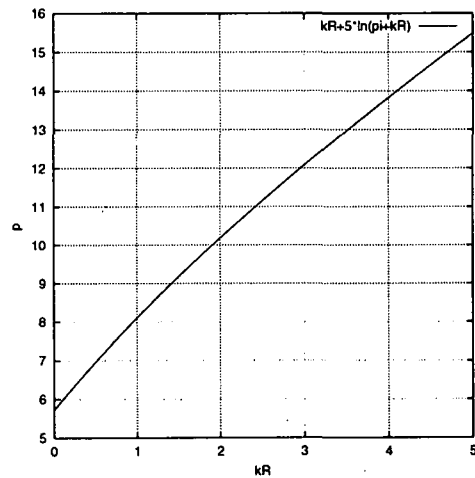


図-2 打ち切り項数と  $kR$  の関係

### 4.2 $Y_n^m$ の計算

$Y_n^m$  の計算は,  $P_n^m$  を計算してから  $\sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\phi}$  をかけるのではなく, 次の方法で計算する。 $Y_n^m$  には次の二つの漸化式がある。

$$Y_{N+1}^{N+1} = (x_1 + ix_2) \sqrt{\frac{2N+1}{2N+2}} Y_N^N \quad (23)$$

$$\sqrt{(N+M+1)(N-M+1)} Y_{N+1}^M - x_3(2N+1) Y_N^M + \sqrt{(N+M)(N-M)} Y_{N-1}^M = 0 \quad (N \geq M) \quad (24)$$

ここに,  $x_i$  は  $\widehat{Ox}$  の直交直線座標における成分を表す。式 (23), (24) を使うと, 結局  $Y_n^m$  を計算するアルゴリズムは次のようになる。

1.  $Y_0^0 = 1$
2. 式 (23) より  $N = 1, 2, \dots, p$  に対して  $Y_N^N$  を計算する。
3.  $M$  を固定し, 式 (24) より,  $N = M, M+1, \dots, p$  に対して  $Y_N^M$  を順次計算していく。

ここに,  $p$  は無限和の打ち切り項数である。また, 負の  $M$  に対しては, 次のように計算する。

$$Y_N^{-M} = (-1)^M \overline{Y_N^M} \quad (M \geq 0)$$

### 4.3 直接積分について

従来法の直接積分では、式(4)を使って行う。本論文では区分一定要素を用いているので、式(4)は最終的に次のようになる。

$$t_a^I(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x})C_{ablm} \sum_L \int_{\partial S_L} e_{rkl} C_{jkn} \Gamma_{mp,n}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) dy_r \phi_j^L - n_b(\mathbf{x})C_{ablm} \rho \omega^2 \sum_L \int_{S_L} \Gamma_{mj}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) dS_y \phi_j^L$$

ここに、 $S_L$ は $S$ に含まれる平面要素であり、 $\phi^L$ は $S_L$ 上での $\phi$ (一定値)である。そして、基本解 $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ を3次元静弾性方程式の基本解

$$\Gamma_{ij}^S(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{ij} \partial_i^y \partial_j^y - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \partial_i^y \partial_j^y \right) r$$

と残りの部分

$$\Gamma_{ij}^R(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{e^{ik_T r} - 1}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \partial_i^y \partial_j^y \left( \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_L^2}{k_T^2} \right) \partial_i^y \partial_j^y r \right)$$

に別けて、前者に関する積分は特異性を持っているので解析的に行い、後者に関する積分は数値的に波数によらず、境界要素の各辺の midpoint にひとつずつ、合計3点の Gauss 積分で行った。

## 5. 数値解析例

### 5.1 解析条件、解析法

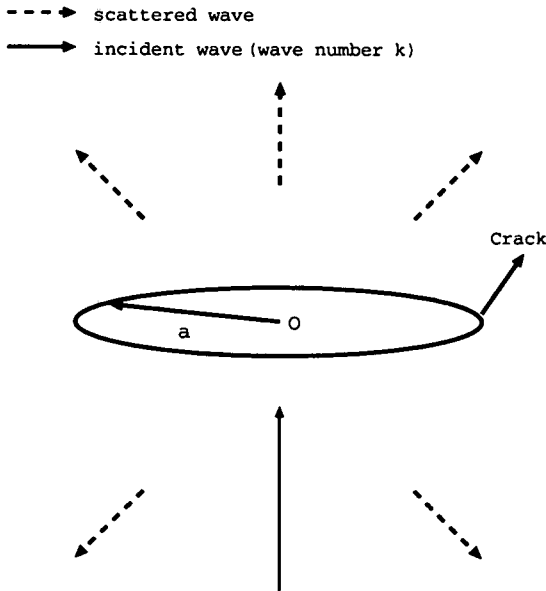


図-3 クラックによる弾性波の散乱

数値解析は、単一の、半径  $a$ 、法線  $(0,0,1)$  を持つ円形平面クラックに応力の大きさが  $p_0$  の縦波が  $x_3$  軸の負の方向から入射するときの開口変位の解析をした。

Poisson 比は 0.25 としている。また、横波、縦波に関する多重極モーメントや局所展開係数の項数は  $k_T$  のみを用いて式(22)に従い決定し、leaf の中に含まれる境界要素の数は 100 個以下とした。なお線形方程式の解法として前処理付き GMRES を用いた。前処理行列は速水ら<sup>5)</sup>に倣い、leaf に対応するブロック対角行列の逆を用いた。また、従来法の線形方程式の解法には Crout 法を用いた。数値計算には ALPHA 21264(500MHz) を cpu とする計算機を使用した。

### 5.2 計算結果

図-4は未知数 1704 のメッシュである。図-5、図-6、図-7はそれぞれ  $k_T a = 1.4, 3.2, 4.4$  の時の従来法による解(conv)と多重極法による解(fmm)を比較したものであり、誤差は殆んど見られない。図中の開口変位は  $|\phi|/\phi_0$  の値をプロットしたものであり、 $\phi_0$  は静的な場合のクラックの中心での開口変位で  $\phi_0 = 3p_0 a / \pi \mu$  である。図-8、図-9、図-10はそれぞれ  $k_T a = 1.4, 3.2, 4.4$  の時の従来法による計算時間(conv)と多重極法による計算時間(fmm)を比較したものである。波数にもよるが未知数が数千より多くなると多重極法が従来法より速くなっているのが分かる。図-8、図-9、図-10で多重極法の計算時間のグラフの勾配が変化しているのは、ツリー構造の深さの変化に対応している。図-11は未知数 3912、 $k_T a = 3.2$  の時の開口変位の数値解(numer)と理論解(analytic)<sup>29)</sup>の比較である。tip 周辺では、開口変位の特異性を考慮していないので多少精度が落ちるが、それ以外ではおおむね良好な結果となっている事がわかる。

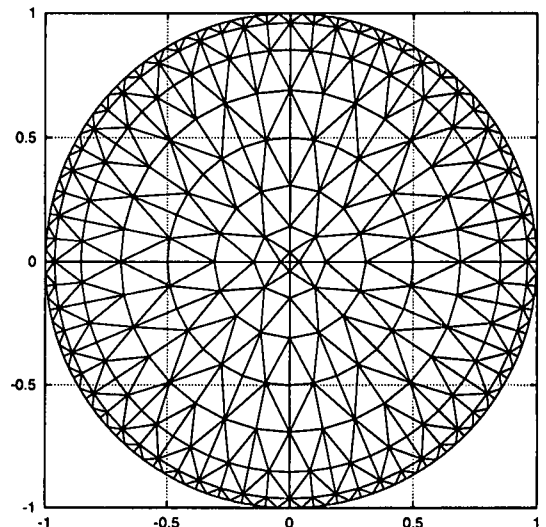


図-4 メッシュ(未知数 1704)

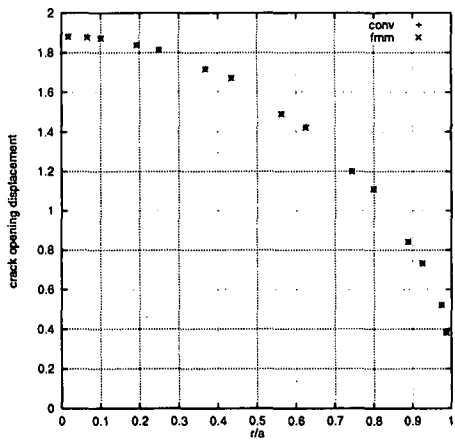


図-5 従来法と多重極法の解の比較 ( $k_T a = 1.4$ )

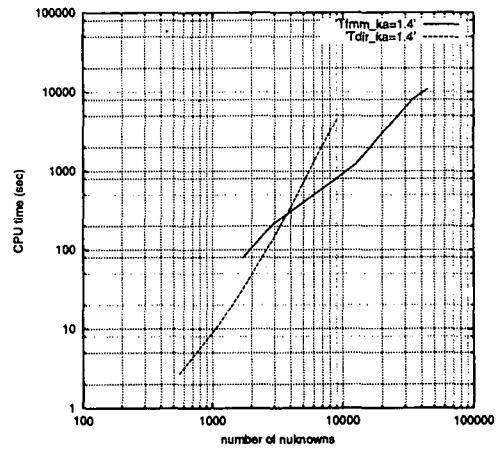


図-8 従来法と多重極法の計算時間の比較 ( $k_T a = 1.4$ )

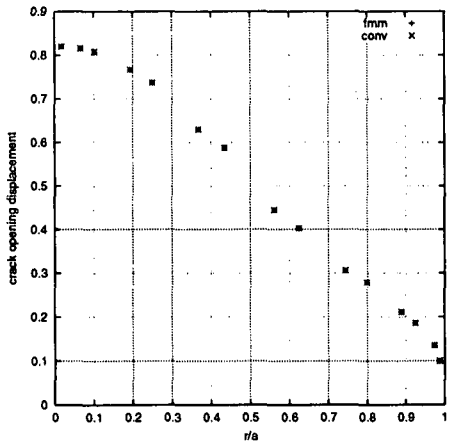


図-6 従来法と多重極法の解の比較 ( $k_T a = 3.2$ )

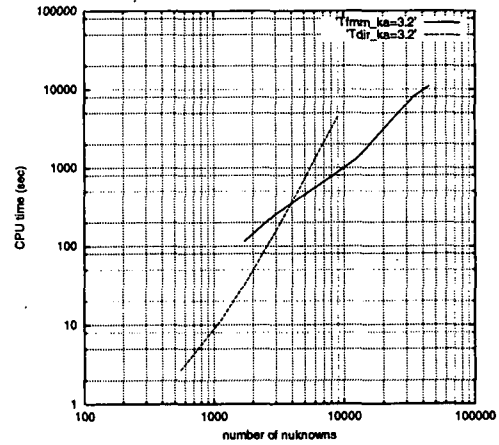


図-9 従来法と多重極法の計算時間の比較 ( $k_T a = 3.2$ )

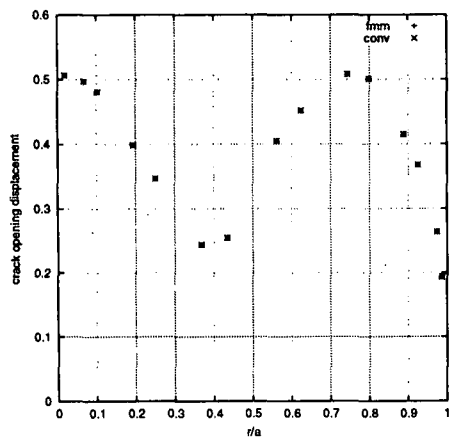


図-7 従来法と多重極法の解の比較 ( $k_T a = 4.4$ )

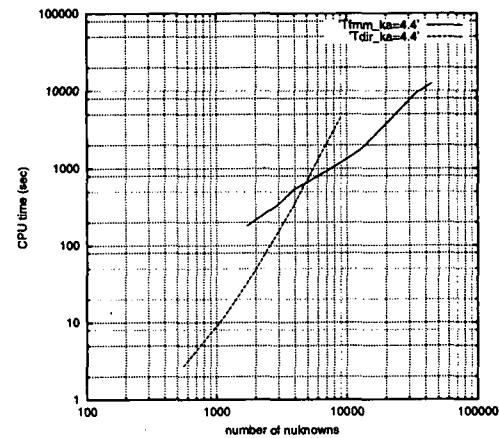


図-10 従来法と多重極法の計算時間の比較 ( $k_T a = 4.4$ )

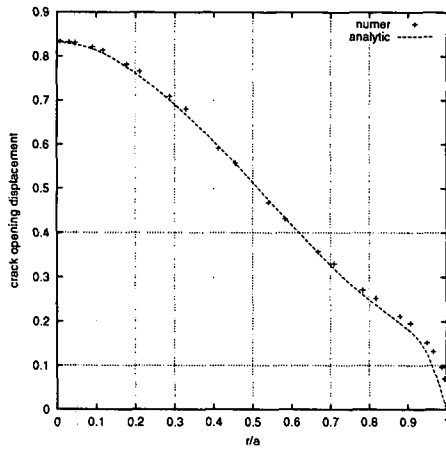


図-11 数値解と理論解の比較 ( $k^T a = 3.2$ )

## 6. 結言

本論文では、3次元弾性波動の散乱問題への多重極法の適用し、その有効性を示すことができた。今後は、新しい diagonal form<sup>23)</sup>により、さらに高速化し、クラックが複数存在するような場合の解析を行う予定である。

### 参考文献

- 1) Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comp. Phys.*, **60**, pp.187-207, 1995.
- 2) Greengard, L.: *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*, The MIT Press, 1987.
- 3) 牧野淳一郎, 川井敦: 研究展望:高速多重極法—粒子法への応用を中心として, 応用力学論文集, **2**, pp.101-109, 1999.
- 4) 三上益弘, 川田正晃: 大規模系のための分子動力学法の高速度・加速化法, 材料, **48**, 2, pp.189-197, 1999.
- 5) 西田徹志, 速水謙: 高速多重極展開法による3次元境界要素法の高速度化, 計算工学講演論文集, **1**, pp.315-318, 1996.
- 6) 西村直志, 吉田研一, 小林昭一: 多重極積分方程式法による3次元クラック問題の解析について, 境界要素法論文集, **14**, pp.37-41, 1997.
- 7) 福井卓雄, 玖津見敏広: 3次元静弾性問題の高速多重極境界要素法による解析, 計算工学講演会論文集, **4**, pp.963-966, 1999.
- 8) Fu, Y., Klimkowski, K.J., Rodin, G.J., Berger, E., Browne, J.C., Singer, J.K., Geijin, van de RA. and Vemaganti, K.S.: A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **42**, pp.1215-1229, 1998.
- 9) Takahashi, T., Kobayashi, S. and Nishimura, N.: Fast multipole BEM simulation of overcoring in an improved conical-end borehole strain measurement method, *Mechanics and Engineering in Honor of Professor Qinghua Du's 80th Anniversary*, pp.120-127, Tsinghua University Press, Beijing 1999.
- 10) 吉田研一, 西村直志, 小林昭一: 多重極積分方程式を用いた3次元静弾性クラック問題の解析, 応用力学論文集, **1**, pp.365-372, 1998.
- 11) Yoshida, K., Nishimura, N. and Kobayashi, S.: Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D, to appear in *Int. J. Num. Meth. Eng.*
- 12) Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions, *J. Comp. Phys.*, **86**, pp.414-439, 1990.
- 13) Rokhlin, V.: Diagonal forms of translation operator for the Helmholtz equation in three dimensions, *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, **1**, pp.82-93, 1993.
- 14) 福井卓雄, 勝本順三: 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による2次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集, **15**, pp.99-104, 1998.
- 15) Koc, S. and Chew, W.C.: Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers, *J. Acoust. Soc. Am.*, **103**, 2, pp.721-734, 1998.
- 16) Gyure, M.F. and Stalzer, M.A.: A prescription for the multilevel Helmholtz FMM, *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **5**, pp.39-47, 1998.
- 17) Epton, M.A. and Dembart, B.: Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, pp.865-897, 1995.
- 18) Elliot, W.D. and Board, J.A.JR.: Fast Fourier transform accelerated fast multipole algorithm, *SIAM J. Sci. Comp.*, **17**, pp.398-415, 1995.
- 19) Dembart, B. and Yip, E.: The accuracy of fast multipole methods for Maxwell's equations, *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **5**, pp.48-56, 1998.
- 20) Hrycak, T. and Rokhlin, V.: An improved fast multipole algorithm for potential fields, *SIAM J. Sci. Comp.*, **19**, pp.1804-1826, 1998.
- 21) Greengard, L. and Rokhlin, V.: A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions, *Acta Numerica*, **6**, pp.229-270, 1997.
- 22) Cheng, H., Greengard, L. and Rokhlin, V.: A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions, *J. Comp. Phys.*, **155**, pp.468-498, 1999.
- 23) Greengard, L., Huang, J., Rokhlin, V. and Wandzura, S.: Accelerating fast multipole methods for the Helmholtz equation at low frequencies, *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **5**, pp.32-38, 1998.
- 24) 西村直志, 宮越優, 小林昭一: 新しい多重極積分方程式法によるクラック問題の解析について, BTEC 論文集, **9**, pp.75-78, 1999.
- 25) Fujiwara, H.: The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems, *Geophys. J. Int.*, **140**, pp.198-210, 2000.
- 26) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York 1970.
- 27) Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J.: Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Reviews*, **47**, pp.457-499, 1994.
- 28) Song, J., Lu, C.-C. and Chew, W.C.: Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **45**, pp.1488-1493, 1997.
- 29) Mal, A.K.: Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack, *Int. J. Engng. Sci.*, **8**, pp.381-388, 1970.

(2000年4月21日受付)