

微視構造をもつ材料の圧縮縦割れ破壊に関するエネルギーモデル

An Energy-Based Model of Longitudinal Splitting in Materials with Microstructures

小国健二*・G. Ravichandran**
Kenji OGUNI and G. Ravichandran

*正会員 Ph.D. 東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

**Ph.D. Professor of Aeronautics, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125

Many materials are often observed to fail in a longitudinal splitting mode under far-field compressive loading with weak lateral confinement. An energy-based model is developed based on the principle of minimum potential energy and the evaluation of effective properties to obtain an analytical approximation to the critical stress for longitudinal splitting under compression in materials with a given microstructure. The analytic estimate for the compressive strength is used to illustrate its dependence on micromechanical properties and lateral confining pressure. The predictions of the model show good agreement with available experimental data.

Key Words : compressive failure, energy-based model, longitudinal splitting

1. はじめに

材料の圧縮破壊強度は構造物の設計を制限する最大の要因の一つであり、合理的な設計のためには圧縮破壊の支配メカニズムに基づく強度の評価が必要不可欠である。しかし、圧縮破壊の支配メカニズムは未解明である。

圧縮応力下における破壊モードは大きくわけて二つある。「縦割れ破壊」と「せん断変形の局所化」である。とくに、岩石・人工の複合材料においては、拘束圧の増加に伴い「縦割れ破壊」から「せん断変形の局所化」への「破壊モードの変化」が観察される。従って、材料の圧縮破壊は材料の性質・応力状態など、様々な要因の相互作用で支配される現象である。本研究では二つの破壊モードのうち、「縦割れ破壊」に着目する。

縦割れ破壊現象を解析する方法として、微小欠陥から進展する個々の亀裂の挙動を追跡することがあげられるが、非常に複雑な応力状態をもつ不均質構造中での亀裂の進展を追跡することは非常に難しく、現実的でない。

本研究では、圧縮応力下にある材料において物性

の不均質性によって蓄積される過剰なポテンシャルエネルギーを、新しい界面を作って解放する過程を「縦割れ破壊」とみなし、エネルギーバランスを考慮した解析モデルを提案する。破壊に伴い解放されるポテンシャルエネルギーが、新しい界面を創出するために必要なエネルギーを上回るとき、「縦割れ破壊」が生じる。これが本研究で提案する「縦割れ破壊基準」となる。

本研究では既知の微視構造をもつ材料の有効物性を用い、破壊前後の釣合い状態におけるポテンシャルエネルギーを定量的に評価し、その大小を比較する。その結果、「縦割れ破壊」モードにおける圧縮破壊強度の予測の解析的表現が得られる。このモデルに基づき、材料の構成要素の力学的性質・幾何形状・構成要素間の界面の条件・拘束圧などの物理量が圧縮強度に及ぼす影響を定量的に評価することができる。

2. 縦割れ破壊のエネルギーモデル

既知の簡単な微視構造をもつ材料の例として、単方向繊維補強複合材料を採り上げ、本研究で提案す

縦割れ破壊のエネルギーモデルを適用する。単方向繊維補強複合材料は、高強度と軽量化という相反する工学的要請を満たす材料として、航空機・建築部材など多くの分野で実用に供されているため、解析と比較できる多くの実験データが存在する材料である。前述のように、繊維軸方向に圧縮をうける単方向繊維補強複合材料には二つの破壊モードがある。拘束圧が低い場合に観察される「縦割れ破壊」と、拘束圧が高い場合に観察される「キンクバンド」の成長である。「キンクバンド」とは、せん断帯のように局部的に繊維が折れ曲がって破壊する現象を指す^{1), 2)}。本研究では、複合材料の構成要素（繊維・マトリックス）の力学的性質・幾何形状に基づいて「縦割れ破壊」モードでの圧縮強度を予測する。

2.1 問題設定

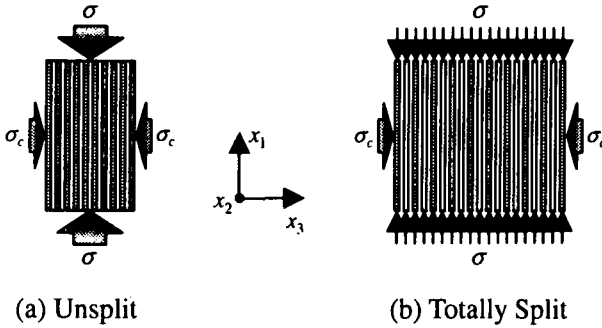


図-1 単方向繊維補強複合材料の概念図
(a) 健全な状態、(b) 縦割れ破壊後の状態

例題として、単方向繊維補強複合材料の円柱供試体を拘束圧 σ_c 、繊維軸方向圧縮応力 σ で圧縮する問題を考える（図-1）。この設定において、健全な状態（図-1 (a)）と繊維方向に完全に割れた状態（図-1 (b)）を比較する。単位体積あたりの全ポテンシャルエネルギーをそれぞれ、 Π_u （健全な状態）、 Π_s （破壊後の状態）とし、 Π_u と Π_s を比較することによって、与えられた拘束圧に対する繊維軸方向限界圧縮応力が与えられる。本研究の解析モデルでは、縦割れ破壊の条件を、「供試体はより低いポテンシャルエネルギーを与える釣合い状態を選択する」と設定する。つまり、 Π_s が Π_u を下回るとき、縦割れ破壊が生じる³⁾。本研究中で用いられる「ポテンシャルエネルギー」は、通常用いられる変位場の汎関数としてのポテンシャルエネルギーの定義を用い、釣合い条件を満たす変位場について計算されるものである。従って、本研究においては、破壊前

と破壊後の釣合い状態におけるポテンシャルエネルギーの大小が比較される。

全ポテンシャルエネルギーは代表体積要素 (RVE) の概念に基づき、繊維とマトリックスの物性を用いて表現される。ここで考慮されている問題における RVE は一本の繊維がその体積率に応じた量のマトリックスによって囲まれた円柱となる^{4), 5), 6)}。

2.2 縦割れ破壊のエネルギー条件

(1) 健全な供試体の全ポテンシャルエネルギー

健全な供試体の単位体積あたりの全ポテンシャルエネルギー Π_u は弾性ポテンシャルエネルギーのみであり、応力（トラクション）境界条件下では次のように表される。

$$\begin{aligned}\Pi_u &= \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{1}{2} \epsilon(x) : C(x) : \epsilon(x) - \sigma(x) : \epsilon(x) \right\} dx \\ &= \frac{1}{V} \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \sigma(x) : S(x) : \sigma(x) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\sigma} : S_* : \bar{\sigma}\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 V は RVE の体積、 $C(x)$ と $S(x)$ はそれぞれ点 x における 4 階の弾性テンソルとコンプライアンステンソルである。 $\epsilon(x)$ はひずみ場、 $\sigma(x)$ は応力場、 $\bar{\sigma}$ は応力境界条件を表す。 S_* は健全な供試体の有効コンプライアンステンソルである。

RVE における応力の平均場とひずみの平均場は次の関係を満たす¹⁾。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= C_{11}^* \bar{\epsilon}_{11} + C_{12}^* \bar{\epsilon}_{22} + C_{12}^* \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\sigma}_{22} &= C_{12}^* \bar{\epsilon}_{11} + C_{22}^* \bar{\epsilon}_{22} + C_{23}^* \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\sigma}_{33} &= C_{12}^* \bar{\epsilon}_{11} + C_{23}^* \bar{\epsilon}_{22} + C_{22}^* \bar{\epsilon}_{33}\end{aligned}\quad (2)$$

応力境界条件は繊維軸方向圧縮応力と拘束圧の絶対値、 σ および σ_c を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= -\sigma & \bar{\sigma}_{22} &= \bar{\sigma}_{33} = -\sigma_c \\ \bar{\sigma}_{ij} &= 0 & \text{for } i \neq j\end{aligned}\quad (3)$$

健全な供試体の単位体積あたりの全ポテンシャルエネルギー Π_u は繊維軸方向圧縮応力 σ の 2 次式として次のように表される。

¹⁾ $C_{11}^*, C_{12}^*, C_{22}^*, C_{23}^*$ は補遺に示されている。

$$\begin{aligned}
\Pi_u &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sigma \\ -\sigma_c \\ -\sigma_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{12}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{23}^* \\ C_{12}^* & C_{23}^* & C_{22}^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sigma \\ -\sigma_c \\ -\sigma_c \end{bmatrix} \\
&= \frac{(C_{22}^* + C_{23}^*)\sigma^2 - 4C_{12}^*\sigma_c\sigma + 2C_{11}^*\sigma_c^2}{4C_{12}^{*2} - 2C_{11}^*(C_{22}^* + C_{23}^*)} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^2}{E_1^*} + \frac{4\nu_{21}^*\sigma_c\sigma}{E_1^*} + \left(\frac{1}{K_{23}^*} + \frac{4\nu_{21}^{*2}}{E_1^*} \right) \sigma_c^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 E_1^* は繊維軸方向のヤング率、 ν_{21}^* はポアソン比、 K_{23}^* と G_{23}^* はそれぞれ、繊維軸と垂直な平面における平面ひずみ体積弾性率およびせん断係数である。これらの有効物性は繊維とマトリックスの物性および繊維の体積含有率の関数として、補遺に表されている⁴⁾。

(2) 縦割れ破壊した供試体の全ポテンシャルエネルギー

健全な供試体と同じ境界条件において、RVEの繊維とマトリックスの境界の分離によって破壊した供試体を考える。破壊後の単位体積あたりの弾性ポテンシャルエネルギー E_s は繊維とマトリックスそれぞれからなる柱に蓄えられる弾性ポテンシャルエネルギーの和として、次のように表される。

$$\begin{aligned}
E_s &= \frac{1}{V} \int_V \left\{ -\frac{1}{2} \sigma(x) : S(x) : \sigma(x) \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2} \bar{\sigma} : S^* : \bar{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2} \bar{\sigma} : (\nu_f S_f + \nu_m S_m) : \bar{\sigma}
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで S^* は破壊後の供試体の有効コンプライアンステンソルであり、 ν_f 、 ν_m はそれぞれ繊維とマトリックスの体積含有率である。繊維とマトリックスは等方弾性体であり、そのコンプライアンス S_f 、 S_m はそれぞれの物質のヤング率(E_f 、 E_m)およびポアソン比(ν_f 、 ν_m)で表される。最終的に、破壊後の単位体積あたりの弾性エネルギー E_s は繊維軸方向圧縮応力 σ の2次式となる。

$$\begin{aligned}
E_s &= -\frac{1}{2} \bar{\sigma} : (\nu_f S_f + \nu_m S_m) : \bar{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\nu_f}{E_f} \left\{ \sigma^2 - 4\nu_f \sigma \sigma_c + 2(1-\nu_f) \sigma_c^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\nu_f)}{E_m} \left\{ \sigma^2 - 4\nu_m \sigma \sigma_c + 2(1-\nu_m) \sigma_c^2 \right\} \right]
\end{aligned} \tag{6}$$

繊維とマトリックスの境界の分離に伴い RVE 内に生じる単位体積あたりの表面エネルギー Γ は単位面積あたりの表面エネルギー γ を用いて、

$$\Gamma = \frac{2\gamma A}{V} = \frac{2\gamma(2\pi ah)}{\pi R^2 h} = \frac{4\gamma\nu_f}{a} \tag{7}$$

と表される。ここで A は RVE 内での繊維の側面積、 a は繊維の半径、 R は RVE の半径である。 Γ が RVE の高さ h によらないのは特筆すべき点である。表面エネルギー γ は繊維とマトリックスの間のインターフェースクラックの破壊靱性と解釈できる。本来、 γ は拘束圧などの応力状態によって変化すると考えられるが、本研究では、 γ を定数と仮定する。 γ の拘束圧への依存性が圧縮強度に与える影響については「結論」の中で言及する。

縦割れ破壊後の単位体積あたりの全ポテンシャルエネルギー Π_s は、単位体積あたりの弾性ポテンシャルエネルギー E_s と表面エネルギー Γ の和、

$$\Pi_s = E_s + \Gamma \tag{8}$$

となる。

2.3 破壊条件式

本研究では、縦割れ破壊基準として、次に示す条件を適用する。

$$\begin{aligned}
\Pi_u - \Pi_s < 0 &\Rightarrow \text{Unsplit} \\
\Pi_u - \Pi_s = 0 &\Rightarrow \text{Neutral} \\
\Pi_u - \Pi_s > 0 &\Rightarrow \text{Split}
\end{aligned} \tag{9 a, b, c}$$

ここで、 Γ が応力状態によらないと仮定すると、等ポテンシャル線 $\Pi_u - E_s = \Gamma$ すなわち、 $\Pi_u - \Pi_s = 0$ が臨界応力状態となる。さらに、 $\Pi_u - E_s$ は $\sigma_c = \text{constant}$ と $\sigma > \sigma_c$ の条件下で σ の単調増加関数となる。従って、破壊条件は等式、

$$\Pi_u - \Pi_s = 0 \tag{10}$$

で与えられる。

3. 解析結果

3.1 圧縮強度の解析的評価

式(4)から式(8)で表される Π_u と Π_s を用い、式(10)を σ について解くと、2つの根 σ_1 と σ_2 が得られる。

$$\sigma_{1,2} = \frac{p_2 \sigma_c \pm \sqrt{p_2^2 \sigma_c^2 - p_1 (p_3 \sigma_c^2 - \Gamma)}}{p_1} \quad (11)$$

ここで p_1 、 p_2 、 p_3 は材料の物性の関数である。

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} - \frac{1}{E_1^*} \right),$$

$$p_2 = \frac{v_f v_f}{E_f} + \frac{v_m v_m}{E_m} - \frac{v_{21}^*}{E_1^*},$$

$$p_3 = \frac{v_f (1 - v_f)}{E_f} + \frac{v_m (1 - v_m)}{E_m} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_{23}^*} + \frac{4 v_{21}^{*2}}{E_1^*} \right)$$

ここで拘束圧 σ_c と単位面積あたりの表面エネルギー γ を与えると、 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ となる。従って、 σ_1 を圧縮強度 σ^* と呼ぶ。さらに、式(11)において、 $\sigma_c = 0$ とすると、縦割れ破壊モードでの一軸圧縮強度が得られる。

$$\sigma^*|_{\sigma_c=0} = 2 \left(\frac{2\gamma v_f}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} - \frac{1}{E_1^*} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

式(12)から、太い繊維を用いた複合材料は細い繊維を用いたものより縦割れ破壊しやすいことがわかる。さらに、2次式で表されるエネルギーポテンシャル関数、 $\Phi(\sigma, \sigma_c) = \Pi_u - \Pi_s$ の等高線、

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_c} d\sigma_c = 0 \text{ は、} \sigma > \sigma_c \text{ の条件下で}$$

$$\frac{d\sigma^*}{d\sigma_c} \leq 1 \quad (13)$$

を満たす。すなわち、式(13)は「縦割れ破壊」がポテンシャルエネルギー最小の原理によって支配されているならば、拘束圧の増加に伴う圧縮強度の増加率は1以下であることを示す。

3.2 パラメータ解析

式(11)、式(12)から「縦割れ破壊」において重要なパラメータは γ/a 、 v_f 、 σ_c の3つであることがわかる。これらのパラメータが圧縮破壊強度に与える影響を定量的に評価し、それらを比較するために、パラメータ解析を行った。

ここでは、複合材料の構成要素の力学的性質が圧縮強度に与える影響を検討するために、2つの異なる複合材料について解析を行う。これらは、単方向 E-glass/vinylester コンポジット (図表中では GVE と表示)と単方向 Carbon/epoxy コンポジット (図表中では C/ER と表示)であり、工学的応用範囲の広い材料である。これらの材料に関する圧縮破壊強度等の実験データや材料定数に関するデータは Parry and Wronski, (1982) や Waas 他 (1997) 等に記載されている^{7)・8)}。これらのデータのうち、解析のインプットパラメータとして用いられる繊維やマトリックスの力学的性質・幾何形状などを表-1に示す。

表-1 繊維とマトリックスの力学的性質
および繊維の半径

		GVE	C/ER
繊維	E_f (GPa)	72.4	234
	v_f	0.2	0.2
	v_f	0.1-0.6	0.6
	a (μm)	12.1	3.4
マトリックス	E_m (GPa)	3.69	4.28
	v_m	0.38	0.34
界面	γ (J/m ²)	110,210	140

図-2に示されるのは、モデルから得られる2種類の複合材料の圧縮強度である。ここでは、繊維体積含有率は $v_f = 60\%$ で固定され、 γ/a と拘束圧 σ_c (0および100MPa)が変化するパラメータである。この解析から、 γ/a が圧縮強度に及ぼす影響が強い(圧縮強度は $\sqrt{\gamma/a}$ に比例する)ことが分かる。すなわち、小さい表面エネルギーを持つ(接着面が弱い)、あるいは繊維が太い場合、 γ/a は小さくなり圧縮強度は低下する。また、拘束圧 σ_c が圧縮強度に及ぼす影響は比較的弱いこと、 γ/a が一定である限り、圧縮強度は材料の選択の影響をほとんど受けないことなども図-2の解析結果は示唆している。

図-3に γ/a と v_f をパラメータとした一軸圧縮強度の変化を示す。 γ/a を固定した場合、 v_f が圧縮強度

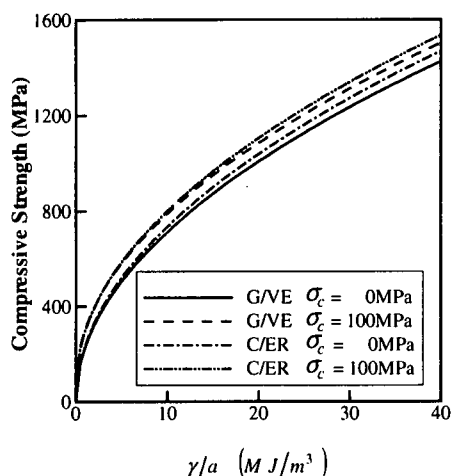


図-2 圧縮強度に対する表面エネルギーと拘束圧の影響 (G/VE は E-Glass/vinylester を、C/ER は Carbon/epoxy を指す。)

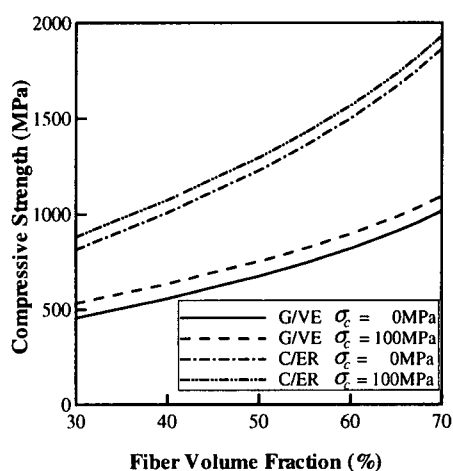


図-4 圧縮強度に対する v_f と拘束圧の影響 (G/VE は E-Glass/vinylester を、C/ER は Carbon/epoxy を指す。)

度に及ぼす影響は物性のそれよりも大きい。この結果と、図-2 で示された材料選択への圧縮強度の非依存性は、コンポジットを構成する個々の要素（繊維・マトリックス）の物性値がコンポジットの圧縮強度に及ぼす影響は比較的小さいこと、及び、物性の異なる材料を組み合わせることにより生じる異方性の度合いが圧縮強度を決定する重要なファクター

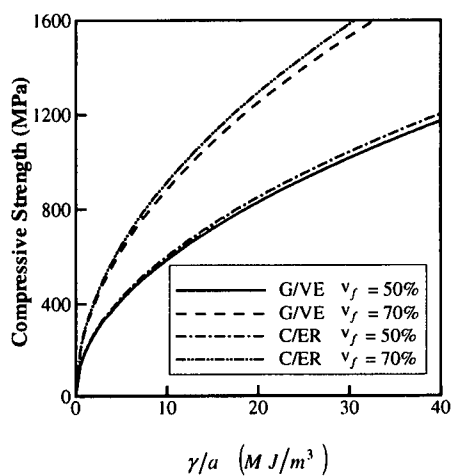


図-3 一軸圧縮強度に対する表面エネルギーと v_f の影響 (G/VE は E-Glass/vinylester を、C/ER は Carbon/epoxy を指す。)

であることを示している。

図-4は、 γ/a を固定し v_f と σ_c を変化させたパラ

メーター解析の結果である。E-glass/vinylester と Carbon/epoxy それぞれの γ/a の最適値として $\gamma/a = 1.32 \times 10^7 \text{ J/m}^3$ および $\gamma/a = 4.17 \times 10^7 \text{ J/m}^3$ をそれぞれ用いた^{7), 8)}。ここでは、異なる拘束圧 $\sigma_c = 0 \text{ MPa}$ と $\sigma_c = 100 \text{ MPa}$ における圧縮強度の差は小さく、全ての v_f に対して、その差はほぼ一定である。つまり、拘束圧 σ_c が圧縮強度におよぼす影響は (v_f による影響より) 弱く、与えられた v_f に対して、その影響はほぼ一定である。

3.3 実験結果との比較

本研究で提案した縦割れ破壊に関するエネルギーモデルの妥当性を検証するため、2つの異なるタイプの複合材料 (E-glass/vinylester および Carbon/epoxy) に関する圧縮破壊実験の結果と、モデルから予測される圧縮強度を比較する。E-glass/vinylester についての実験は 0% から 60% までの繊維体積含有率について Waas らによって行われた一軸圧縮試験であり、Carbon/epoxy については、Parry と Wronski によって行われた静水圧的な拘束圧をかけながら繊維軸方向に圧縮する実験である^{7), 8)}。表-1 にこれらの実験で用いられた材料の力学的性質・繊維の半径・表面エネルギーを示す。これらのデータはモデルへのインプットとして用いられる。

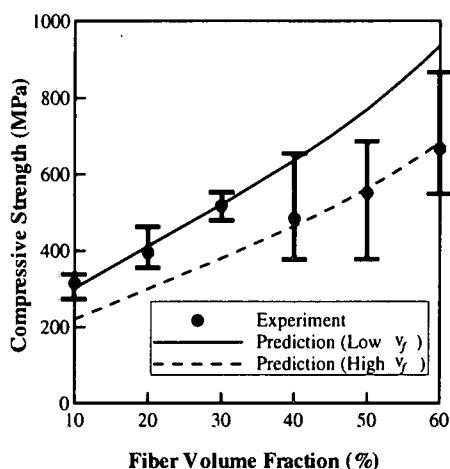


図-5 解析結果と実験結果との比較 (Waas 他による E-Glass/vinylester の一軸圧縮試験)

図-5に示す Waas らの一軸圧縮実験との比較により、繊維体積含有率 (v_f) が圧縮強度に及ぼす影響のモデルによる評価の妥当性が検証される。圧縮強度の実験結果には $v_f = 30\%$ と $v_f = 40\%$ の間で減少が認められるが、それ以外の領域では、 v_f の増加に伴い、増加する。この観察に基づき、2つのデータグループ、すなわち低含有率 ($v_f \leq 30\%$) および高含有率 ($v_f \geq 40\%$) について別個に解析を行った。解析における唯一の違いはインプットパラメータとしての表面エネルギー γ の値のみであり、 $v_f \leq 30\%$ では、 $\gamma = 210 \text{ J/m}^2$ を、 $v_f \geq 40\%$ では $\gamma = 110 \text{ J/m}^2$ をそれぞれ用いた。モデルの定式化において、 γ は繊維とマトリックスの間の結合を切るために必要なエネルギーと仮定され、マトリックスを引き裂いて新しい面を作り出すために必要なエネルギーは考慮されていなかった。 v_f が大きい場合、繊維同士の平均距離は小さく、破壊に伴い切り裂かれるべきマトリックスの面積が小さくなるため、繊維とマトリックスを引き離すために必要な表面エネルギーのみが支配的となる。一方、 v_f が小さい場合はマトリックスを切り裂くために必要なエネルギーは切り裂かれるマトリックスの面積の増大に伴い増加するため、無視できなくなる。結果的に v_f の減少は見かけの表面エネルギーの増加に帰着する。

それぞれの領域において、解析結果は実験結果とよく一致しており、モデルによる v_f の影響の評価の妥当性が示されている。

一方、Parry と Wronski による拘束実験の結果との

比較により、拘束圧 (σ_c) が圧縮強度に及ぼす影響のモデルによる評価の妥当性が検証される。

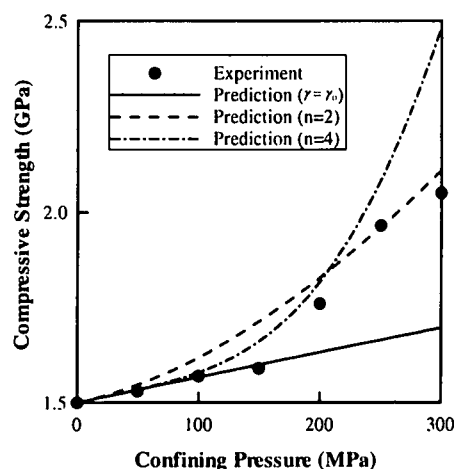


図-6 解析結果と実験結果との比較 (Parry と Wronski による Carbon/epoxy の圧縮試験)

図-6 に実験で観測された拘束圧 σ_c の変化に伴う破壊強度 σ^* の変化が示されている。この実験では、高い拘束圧 ($\sigma_c > 150 \text{ MPa}$) におけるグラフの傾きが低い拘束圧 ($0 \leq \sigma_c \leq 150 \text{ MPa}$) の場合と比べて急である。これは、拘束圧の増加に伴う「縦割れ破壊」から「キンクバンドの形成」への破壊モードの変化によるものである。従って、解析結果との比較は「縦割れ破壊」が生じる領域、即ち $0 \leq \sigma_c \leq 150 \text{ MPa}$ に限定される。解析結果 ($\gamma = \gamma_0$) は実験結果と非常によくあっており、この一致はモデルによる拘束圧の影響の評価の妥当性を示唆している。なお、図中に $n=2,4$ で示した結果は本論文の最後に述べる。

解析における唯一のフィッティングパラメータである単位面積あたりの表面エネルギー γ は表-1 に示されている。本研究で比較の対象とした複合材料における γ の実験データは存在しないが、解析パラメータとして用いた γ は同様の性質を持つ複合材料について得られている実験結果とよく一致する⁹⁾。

4. 結論

本研究では、既知の微視構造をもつ材料の「縦割れ破壊」に関するエネルギーモデルを構築し、材料の構成要素の力学的性質・幾何形状・構成要素間の界面の条件・拘束圧などの物理量が圧縮強度に及ぼす影響を定量的に評価する手法を示した。

例題として採り上げた繊維補強複合材料について

の解析から、次の具体的な結論が得られた。

- (i) 縦割れ破壊モードでの圧縮強度は $\sqrt{\gamma/a}$ に比例し、このパラメータが圧縮強度を決める支配的な要因である。すなわち、高い表面エネルギー・細い繊維が高い圧縮強度を得る条件となる。
- (ii) 異方性の強さの度合いが強度の支配要因のひとつであり、繊維体積含有率はこの文脈でのみ圧縮強度に影響を及ぼす。

また、モデルは実験結果とよく一致する圧縮強度の予測を与える。このことは本研究で提案した「縦割れ破壊」に関するエネルギーモデルの妥当性を示唆している。

例題中で用いられた仮定のうち、表面エネルギー γ が拘束圧によらず一定であるという点には議論の余地がある。 γ を一定値とした場合、本研究で構築したモデルは高い拘束圧において、実験で観察される圧縮強度を大きく下回る応力での縦割れ破壊を予測する。実際、高い拘束圧の下では縦割れ破壊は完全に抑えられ、「キンクバンド」の形成による破壊が観察される^{7),10),11)}。ここでは、高い拘束圧の下では「縦割れ破壊」が抑制されるという実験結果に基づき、拘束圧の増大に伴い表面エネルギー γ が増加すると仮定し、 γ の増加が圧縮強度の予測に及ぼす影響を評価する。例として、 γ が拘束圧 σ_c の関数として次に示す形で与えられる場合を考える。

$$\gamma = \gamma_0 \left\{ 1 + \alpha_n \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0^*} \right)^n \right\} \quad (14)$$

ここで、 γ_0 は $\sigma_c = 0$ における表面エネルギー、 σ_0^* は一軸圧縮強度、 n は拘束圧による表面エネルギーの増大指数、 α_n は指数 n に対応する無次元の正の定数を示す。

式(14)で、 $n=2$ と $n=4$ とした場合のモデルによる圧縮強度の予測と実験データとの比較を図-6に示す。比較に用いたのはCarbon/epoxyに関するParryとWronskiによる実験結果であり、モデルへの入力パラメータは $\gamma_0 = 140 \text{ J/m}^2$ 、 $\sigma_0^* = 1.5 \text{ GPa}$ 、 $\alpha_2 = 15.58$ 、 $\alpha_4 = 823.6$ である。

$n=2$ と $n=4$ の場合の比較から、指数 n の増加に伴い、破壊包絡線の曲率が増大することが分かる。つまり、指数 n の増加に伴い、モデルによる縦割れ破壊強度の予測は、拘束圧が弱い領域では実験値に近づき、拘束圧が高い領域では実験値を上回る。したがって、モデルは γ が σ_c への依存性が強い(指数

n が大きい)増加関数である場合に、実験で観察される「縦割れ破壊モードの抑制」が生じることを示唆している。

補遺

単方向繊維補強複合材料(x_1 を繊維方向とする)の有効弾性定数 E_1^* 、 ν_{21}^* 、 K_{23}^* 、 G_{23}^* は以下のように表される⁴⁾。

$$E_1^* = \left(\nu_f E_f + \nu_m E_m \right) \frac{E_m (D_1 - D_3 F_1) + E_f (D_2 - D_4 F_2)}{E_m (D_1 - D_3) + E_f (D_2 - D_4)}$$

$$\nu_{21}^* = \frac{\nu_f E_f L_1 + \nu_m E_m L_2 \nu_m}{\nu_f E_f L_3 + \nu_m E_m L_2}$$

$$K_{23}^* = K_m \frac{K_f (1 + 2\nu_m \nu_f) + 2K_m \nu_m \nu_m}{K_f \nu_m + K_m (\nu_f + 2\nu_m)}$$

$$G_{23}^* = G_m \sqrt{\left[1 + \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\nu_m} \nu_f A_4 \right]}$$

$$\text{ここで、 } D_1 = 1 - \nu_f, \quad D_2 = \frac{1 + \nu_f}{\nu_m} + \nu_m,$$

$$D_3 = 2\nu_f^2, \quad D_4 = 2\nu_m^2 \frac{\nu_f}{\nu_m},$$

$$\begin{aligned} A_4 = & 2(G_f - G_m)(2\nu_m - 1) \\ & \left[G_m(4\nu_f - 3)(\nu_f^3 - 1) \right. \\ & \left. - G_f \{ (4\nu_m - 3)\nu_f^3 - 1 \} \right] \\ & / \left[G_m^2 (4\nu_f - 3)(\nu_f - 1)^4 \right. \\ & \left. - 2G_f G_m \{ -5 + 6\nu_m - 4\nu_f + 6\nu_f^2 \right. \\ & \left. - 4\nu_m \nu_f^3 + (3 - 2\nu_m)\nu_f^4 \right. \\ & \left. + 2\nu_f \{ 3 - 4\nu_m + 4\nu_m - 6\nu_f^2 \right. \\ & \left. + 4\nu_m \nu_f^3 - \nu_f^4 \} \right] \\ & + G_f^2 \{ 3 + 4\nu_f - 6\nu_f^2 \\ & \left. + 4\nu_f^3 (3 - 6\nu_m + 4\nu_m^2) \right. \\ & \left. + (3 - 4\nu_m)\nu_f^4 - \nu_m \} \right] \end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{\nu_m \nu_f E_f + \nu_f \nu_m E_m}{\nu_f \nu_f E_f + \nu_m \nu_m E_m}, \quad F_2 = \frac{\nu_f}{\nu_m} F_1,$$

$$L_1 = 2 \nu_f (1 - \nu_m^2) \nu_f + \nu_m (1 + \nu_m) \nu_m,$$

$$L_2 = \nu_f (1 - \nu_f - 2 \nu_f^2),$$

$$L_3 = 2 (1 - \nu_m^2) \nu_f + (1 + \nu_m) \nu_m,$$

である。

E_f, ν_f, ν_f と E_m, ν_m, ν_m はそれぞれ繊維とマトリックスのヤング率、ポアソン比、体積含有率である。

弾性定数 $C_{11}^*, C_{12}^*, C_{22}^*, C_{23}^*$ は $E_1^*, \nu_{21}^*, K_{23}^*, G_{23}^*$ を用いて以下のように表される。

$$C_{11}^* = E_1^* + 4 \nu_{21}^{*2} K_{23}^*$$

$$C_{12}^* = 2 \nu_{21}^* K_{23}^*$$

$$C_{22}^* = K_{23}^* + G_{23}^*$$

$$C_{23}^* = K_{23}^* - G_{23}^*.$$

謝辞

本研究はカリフォルニア工科大学への Office of Naval Research (Dr. Y. D. S. Rajapakse, Scientific Officer)からの研究費の助成を受けて遂行されたものである。

参考文献

- 1) Waas, A. M. and Schultheisz, C. R., 1996, "Compressive failure of composites, Part II: Experimental studies," *Prog. Aerospace Sci.*, Vol. 32, pp. 43-78.
- 2) Fleck, N. A., 1997, "Compressive failure of fiber reinforced composites," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 43-117.

- 3) Bhattacharya, K., Ortiz, M., and Ravichandran G., 1998, "Energy-based model of compressive splitting in heterogeneous brittle solids," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, pp. 2171-2181.
- 4) Hashin, Z. and Rosen, B. W., 1964, "The elastic moduli of fiber-reinforced materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, pp. 223-232.
- 5) Hill, R., 1964, "Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I Elastic behaviour," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 199-212.
- 6) Nemat-Nasser, S. and Hori, M., 1993, *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier, New York.
- 7) Parry, T. V. and Wronski, A. S., 1982, "Kinking and compressive failure in uniaxially aligned carbon fibre composite tested under superposed hydrostatic pressure," *J. Mater. Sci.*, Vol. 17, pp. 893-900.
- 8) Waas, A. M., Takeda, N., Yuan, J. and Lee, S. H., 1997, "Static and dynamic compressive behavior of glass fiber reinforced unidirectional composites," *Proceedings of the American Society for Composites, Twelfth Technical Conference*, pp. 552-561, Dearborn, Michigan.
- 9) Daniel, I. M. and Ishai, O., 1994, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press.
- 10) Weaver, C. W. and Williams, J. G., 1975, "Deformation of a carbon-epoxy composite under hydrostatic pressure," *J. Mater. Sci.*, Vol. 10, pp. 1323-1333.
- 11) Sigley, R. H., Wronski, A. S. and Parry, T. V., 1992, "Axial compressive failure of glass-fibre polyester composites under superposed hydrostatic pressure: influence of fibre bundle size," *Compos. Sci. Tech.* Vol. 43, pp. 171-183.

(2000年4月21日 受付)