

二つの平行円形クラックによる散乱断面積の周波数特性

Scattering Cross-Sections for Two Parallel Penny Shaped Cracks

岸典之*・北原道弘**

Noriyuki KISHI and Michihiro KITAHARA

*学生員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)
 **正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

Scattering cross-sections for the parallel penny shaped cracks are calculated by the boundary element method. The multiple scattering effect of cracks is generally large in the case of the vertically arranged parallel cracks. However, it is shown that the multiple scattering effect becomes small in the low frequency range when the distance of cracks approaches to twice as large as the crack diameter. It is also shown that the local resonance phenomena are induced in the low frequency range. The mechanism of the resonance phenomena is revealed by the crack opening displacement and the radiation pattern of the scattered energy.

Key Words : scattering cross-section, two cracks, boundary element method, differential cross-section

1. はじめに

材料評価の観点から、散乱減衰を計測してこの散乱減衰の周波数特性から介在物¹⁾や空孔²⁾の分布密度など材料特性に係わる物理量を推定しようとする試みが超音波計測的に試みられている。また、最近では非接触という利点を生かして、レーザー超音波³⁾や電磁超音波⁴⁾が減衰計測に活用されつつある。クラックが構造部材内に分布して存在しており、このクラックの分布密度を推定するために散乱減衰を利用しようとする場合、独立散乱体理論⁵⁾の適用限界を押さえておくことが一つのポイントになると思われる。クラック間の多重散乱の影響が近似的にでも無視できるようであれば、独立散乱体理論が適用できて、散乱減衰と単位体積中のクラックの平均個数の関係は線形関係となり、係数である一つのクラックによる散乱エネルギー総量が決まりさえすれば関係式が確定でき、この線形関係式を利用して計測散乱減衰量からクラックの平均個数を推定することが考えられる。

入射縦波が鉛直方向に進行しており、クラックが水平面内に分布して存在している場合には、クラック間の距離がかなり近くても多重散乱効果は小さいことが前論文⁶⁾で明らかにされている。一方、クラックがクラック面を水平にして上下に鉛直配置された場合にはクラック間の多重散乱の影響は水平面内に配置された場合に比較して大きくなり、多重散乱効果に関するより詳細な検討が必要とされていた。本論文では、クラックが鉛直配置された場合について、クラックにより散乱された散乱波動エネルギーをクラックの幾何学的断面積に換算表現した散乱断面積を基に、クラック間の多重散乱効果について検討を行う。散乱断面積の周波

数特性を明らかにする過程において、2つのクラック間距離が小さくなると、2つのクラックに挟まれた薄層弾性領域の共振に起因すると推定される鋭いピークが低周波数域において表れることが判明した。この局所共振現象の励起メカニズムを明らかにするため、局所共振ピークに対応する周波数と円形固定薄板の固有振動数との対応関係、また、クラックの変位モードとの関係を確認した上で、この局所共振現象が散乱波動エネルギーの放射パターンに及ぼす影響についても考察したので、以下に報告する。

2. 複数クラックによる散乱問題の定式化

散乱体間の多重散乱解析に関しては体積型散乱体の解析に有効なT-マトリックス法⁷⁻⁹⁾があり、クラックの場合に対する拡張がBoströmとOlsson¹⁰⁾により行われている。ここでは、複数クラックに対する境界積分方程式を直接数値解析する方法⁶⁾を採用することにし、開口変位の決定過程を要約する。

図-1に示す2つのクラックによる多重散乱問題を考える。クラックの個数が増えても、解析法の要点は同じである。図中の u^{IN} 、 u^{SC} は入射波及び散乱波による変位場で、全変位場 u は u^{IN} と u^{SC} の和として定義される。クラック面 SC_1 が $x_3 = 0$ 面上に位置するように局所座標系 (x_1, x_2, x_3) を選ぶと、散乱波 u_i^{SC} は周波数域において次式で表される⁶⁾。

$$u_k^{SC}(x) = \int_{SC_1} \Xi_{km3}(x, y) \Delta u_m(y) dS_y + \int_{SC_2} \Xi_{kmn}(x, y) n_n(y) \Delta u_m(y) dS_y \quad (1)$$

ここで、 Δu_m はクラックの開口変位、 Ξ_{kmn} は応力

に関する基本解である。この基本解は等方弾性テンソル C_{ijklm} と基本解 U_{li} を用いて次式で表される。

$$\Xi_{ijk}(x, y) = C_{ijklm} \frac{\partial U_{li}(x, y)}{\partial y_m} \quad (2)$$

式(1)で応力に関する微分を行えば、散乱波による応力 σ_{3j}^{SC} の積分表現を得る。ここで直接クラック面への境界極限をとると、超特異積分となり数値解析が困難になる。そこでテイラー展開により特異項を分離して正則化した後、クラック面上で全応力が零なる境界条件、即ち $\sigma_{3j}^{SC} + \sigma_{3j}^{IN} = 0$ を適用する。この式を二次の形状関数を利用して離散化する事により、次式を得る。

$$\begin{aligned} -f_j^{IN}(x_a) = & C_{3jk\alpha} \int_{S_{C1}} \Phi_{b,\alpha} \Xi_{km3}^0 dS_y \Delta u_{bm} \\ & - C_{3jk3} \int_{S_{C1}} \Phi_{b,\alpha} \Xi_{km\alpha}^0 dS_y \Delta u_{bm} \\ & + \sum_n C_{3jk\alpha} \int_{S_{C1}} \Phi_b \Xi_{km3,\alpha}^n dS_y \Delta u_{bm} \\ & + \sum_n C_{3jk3} \int_{S_{C1}} \Phi_b \Xi_{km3,3}^n dS_y \Delta u_{bm} \\ & + C_{3jkl} \int_{S_{C2}} \Phi_b \Xi_{kmn,l}(x, y) n_n dS_y \Delta u_{bm} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $f_j^{IN}(x_a)$ は節点 x_a における入射波による応力 σ_{3j}^{IN} 、 Φ_b はクラック面上の2次の形状関数である。また、 Ξ^0 は Ξ の特異項、 Ξ^n は正則項である⁶⁾。同様にクラック面 S_{C2} への極限過程においても同様な離散化を行う。いま、クラック面上の局所座標から全体座標への変換行列を作用させて次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} -\bar{f}_1^{IN} \\ -\bar{f}_2^{IN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

上付のバーは全体座標系での値を示す。 $\bar{f}_1^{IN}$ と $\bar{f}_2^{IN}$ はクラック面 S_{C1} と S_{C2} 上の入射波による応力、 $\Delta \bar{u}_1$ と $\Delta \bar{u}_2$ は S_{C1} と S_{C2} 上のクラックの開口変位である。また、例えば $\bar{K}_{12}$ はクラック面 S_{C2} 上からクラック面 S_{C1} 上の点への影響を表すマトリックスである。

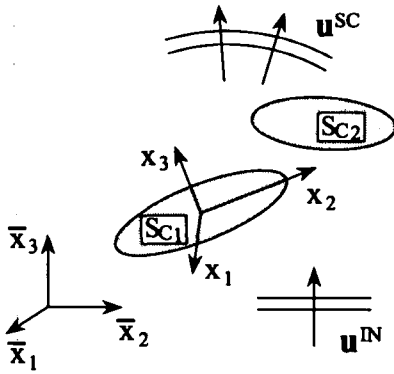


図-1 無限体内のクラック S_{C1} と S_{C2}

3. 散乱断面積

角振動数を ω として散乱断面積 $P(\omega)$ は、散乱波の時間平均パワー $\langle P^{SC} \rangle$ と入射波の時間平均インテンシティ $\langle I^{IN} \rangle$ の比として次のように定義され、散乱波が有するエネルギーを散乱体の幾何学的断面積に換算表現したものである。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^{SC} \rangle}{\langle I^{IN} \rangle} = \frac{\int_A \hat{x}_i \langle \sigma_{ij}^{SC} \dot{u}_j^{SC} \rangle dA}{\langle p_i \sigma_{ij}^{IN} \dot{u}_j^{IN} \rangle} \quad (5)$$

ここで、 p_i は入射波の進行方向を表す単位ベクトル、 $\hat{x}_i$ は散乱波による応力 σ_{ij}^{SC} が作用している面の単位法線ベクトル、 A はクラックを囲む任意の球面である。上記散乱断面積の具体的計算には、散乱パワーの放射特性を表す散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ ($d\Omega$ は立体角の微小要素) を次のように先に計算しておく都合がよい。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |A_L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|A_T|^2 + |A_H|^2) \quad (6)$$

ここで、 A_L は縦波の散乱振幅、 A_T と A_H は横波の散乱振幅であり、式(1)の遠方表現から計算できる。散乱断面積 $P(\omega)$ は単位球面上で散乱微分断面積を積分すれば次のように求まる。

$$P(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \quad (7)$$

4. 解析結果

4.1 クラック間距離を変化させた散乱断面積の周波数特性

前論文⁶⁾においてクラックを水平に配置した場合よりも、クラックを図-2のように鉛直に配置した場合の方が、より強く相互干渉の影響があることが示されている。図-2において、 a は円形クラックの半径、 d はクラック間の距離である。図-3から図-9に、円形クラックを鉛直に2つ配置した場合について、 $d/a = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ のそれぞれのケースにおける散乱断面積の周波数特性を、縦波波数 ak_L を横軸に取りグラフに示した。四角が散乱断面積 P の値、白丸が散乱断面積の縦波成分 P_L 、三角が散乱断面積の横波成分 P_T である。また比較の為、1つのクラックの散乱断面積を単純に2倍した値を黒丸 ($P - ref$) で示した。なお、母材のポアソン比は $\nu = 0.25$ である。

まず、2つのクラックによる多重散乱の影響が散乱断面積 P の値にどの程度表れているかという観点から、図-3から図-9の結果を眺めると、 $d/a = 4.0, 5.0$ の場合では、2つのクラックの散乱断面積の値 (四角) は1つのクラックの値を2倍したもの (黒丸) とほぼ一致しており、特に $ak_L = 2.0$ 以下の低周波数域では極めて近い値となっている。このことから、クラックが鉛

直に配置された場合において、クラック間距離 d/a が 4.0 以上になると、即ちクラック間距離が円形クラックの直径の 2 倍程度になると、低周波数域においてはクラック間の相互干渉の影響は小さくなるといえる。

また、クラック半径 a に比べてクラック間距離 d が小さい $d/a = 0.25, 0.5, 1.0$ の場合、 $ak_L = 1.0$ 以下の低周波数域に、狭帯域の鋭いピークが見られる。即ち、 $d/a = 0.25$ の場合の $ak_L = 0.4165$ 、 $d/a = 0.5$ の場合の $ak_L = 0.69$ 、 $d/a = 1.0$ の場合の $ak_L = 0.825$ である。このピークについては次の 4.2 で検討する。

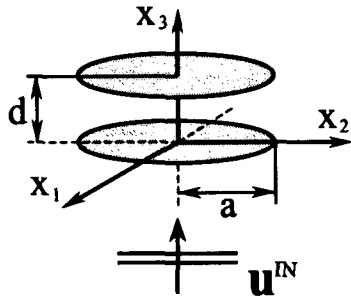


図-2 クラック 2 個鉛直配置

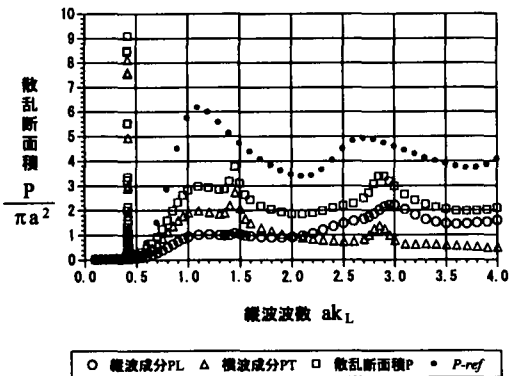


図-3 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=0.25$)

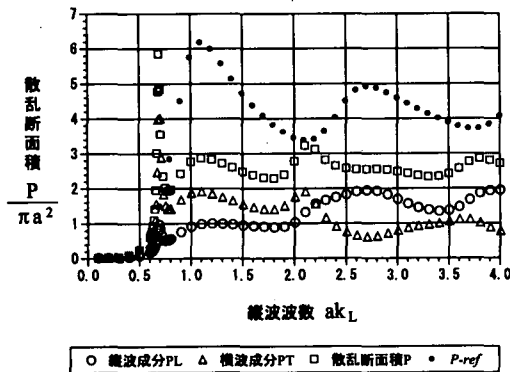


図-4 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=0.5$)

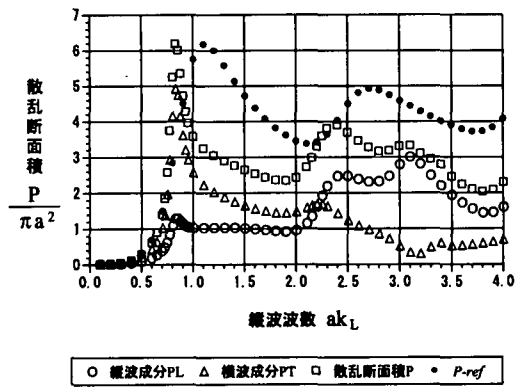


図-5 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=1.0$)

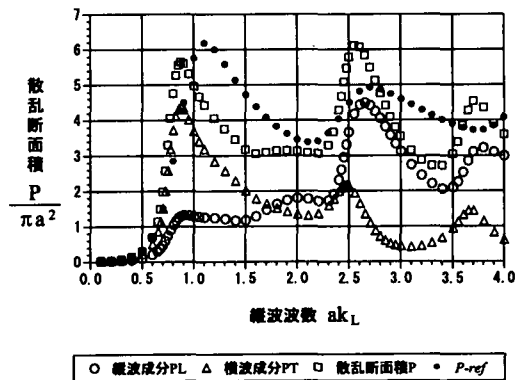


図-6 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=2.0$)

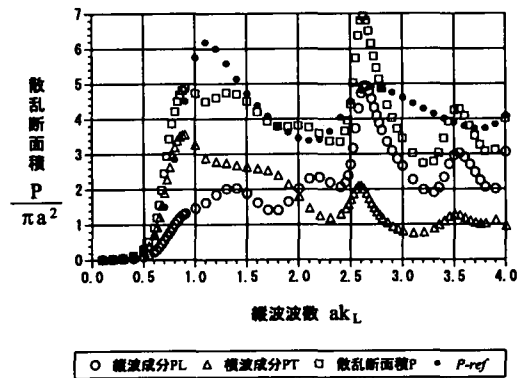


図-7 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=3.0$)

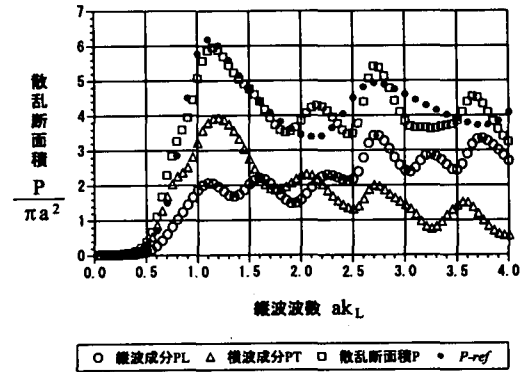


図-8 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=4.0$)

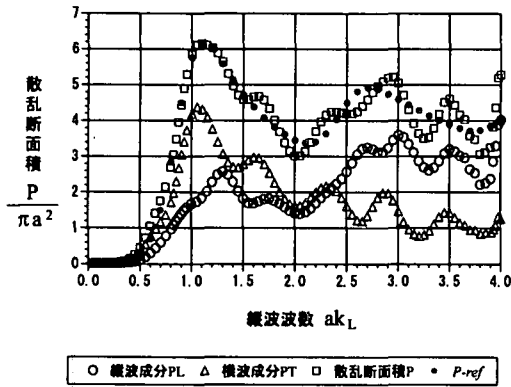


図-9 散乱断面積の周波数特性 ($d/a=5.0$)

4.2 低周波数域のピークに関する検討

先の4.1節に示した散乱断面積において、 $ak_L = 1.0$ 以下の低周波数域に鋭いピークが現れた。ここではこのピークについて詳細に検討する。

図-10はこのピークに着目し、クラック間距離 $d/a = 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0$ の場合についてピーク付近の散乱断面積の値をプロットしたグラフである。このグラフからクラック間隔が小さくなるとピークはより低周波数に移行し、より狭帯域で鋭く、ピークの最大値が大きくなっていることがわかる。このような性質は固有振動の現象によく見られる現象である、そこで図-11に示すように、2つの円形クラックに挟まれた弾性薄層の部分周辺が固定の円形薄板と仮定し、薄板理論から求められる基本対称モードの固有振動数と図-10に示したピーク値に対応する振動数を比較した。

薄板の固有振動数は Leissa¹¹⁾によりまとめられており、半径 a 、板厚 d の周辺固定の円形板の固有振動数 ω は次式で表される。

$$\omega = \frac{\lambda^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho d}}, \quad D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性であり、密度 ρ 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν より決まる。また、 λ は無次元化された固有振動数であり、ここでは基本対称モードについて考えているため、参考文献11)の図表より $\lambda^2 = 10.2158$ である。いま、上式を縦波波数 ak_L について整理すると次のようになる。

$$ak_L = \frac{\omega a}{c_L} = \frac{\lambda^2 \sqrt{1-2\nu} d}{2\sqrt{3}(1-\nu) a} \quad (9)$$

ここで、 $\nu = 0.25$ 、 $\lambda^2 = 10.2158$ を代入することにより、縦波波数に換算された固有振動数とクラック間距離の関係式が求まる。

$$ak_L = 2.78d/a \quad (10)$$

この薄板理論より導出された関係式と図-10に示したピークに対応する縦波波数を比較した結果を図-12に示す。このグラフから本解析における結果は d/a の値が小さくなるにつれて薄板理論の値に近づいていることがわかる。このことから、散乱断面積の低周波数域の鋭いピークは薄板の固有振動に関係した共振ピークであると推察される。

散乱断面積のピークに対応したクラックの開口変位について調べた結果が図-13である。縦軸がクラックの x_3 軸方向の開口変位の絶対値、横軸がクラックの中心からの距離 r/a である。 $d/a = 0.2$ の場合、周辺固定の円形板の基本対称モードに近い変形モードであることがわかる。また、 d/a が大きくなるにつれて変形モードが徐々に変化し、 $d/a = 1.0$ ではクラック単体の開口変位に近くなっていることがわかる。

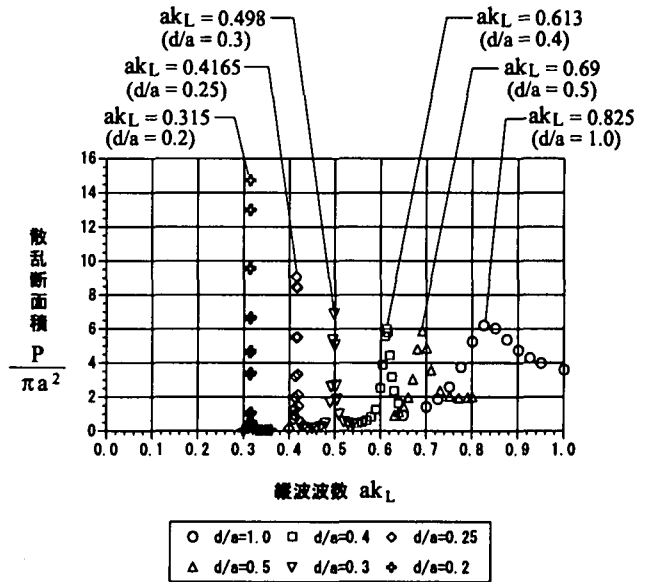


図-10 クラック間距離が小さい場合の散乱断面積のピーク付近の挙動

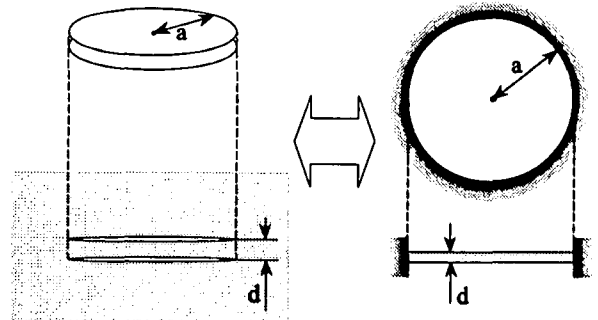


図-11 クラック配置と円形薄板モデル

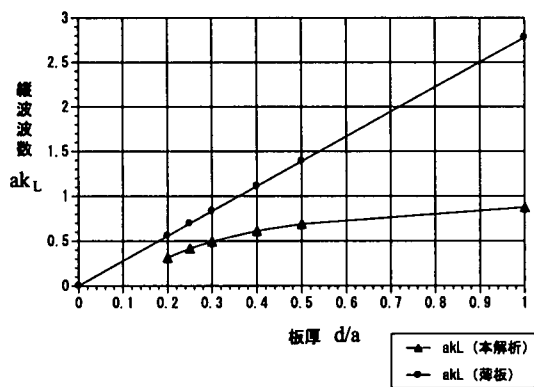


図-12 共振ピークに対応した縦波の波数と薄板理論の比較

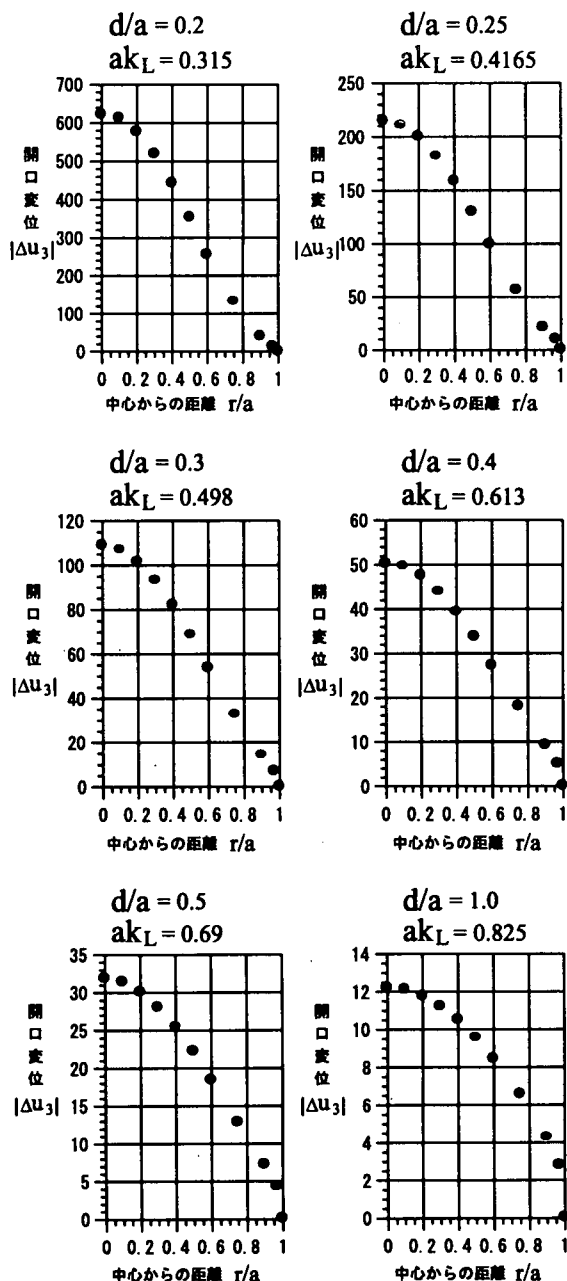


図-13 散乱断面面積のピークに対応した開口変位

4.3 散乱微分断面面積

図-14, 図-15, 図-16にそれぞれクラック間距離 $d/a=0.25$, $d/a=1.0$, $d/a=4.0$ の場合における散乱微分断面面積 $dP/d\Omega$ を示す. 各図には, 無次元化波数 $ak_L = 0.5, 2.0, 4.0$ に対応した散乱微分断面面積の値を図化してある. 図-2に示した2個のクラックの配置形態と入射

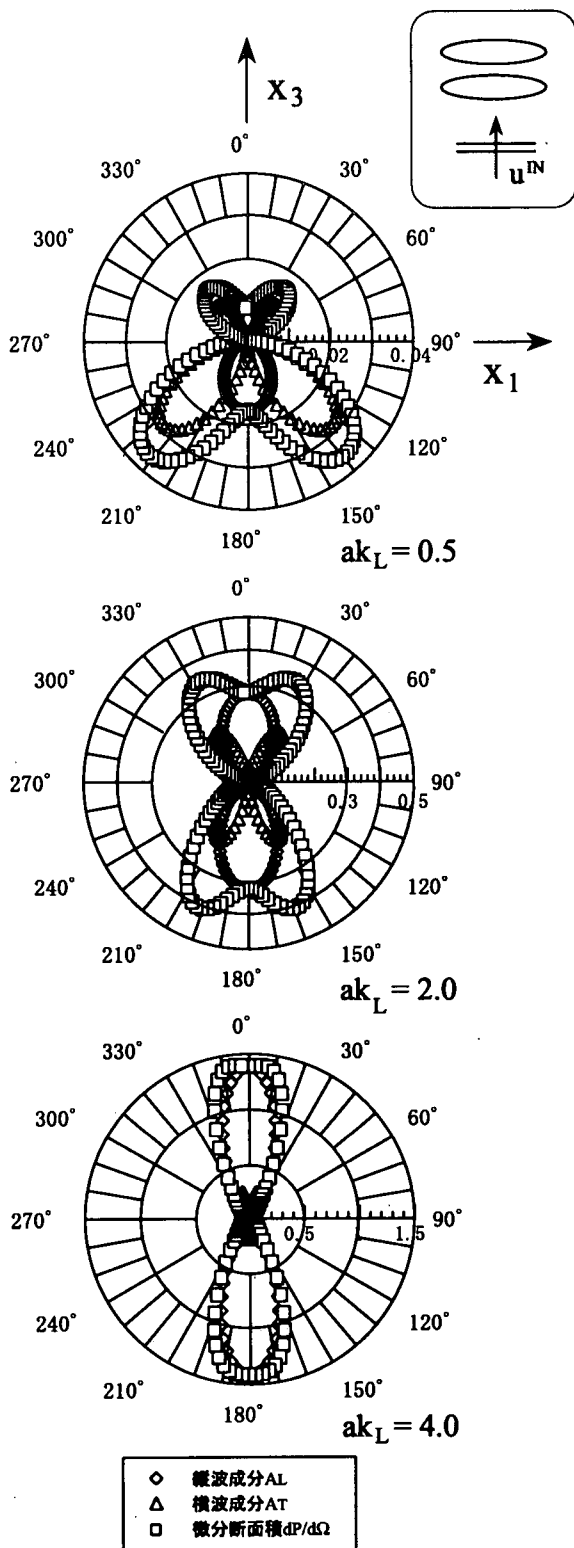


図-14 散乱微分断面面積 ($d/a=0.25$)

縦波の進行方向から、散乱微分断面積は x_3 軸(縦方向)に関して対称であるため、ここでは x_1-x_3 面内の散乱微分断面積の値を示している。散乱微分断面積はクラックにより散乱されたエネルギーの放射パターンを表しており、低周波数域では x_3 軸に対してほぼ 45° の方向に、高周波数域になると入射波の進行方向に一致した x_3 軸に沿って散乱エネルギーが集中してくることがわかる。

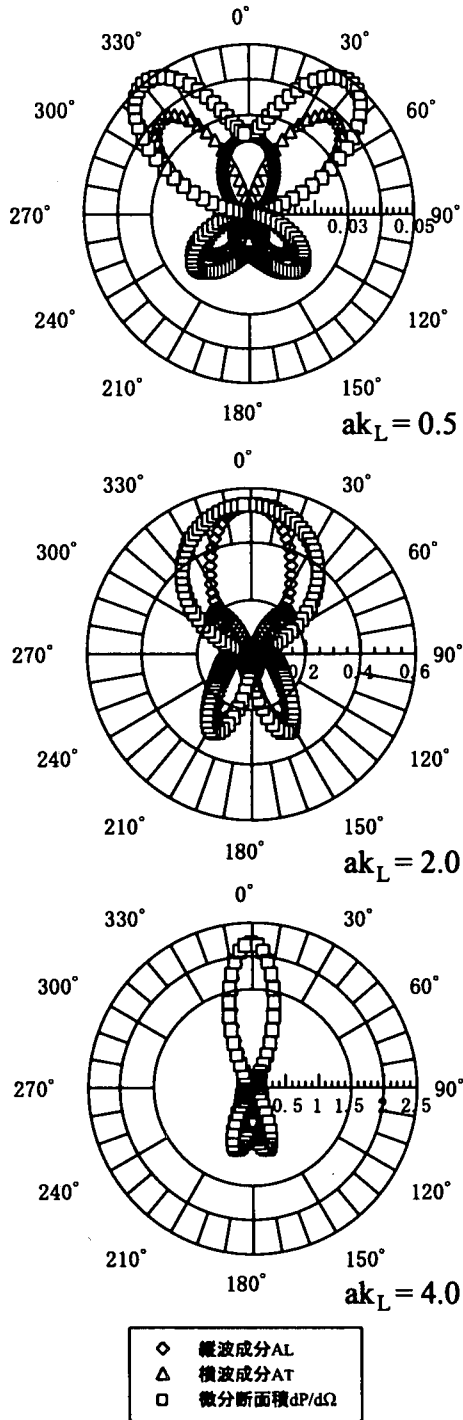


図-15 散乱微分断面積 ($d/a=1.0$)

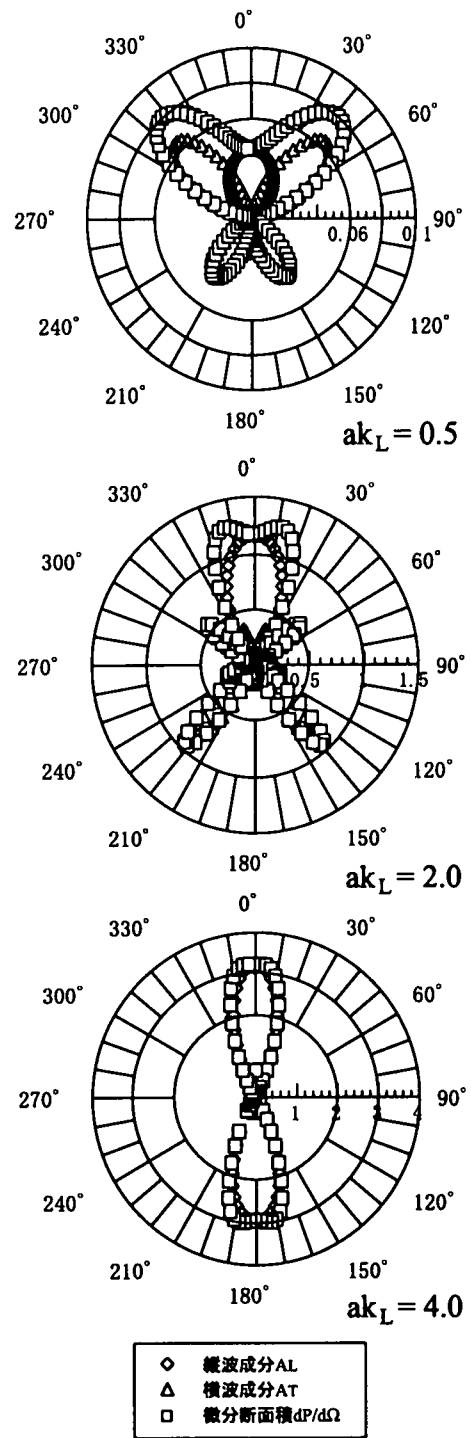


図-16 散乱微分断面積 ($d/a=4.0$)

4.4 局所共振状態における散乱微分断面積の挙動

図-10に示した散乱断面積のピークに対応した縦波波数における散乱微分断面積を図-17から図-22に示す。クラック間距離が小さい $d/a = 0.2$ の場合(図-17)、水平方向に卓越した横波成分からなる散乱エネルギーの放射が観察される。これは、2つの円形クラックに挟まれた薄い弾性層部分の薄板的な局所振動によって周辺に励起されたせん断運動が水平方向に横波として伝播している

ことを意味している。クラック間距離 d/a が大きくなるにつれて、局所共振が散乱波動エネルギーの放射パターンに及ぼす影響は徐々に小さくなり、 $d/a = 1.0$ (図-22) になると2つのクラックが支配する散乱微分断面面積のパターンに近くなっていることがわかる。

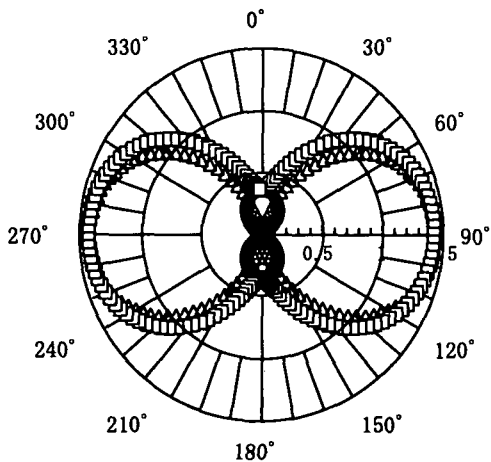


図-17 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 0.2, ak_L = 0.315$)

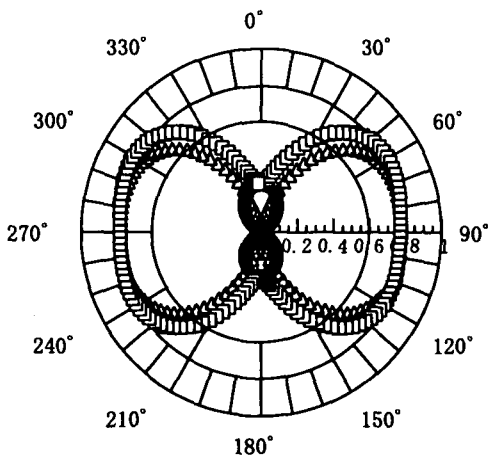


図-18 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 0.25, ak_L = 0.4165$)

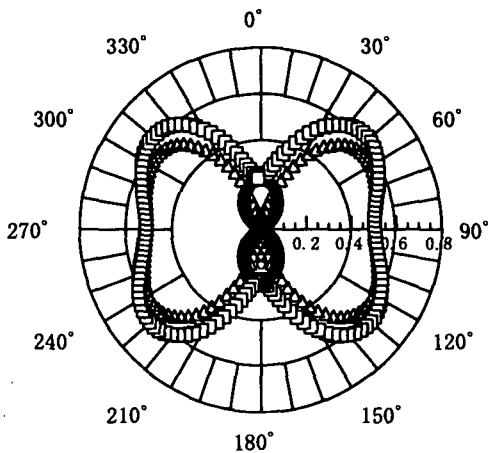


図-19 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 0.3, ak_L = 0.498$)

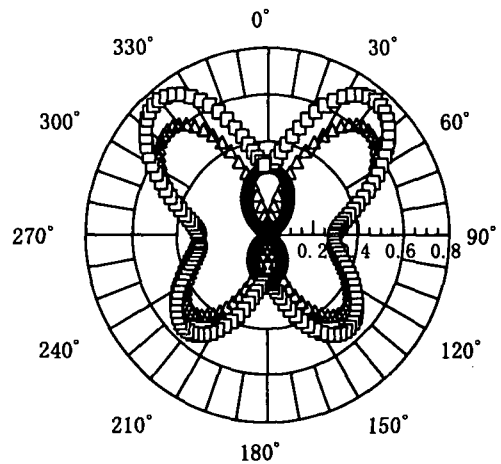


図-20 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 0.4, ak_L = 0.613$)

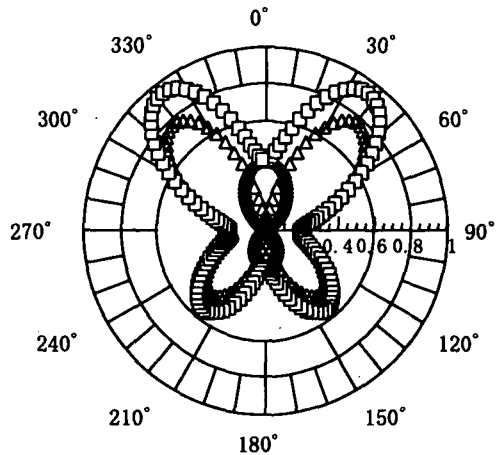


図-21 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 0.5, ak_L = 0.69$)

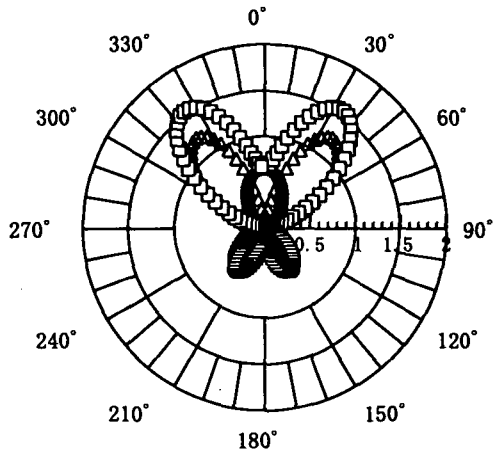


図-22 ピーク時の散乱微分断面面積 ($d/a = 1.0, ak_L = 0.825$)

5. 結論

複数クラックによる多重散乱が散乱断面面積に及ぼす影響を調べるにより、近似的にでも多重散乱の影響を無視し得るクラック間距離の目安を得るために、2

つのクラックが鉛直に配置された場合について数値解析を行い、散乱断面積の周波数特性を調べた。この結果、クラック間距離がクラックの直径の2倍程度以上になると、低周波数域においては散乱断面積に及ぼす多重散乱の影響はかなり小さくなることがわかった。クラック間距離がクラックの直径の2倍以下では、低周波数域においても多重散乱の影響は大きいので、注意が必要である。散乱断面積の周波数特性を調べる過程において、2つのクラックのクラック間距離が小さいとき、低周波数域に散乱断面積の鋭いピークが出現することが明らかとなった。この発生メカニズムについて調べるため、鋭いピークに対応する周波数と周辺固定円形薄板の固有振動数の関係、クラックの開口変位の形態、ピーク時の散乱微分断面積について検討した結果、クラック間距離が小さいとき、2つの円形クラックに挟まれた薄い円形弾性層領域には薄板の固有振動に近い局所共振現象が生じていることがわかった。

参考文献

- 1) Sayers, C.M. and Smith, R.L.: Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusions, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol.16, pp.1189-1194, 1983.
- 2) Nair, S.M., Hsu, D.K. and Rose, J.H.: Porosity estimation using the frequency dependence of the ultrasonic attenuation, *J. Nondestr. Eval.*, Vol.8, pp.13-26, 1989.
- 3) Cho, H., Sato, H., Takemoto, M., Sato, A. and Yamanaka, K.: Surface acoustic wave velocity and attenuation dispersion measurement by phase velocity scanning of laser interference fringes, *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol.35, pp.3062-3065, 1996.
- 4) Hirao, M. and Ogi, H.: Electromagnetic acoustic resonance and materials characterization, *Ultrasonics*, Vol.35, pp.413-421, 1997.
- 5) Beltzer, A.I.: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - a survey of the causal approach, *Wave Motion*, Vol.11, pp.211-229, 1989.
- 6) 北原道弘, 岸 典之: クラックによる散乱波動エネルギーの解析, 応用力学論文集, Vol.2, pp.111-118, 1999.
- 7) Domany, E.: Multiple scattering formalism: application to scattering by two spheres, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol.1, pp.167-171, 1982.
- 8) Boström, A.: Multiple scattering of elastic waves by bounded obstacles, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.67, pp.399-413, 1980.
- 9) Varadan, V.K., Varadan, V.V. and Pao, Y.H.: Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section I. SH waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.63, pp.1310-1319, 1978.
- 10) Boström, A. and Olsson, P.: Scattering of elastic waves by non-planar cracks, *Wave Motion*, Vol.9, pp.61-76, 1987.
- 11) Leissa, A.: *Vibration of Plates*, Chapter 2, Acoustical Society of America, 1993.

(2000 年 4 月 21 日 受付)