

巨視的材料不安定性のマルチスケールモデリングにおける 微視的構造周期のブロック対角化法による同定

Estimate of Microstructural Periodicity in Multi-scale Modeling
for Macroscopic Material Instability Based on the Block-diagonalization Method

斉木 功*, 寺田賢二郎**, 堀 宗朗***, 池田清宏****

Isao SAIKI, Kenjiro TERADA, Muneo HORI and Kiyohiro IKEDA

*工修 宇都宮大学 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

**Ph.D. 東北大学大学院 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***Ph.D. 東京大学 地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

****Ph.D. 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

By employing the block-diagonalization method in the group-theoretic bifurcation theory, we develop a general procedure to estimate the number of periodic microstructures (cells) that should be contained in a representative volume element, in which the microstructural analysis in the nonlinear multi-scale homogenization analysis is performed. Since the problem of interest essentially involves the non-convexity of the total potential energy, we first provide some remarks on the multi-scale modeling strategy within the framework of the nonlinear homogenization theory. Next, knowing that the number of cells restricts possible bifurcation modes, we perform the bifurcation analysis for periodic microstructures by means of the block-diagonalization method. To demonstrate the proposed procedure, several numerical analyses are conducted on a cellular solid, which is one of the typical examples whose microstructural instability causes the macroscopic material instability. The proposed method can readily be applied to the characterization of the mechanical behaviors caused by micro-macro-coupled instability.

Key Words : multi-scale characterization, bifurcation, block-diagonalization, homogenization method, non-convex potential, cellular solids

1. はじめに

材料の不安定挙動は、多くの場合、材料が持つ微視的な「構造」の不安定に起因するものと推察される。この最も明確な例として、ハニカム構造やフォーム材といったセル構造体¹⁾が挙げられる。セル構造体は、図-1に示すように、圧縮応力がある限界点に達すると、セルという微視構造の幾何学的不安定により材料不安定が引き起こされるという特徴を有している。著者らは、このようなメカニズムに対し、通常のスケールに加えて、微視的なスケールでの応答を同時に考慮できる均質化法によるモデル化を試みている²⁾。

マルチスケール解法としての均質化法^{3),4),5)}は近年、非線形問題への拡張が積極的に行われている^{6),7),8)}。しかしながら、特にここで対象としているような不安定問題では、そのポテンシャルの凸性が失われることから、いわゆるユニットセルを単純に単位(最小)周期構造とできないことが、非線形均質化法の一般化収束論⁹⁾の一つである Γ -収束論によって示されている¹⁰⁾。ただし、ユニットセルに含まなければならない単位周期構造の数についての具体的指針は報告されていない。これに対し、著者らは速度形の釣合式に対し漸近展開法を用いた

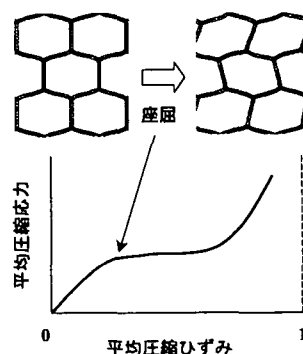


図-1 セル構造体の圧縮挙動とそのメカニズム

均質化法の定式化を行い、いくつかの異なる数の単位周期構造から構成されるユニットセルに対し、実際に数値解析を行い、ユニットセルの適切なモデルに関する検討を行った²⁾。しかしながら、多数の単位周期構造からなるユニットセルの分岐解析には、膨大な計算資源が必要であり、その数にも限界がある。

この種の問題に対しては、対称性の喪失を伴うという分岐の本質を考えれば見通しがよい。つまり、ユニットセルに含まれる単位周期構造の数は、そのユニットセル

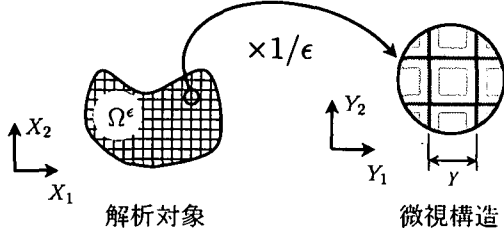


図-2 解析対象と微視構造

に起こりうる分岐パターンを拘束することになる。このような観点から、起こり得る分岐パターンを予測し、それを制限しないような単位周期構造の数を用いれば良いことになる。言い換えれば、ユニットセルに含まれるべき単位周期構造の数を決定するという問題は、周期構造の分岐パターンを求める問題と等価である。

パターン形成に関する研究は様々な分野で行われている。例えば、周期的に分布するクラックを有する系における、分岐によるパターン形成がOguniら¹¹⁾により明らかにされている。文献¹¹⁾では、群論的分岐理論から導かれる対称性を持つ系に対するブロック対角化^{12),13)}を釣合式に適用することにより、各分岐モードに対応する固有値を解析的に求めている。

以上のことを踏まえ、本論文では、まず非凸ポテンシャル問題に対する均質化法の一般化収束論を用いた定式化を示す。次に、均質化法により導かれた微視問題に対して、群対称性を考慮したブロック対角化を用いて固有値解析を行い、固有ベクトルの持つ対称性から微視構造が持つべき周期性、すなわちそこに含まれるべき単位周期構造の数を求める方法を提示する。また、正六角形ハニカムをその具体的な解析例に挙げ、本論文で示した方法の有効性を示す。

2. 非凸ポテンシャル問題の均質化法

本節では、一般化収束論の一つであるtwo-scale収束論を用いた凸ポテンシャルを持つ非線形均質化法の定式化^{14),15)}と同様のアプローチにより、非凸ポテンシャル問題に対する Γ -収束論を用いた定式化の方法の概要を示す。

2.1 境界値問題の設定

図-2に示すように、非常に小さい ϵ によって規定される大きさ ϵY の微小な単位周期構造により、周期的に埋め尽くされた領域 Ω^ϵ を解析対象とする。言い換えれば、対象領域は大きさ ϵY の並進変換に対して不変である。この構造全体の力学挙動は基本周期構造のみならず、その大きさを表すパラメタ ϵ にも影響を受ける。以下の定式化では、領域 Ω^ϵ のように各変数に添え字 ϵ を付してパラメタ ϵ への依存性を明示することとする。

一般的な有限変形境界値問題

$$\nabla_X \cdot (S^\epsilon \cdot F^{\epsilon T}) + \rho^\epsilon b = 0, \quad S^{\epsilon T} = S^\epsilon \quad \text{in } \Omega^\epsilon \quad (1)$$

$$u^\epsilon = \underline{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (S^\epsilon \cdot F^{\epsilon T})^T \cdot n = \underline{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (2)$$

を考える。ここに、 S^ϵ は第二Piola-Kirchhoff応力、 F^ϵ は変形勾配、 ρ は密度、 b は単位質量当たりの物体力、 $\underline{u}, \underline{t}$ は与えられる幾何学的、および力学的境界条件であり、 Γ は領域 Ω^ϵ の境界、 ∇ は下付きの変数による勾配を取る演算子であり、 X は物質座標を表す。次に、物体を構成する材料がひずみエネルギー W^ϵ を持つと仮定すれば、構成関係は以下のように表される。

$$S^\epsilon = \frac{\partial W^\epsilon}{\partial E^\epsilon} \quad (3)$$

ここに、 E^ϵ はGreen-Lagrangeひずみである。

均質化法の通常の手続きに従い、微視構造を観察するためのスケール $Y = X/\epsilon$ を導入する。すると、領域 Ω^ϵ は X の属する Ω と Y の属する ϵY の二つの空間の直積として $\Omega^\epsilon = \Omega \times \epsilon Y$ と表すことができ、また、変位、応力といった場の変数は X, Y の二変数の関数と見なすことができる。

2.2 一般化収束論による定式化

本節では、一般化変分原理および一般化収束論に基づく定式化を行うが、それぞれの理論から得られる帰結のみを示すこととする¹⁾。

前節で定義した境界値問題は、一般化変分原理により、以下に示す汎関数の適切な関数空間における停留問題に変換される。

$$\begin{aligned} \Pi^\epsilon(v^\epsilon, \tau^\epsilon, \gamma^\epsilon) &:= \int_{\Omega^\epsilon} W^\epsilon(\gamma^\epsilon) dv + J_{\text{ext}}^\epsilon(v^\epsilon) \\ &\quad + \int_{\Omega^\epsilon} \tau^\epsilon : \left[E^\epsilon - \frac{1}{2} \left\{ \nabla_X v^\epsilon + (\nabla_X v^\epsilon)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nabla_X v^\epsilon)^T \cdot (\nabla_X v^\epsilon) \right\} \right] dv \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $J_{\text{ext}}^\epsilon(v^\epsilon)$ は外力ポテンシャルである。

Müllerによる Γ -収束論¹⁰⁾によれば、パラメタ ϵ を持つ非凸汎関数

$$I^\epsilon(v^\epsilon) := \int_{\Omega^\epsilon} W \left(\frac{X}{\epsilon}, \nabla_X v^\epsilon(X) \right) dv \quad (5)$$

は $\epsilon \rightarrow 0$ のとき

$$I(v) = \int_{\Omega} W_{\text{hom}}(\nabla_X v(X)) dv \quad (6)$$

に Γ -収束する。ここに W_{hom} は

$$W_{\text{hom}}(\gamma) := \inf \langle W(Y, \gamma + \nabla_Y v^1(Y)) \rangle_{kY} \quad (7)$$

$$\langle \bullet \rangle_{kY} := \frac{1}{|kY|} \int_{kY} \bullet dY \quad (8)$$

により定義される均質化ひずみエネルギーであり、 k はある正の整数、 v^1 は kY における周期関数であり、 $\inf$

¹⁾ 各変数の属する空間等の厳密な議論は、文献^{9),10),15)}などを参照されたい。

はこれらの関数に関しての下限を意味する。ここで非凸ポテンシャルに関して注目すべきことは、微視変位に相当する $\mathbf{v}^1$ の周期性が Y ではなく kY においてのみ要求されているところである。これは、ユニットセルとして複数の単位周期構造を考えなくてはならないことを意味し、著者らはこのことについての数値的検討を行ってきた²⁾。

式 (4) に示した汎関数に、前述の Γ -収束論を適用することにより得られる汎関数の停留条件より、以下の釣合式、変位 - ひずみ関係、応力 - ひずみ関係を得る。ただし、実際の解析は変位法に基づいて行うため、釣合式以外は局所系で表した。

$$\int_{\Omega} \langle \{(\nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 + \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1)^T \cdot \mathbf{F}^0\} : \mathbf{S}^0 \rangle_{kY} dv = \int_{\Omega} \langle \rho \rangle_{kY} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dv + \int_{\Gamma_e} \underline{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds \quad (9)$$

$$\mathbf{E}^0 = \frac{1}{2} \{(\mathbf{F}^0)^T \cdot \mathbf{F}^0 - \mathbf{1}\} \quad (10)$$

$$\mathbf{S}^0 = \frac{\partial \mathcal{W}^e}{\partial \mathbf{E}^0} \quad (11)$$

ここに、 $\boldsymbol{\eta}^0, \boldsymbol{\eta}^1$ はそれぞれ巨視変位 $\mathbf{u}^0$ 、微視変位 $\mathbf{u}^1$ の変分、 $\mathbf{F}^0$ は変形勾配であり、 $\mathbf{1}$ を 2 階の単位テンソルとすれば、以下のように定義される¹⁵⁾。

$$\mathbf{F}^0 := \nabla_X \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 + \mathbf{1} \quad (12)$$

式 (9) より、微視、巨視、両スケールでの弱形式の釣合式 $g = 0, G = 0$ を得る。ここに、

$$g(\nabla_X \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) := \langle \{\mathbf{F}^0 \cdot \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1\} : \mathbf{S}^0 \rangle_{kY} \quad (13)$$

$$G(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) := \int_{\Omega} \langle \mathbf{F}^0 \cdot \mathbf{S}^0 \rangle_{kY} : \nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 dv - \int_{\Omega} \langle \rho \rangle_{kY} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dv - \int_{\Gamma_e} \underline{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds \quad (14)$$

である。またこのとき、ユニットセル内の全変位 $\mathbf{w}$ は

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (15)$$

により与えられる¹⁵⁾。ここに $\tilde{\mathbf{H}}$ は次式で定義される。

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{X}) := \nabla_X \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \quad (16)$$

3. 線形化と解析アルゴリズム

微視、巨視スケール釣合式 (13), (14) のような非線形方程式においては、何らかの線形化を行う必要がある。微視スケール問題において、一般的な Newton タイプの線形化を考えれば

$$g(\nabla_X \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \Delta \mathbf{u}^1) := g(\nabla_X \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) + Dg(\nabla_X \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \cdot \Delta \mathbf{u}^1 = 0 \quad (17)$$

となる。ここに、 $D\bullet \cdot \Delta \phi$ は $\bullet$ の ϕ に関する方向微分を表し、 $Dg \cdot \Delta \mathbf{u}^1$ の具体形は

$$\begin{aligned} & Dg(\nabla_X \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \cdot \Delta \mathbf{u}^1 \\ &= \left\langle \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1 \cdot \mathbf{S}^0 \cdot \nabla_Y (\Delta \mathbf{u}^1) \right. \\ &\quad \left. + \{\mathbf{F}^0 \cdot \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1\} : \mathbf{C} : \{\mathbf{F}^0 \cdot \nabla_Y (\Delta \mathbf{u}^1)\} \right\rangle_{kY} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで、 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{C} := \partial^2 \mathcal{W}^e / \partial \mathbf{E}^0 \partial \mathbf{E}^0$ で定義される 4 階の構成テンソルである。同様に、巨視スケール問題における線形化釣合式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & G(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \Delta \mathbf{u}^0) \\ &:= G(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) + DG(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \cdot \Delta \mathbf{u}^0 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $DG \cdot \Delta \mathbf{u}^0$ は

$$\begin{aligned} & DG(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) \cdot \Delta \mathbf{u}^0 \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 \cdot \mathbf{S}^0 \cdot (D\mathbf{F}^0 \cdot \Delta \mathbf{u}^0) \right. \\ &\quad \left. + \{\mathbf{F}^0 \cdot \nabla_X \boldsymbol{\eta}^0\} : \mathbf{C} : \{\mathbf{F}^0 \cdot (D\mathbf{F}^0 \cdot \Delta \mathbf{u}^0)\} \right\rangle_{kY} dv \end{aligned} \quad (20)$$

となるが、 $\mathbf{u}^1$ を $\tilde{\mathbf{H}} = \nabla_X \mathbf{u}^0$ の関数と考えると $D\mathbf{F}^0 \cdot \Delta \mathbf{u}^0$ は

$$D\mathbf{F}^0 \cdot \Delta \mathbf{u}^0 = \left\{ \mathbf{I} + \nabla_Y \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \tilde{\mathbf{H}}} \right\} : \Delta \tilde{\mathbf{H}} \quad (21)$$

となる。ここに、 $\mathbf{I}$ は 4 階の単位テンソル、 $\Delta \tilde{\mathbf{H}}$ は次式により定義される。

$$\Delta \tilde{\mathbf{H}} := \nabla_X (\Delta \mathbf{u}^0) \quad (22)$$

ところで、上記、微視変位と巨視変位勾配とを関連づける方程式が、微視スケール問題であると解釈できる。線形問題では、この微視スケール問題は巨視変位勾配に関しても線形であるため、単位の巨視ひずみ (変位勾配) に対する微視変位応答を求めることができ、それは特性変位関数と呼ばれる。ところが、一般的な非線形問題において単位の変位勾配を与えることは不適切である。一方、特性変位関数は、微視変位の巨視変位勾配に関する勾配と考えることもできる。この意味で巨視問題の接線剛性を考える際に必要な $\partial \mathbf{u}^1 / \partial \tilde{\mathbf{H}}$ が、いわばその特性変位関数と考えることができる。したがって、特性変位関数 χ を以下の式で定義する。

$$\chi := - \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \tilde{\mathbf{H}}} \quad (23)$$

微視変位 $\mathbf{u}^1$ は、前述の定式化において巨視変位勾配 $\tilde{\mathbf{H}}$ の陽な関数としては表れないが、式 (13) で規定される微視スケール問題 $g(\tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{u}^1) = 0$ は与えられた巨視変位勾配に対する微視応答を求めるための関係である。したがって、ここでは微視問題 $g(\tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{u}^1) = 0$ を巨視変位勾配と微視変位の陰関数として解釈し、陰関数の定

理²を用いて、厳密な意味での接線係数により $\partial u^1 / \partial \tilde{H}$ すなわち特性変位関数 χ は

$$\chi = -\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{H}} \quad (24)$$

$$= (Dg \cdot \Delta u^1)^{-1} \otimes (Dg \cdot \Delta \tilde{H})$$

により表される。これより、式 (21) は以下のように表される。

$$DF^0 \cdot \Delta u^0 = \{I - \nabla_Y \chi\} : \Delta \tilde{H} \quad (25)$$

次に、解析アルゴリズムは以下ようになる。

1. 巨視スケールでの各物性評価点 (Gauss 点) において、式 (24) により、特性関数 χ を求める。
2. 1. で求めた χ および線形化された巨視スケール釣合式 (19) を用いて巨視スケール釣合式 (14) を満たす u^0 を繰り返し計算により求める。
3. 2. で求めた u^0 を既知量として、線形化された微視スケール釣合式 (17) を用いて微視スケール釣合式 (14) を満たす u^1 を繰り返し計算により求める。
4. 得られた u^0, u^1 に対し、巨視スケール釣合式 (14) により収束判定を行い、収束条件が満たされていない場合は 1. ないし 2. に戻る。

4. ミクロスケール問題のブロック対角化

対称性を有する構造の (接線) 剛性マトリクスは、その対称性を表す群の既約表現により決定される適当な座標変換によりブロック対角形に変換できることが、群論的分岐理論により明らかにされている^{12),13)}。ここでは、複数の単位周期構造 (セル) からなるユニットセルを、前節で導いたミクロスケール問題の対象とし、その接線剛性マトリクスに文献¹³⁾の結果をセル単位の対称性に着目して適用し、単一セルのサイズのブロックへブロック対角化する方法を述べる。ブロック対角化は、後述する分岐モードの推定に必要不可欠なものである。一次元の周期性を有する微視構造への適用を示した後、その多次元への一般化を試みる。

4.1 一次元周期構造

図-3 に示すある一方向に N 個のセルからなるミクロスケール問題を考える。ただし、以下のブロック対角化の議論を簡潔にするために、 N は偶数に限定する³。こ

² x, y の陰関数 $F(x, y) = 0$ を満たす点の近傍において $y = f(x)$ が存在し、その導関数は以下の式で与えられる。

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

³ 後述するように、本論文では $N \rightarrow \infty$ において生じる分岐パターンを求めるのが目的である。例えば、 N_1 個および N_2 個のセルからなるユニットセルは、 $N_1 \times N_2$ 個のセルからなるユニットセルに含まれるため、 N を偶数としても一般性を損なうことはない¹¹⁾。

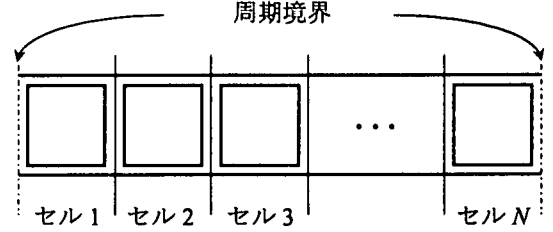


図-3 N 個の単位周期構造からなる一次元周期構造

の釣合式 (13) が

$$g^{(N)}(U, f) = 0 \quad (26)$$

のように離散化されたとする。ここに、 $g^{(N)}$ は節点力ベクトル、 U は節点変位ベクトル、 f は巨視スケールでの変形を表すパラメタであり、ミクロスケール問題では形式的に荷重パラメタとみなすことができる。 $K^{(N)} = \partial g^{(N)} / \partial U$ を接線剛性マトリクスとすれば、釣合式の増分形は

$$K^{(N)} \Delta U = R \quad (27)$$

と表される。ここに、 ΔU は節点変位増分ベクトル、 R は釣合式 $g^{(N)}$ の残差ベクトルである。有限要素法のような局所的な近似関数による離散化を前提とすれば、図-3 のような周期構造の増分釣合式は次式のような形で表される。

$$\begin{Bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \ell & & \ell^T \\ \ell^T & k & & \ell \\ & & \ddots & \ddots \\ \ell & & \ell^T & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^1 \\ \Delta u^2 \\ \vdots \\ \Delta u^N \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここに、 r^i 、 Δu^i は i 番目のセルに属する自由度の残差ベクトル、増分変位ベクトルであり、 k は単一の周期構造内における接線剛性マトリクス、 ℓ は隣接するセル間のインターアクションを表す接線剛性マトリクスであり、一般的に k に比較して非常にスパースなマトリクスである。単一の単位周期構造の独立な自由度数を m で表せば、両マトリクスは $m \times m$ の大きさを持つ。

図-3 のような周期構造において重要なことは、基本周期構造の長さ⁴の並進 r 、および系の中心に関する鏡映 s に対しての不変性を持つことである。すなわち、この系は D_N 不変である。ここに、 D_N は位数 N の二面体群であり、次式で定義される。

$$D_N = \{e, r, r^2, \dots, r^{N-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{N-1}\} \quad (29)$$

ここに、 $r^N = s^2 = (sr)^2 = e$ であり、元 e は単位元であり、恒等変換を意味する。

群 D_N の元 g による変換の表現を $T(g)$ と表すとすれ

⁴ n 次元空間においては、長さ⁵と方向を持ち、群論¹⁶⁾(空間群)では基本並進ベクトルと呼ばれる。

ば, $T(r)$ および $T(s)$ はそれぞれ

$$T(r) = \begin{bmatrix} & & & & I \\ & & & I & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & I \\ I & & & & & \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} & & & & I \\ & & & I & \\ & & & & \ddots \\ & & I & & \\ I & & & & \end{bmatrix} \quad (31)$$

と表される⁵. ここに, I は次数 m の単位マトリクスである. 微視スケールの釣合式は群 D_N に属する変換 g に関する対称性を有する, すなわち, D_N -同変条件

$$T(g)g^{(N)}(U, f) = g^{(N)}(T(g)U, f) \quad \forall g \in D_N \quad (32)$$

を満足する. したがって, その接線剛性マトリクス $K^{(N)}$ も, 同様の対称性を有しており, 以下の式が成り立つ.

$$T(g)K^{(N)} = K^{(N)}T(g) \quad \forall g \in D_N \quad (33)$$

先に示した不変性により, 接線剛性マトリクスは, 以下に示す直交変換

$$H = [h_{N+}, h_{N/2-}, h_{1+}, h_{1-}, \dots, h_{N/2-1+}, h_{N/2-1-}] \quad (34)$$

を用いてブロック対角化できる¹¹⁾. ここに, $N+$, $N/2-$, $1+$, $1-$, $\dots$, $N/2-1+$, $N/2-1-$ はそれぞれ各ブロックに対応し⁶, h_{N+} , $h_{N/2-}$, h_{j+} , h_{j-} は各ブロックの張る空間の基底ベクトルを並べたものであり, それぞれ

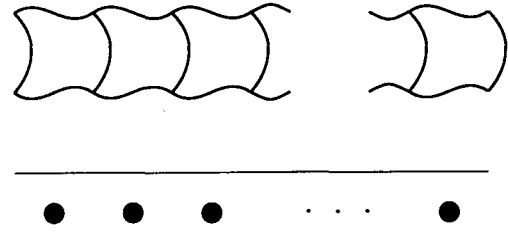
$$h_{N+}^T := \frac{1}{\sqrt{N}} \{I, I, \dots, I\} \quad (35)$$

$$h_{N/2-}^T := \frac{1}{\sqrt{N}} \{I \cos \pi, I \cos 2\pi, \dots, I \cos N\pi\} \quad (36)$$

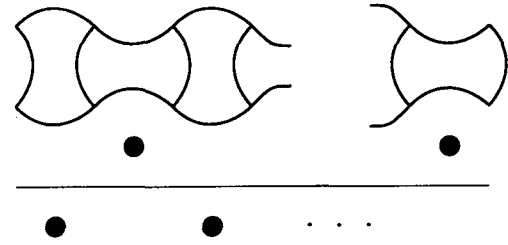
$$h_{j+}^T := \frac{2}{\sqrt{N}} \left\{ I \cos \frac{j\pi}{N}, I \cos \frac{3j\pi}{N}, \dots, I \cos \frac{(2N-1)j\pi}{N} \right\} \quad (37)$$

$$h_{j-}^T := \frac{2}{\sqrt{N}} \left\{ I \sin \frac{j\pi}{N}, I \sin \frac{3j\pi}{N}, \dots, I \sin \frac{(2N-1)j\pi}{N} \right\} \quad (38)$$

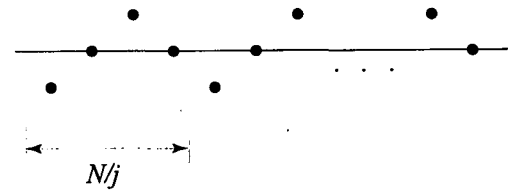
と定義される. これらの直交変換により得られる接線剛



(a) h_{N+} が表す変形モード



(b) $h_{N/2-}$ が表す変形モード



(c) h_{j+} が表す変形モード

図-4 各固有ブロック h の表す変形モードの模式図

性マトリクスのブロック対角形は

$$H^T K^{(N)} H = \begin{bmatrix} \lambda_N^{(N)} & & & & \\ & \lambda_{N/2}^{(N)} & & & \\ & & \lambda_1^{(N)} & & \\ & & & \lambda_1^{(N)} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_{N/2-1}^{(N)} \\ & & & & & & \lambda_{N/2-1}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (39)$$

である. ここに, $\lambda_N^{(N)}$, $\lambda_{N/2}^{(N)}$, $\lambda_j^{(N)}$ は $m \times m$ のマトリクスであり $j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$ に対して, 次式で与えられる.

$$\lambda_N^{(N)} = k + (\ell + \ell^T) \quad (40)$$

$$\lambda_{N/2}^{(N)} = k - (\ell + \ell^T) \quad (41)$$

$$\lambda_j^{(N)} = k + \cos \frac{2\pi j}{N} (\ell + \ell^T) \quad (42)$$

式 (35)~(38) により定義される各ブロックは, それぞれ D_N の部分群に対応する. 例えば, h_{N+} は D_N ,

⁵ ここでの鏡映 s とは, その定義式 (31) から明らかなように, 単位周期構造の配置に関する鏡映を意味する. つまり, 通常の空間における鏡映とは異なり, 単位周期構造そのものの鏡映は含まない, 置換に近い考え方を取る.

⁶ $N+$, $N/2-$ は群 D_N の 1 次既約表現に対応し, $1, \dots, N/2-1$ は 2 次元既約表現に対応し, 2 次既約表現には 2 個のブロックが対応する¹³⁾.

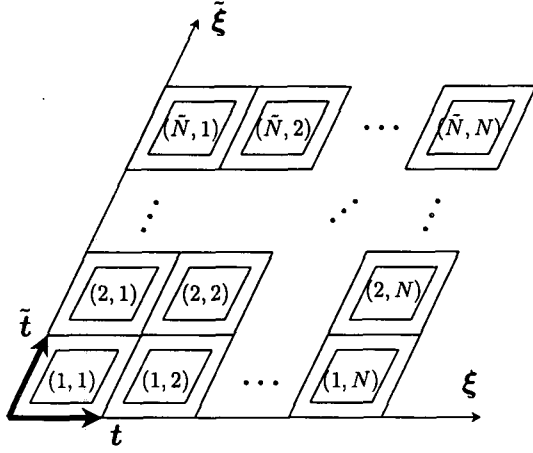


図-5 $N \times \tilde{N}$ 個の単位周期構造からなる二次元周期構造

$h_{N/2-}$ は $D_{N/2}$, h_{j+} は $D_{\gcd(j,N)}$ に対応する⁷. ここに, $\gcd(j,N)$ は j と N の最大公約数である. また, このことを模式図で表せば図-4に示すように, h_{N+} はすべて同位相で周期 1, $h_{N/2-}$ は一つおき, すなわち周期 2, h_{j+} は周期 $\gcd(j,N)$ の変形モードを表す. 同図においてセルの模式図の下の方の (●) は, その点のセルの, ある変形モードに対する振幅を表している. これらのことは, その定義式 (35)~(38) から確認できる.

4.2 多次元周期構造

ここでは, 図-5 に示す二次元周期構造を例として, 前節で行ったブロック対角化の多次元周期構造への適用を考える. この周期構造は $D_N \times \tilde{D}_{\tilde{N}}$ 不変であり, その対称性は 2 つの群 D_N と $\tilde{D}_{\tilde{N}}$ のテンソル積の形に表せる. ここに, D_N は式 (29), $\tilde{D}_{\tilde{N}}$ は

$$\tilde{D}_{\tilde{N}} = \{e, \tilde{r}, \tilde{r}^2, \dots, \tilde{r}^{N-1}, \tilde{s}, \tilde{s}\tilde{r}, \tilde{s}\tilde{r}^2, \dots, \tilde{s}\tilde{r}^{N-1}\} \quad (43)$$

で定義される. ただし, $r, \tilde{r}$ はそれぞれ基本並進ベクトル $t, \tilde{t}$ に関する並進を表し, $s, \tilde{s}$ はそれぞれ微視構造の中心を通り $\xi, \tilde{\xi}$ 軸に垂直な軸に関する鏡映を表す. つまり, 群のテンソル積の構造により¹⁶⁾ 図-5 の周期構造に関しては, $\tilde{\xi}$ 方向に関する式 (34) と同様の直交変換を行えば, 前節でブロック対角化された $\lambda_N^{(N)}$, $\lambda_j^{(N)}$, $\lambda_{N/2}^{(N)}$ はそれぞれさらにブロック対角化される. 式 (34)

に相当する直交変換を $\tilde{H}$ とすれば, 例えば $\lambda_j^{(N)}$ は

$$\tilde{H}^T \lambda_j^{(N)} \tilde{H} = \begin{bmatrix} \lambda_{\tilde{N}j}^{(\tilde{N}N)} & & & \\ & \lambda_{N/2,j}^{(\tilde{N}N)} & & \\ & & \lambda_{1j}^{(\tilde{N}N)} & \\ & & & \lambda_{1j}^{(\tilde{N}N)} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_{\tilde{N}/2-1,j}^{(\tilde{N}N)} \\ & & & & & & \lambda_{\tilde{N}/2-1,j}^{(\tilde{N}N)} \end{bmatrix} \quad (44)$$

と変換される. 上式のように, ブロック対角化された $\lambda_{i,\bullet}^{(N)}$ の各ブロックを $\lambda_{i,\bullet}^{(\tilde{N}N)}$ と表せば, それらは以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} \lambda_{\tilde{N}N}^{(\tilde{N}N)} &= k + (\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) + (\ell + \ell^T) \\ \lambda_{iN}^{(\tilde{N}N)} &= k + \cos \frac{2\pi i}{\tilde{N}} (\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) + (\ell + \ell^T) \\ \lambda_{\tilde{N}j}^{(\tilde{N}N)} &= k + (\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) + \cos \frac{2\pi j}{N} (\ell + \ell^T) \\ \lambda_{ij}^{(\tilde{N}N)} &= k + \cos \frac{2\pi i}{\tilde{N}} (\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) + \cos \frac{2\pi j}{N} (\ell + \ell^T) \\ &\text{for } i = 1, 2, \dots, \tilde{N}/2 \text{ and } j = 1, 2, \dots, N/2 \end{aligned} \quad (45)$$

特に, $i = \tilde{N}/2, j = N/2$ に対しては

$$\lambda_{\tilde{N}/2,N/2}^{(\tilde{N}N)} = k - (\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) - (\ell + \ell^T) \quad (46)$$

となる. ここに, $\tilde{\ell}$ は $\tilde{\xi}$ 方向に隣接するセル間のインターアクションを表す接線剛性マトリクスである.

本節で述べた方法を繰り返し用いることにより, 任意の多次元周期構造の接線剛性マトリクスを単位周期構造のサイズのブロックにブロック対角化することが可能となる.

5. ブロック対角化を用いた分岐モードの推定

先に述べた Γ -収束論では, 式 (6) に表されるように, 微視構造としてのユニットセルに含まれるべき単位周期構造の数 k が, その均質化ひずみエネルギー $\mathcal{W}_{\text{hom}}$ を極小化するように決定されなければならないことが明らかにされている¹⁰⁾. しかし, ある微視構造に対して含まれるべき単位周期構造の数についての議論はなされていない. 一方で, 冒頭でも述べたように, 微視構造における分岐経路上の変形モードは, それが持つ周期性, すなわち単位周期構造の数により制約を受けることは自明である. この点に着目し, 先に示したブロック対角化を用いて, 無限の周期性を持つ微視構造において起こりうる分岐モードを求めることにより, 上記の未解決問題を解決する方法を以下に提案する.

⁷ 厳密な議論と詳細は文献^{12),13)}などを参照されたい.

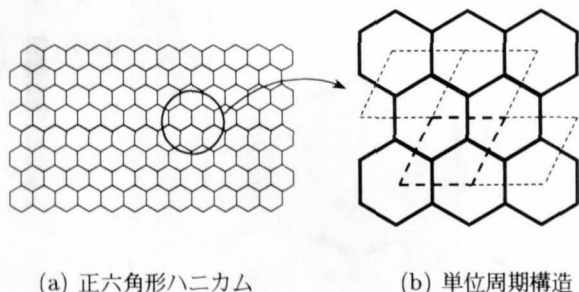


図-6 解析対象: 正六角形ハニカム

先に述べたブロック対角化により, 分岐モードを求めるための接線剛性マトリクス $\mathbf{K}$ の固有値解析は, 対角化された各ブロック λ に対して行えばよいことになる. 固有値解析の計算効率において, ブロック対角化の有効性は従来から示されている^{12),13)}が, やはり, 現実的に計算しうる $N, \tilde{N}, \dots$ の大きさには限界があることには代わりはない. したがって, ここでは, $\tilde{\theta} = i/\tilde{N}$, $\theta = j/N$ などとおき, 例えば二次元問題において

$$\lambda_{\tilde{\theta}\theta} := \mathbf{k} + \cos 2\pi\tilde{\theta}(\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^T) + \cos 2\pi\theta(\ell + \ell^T) \quad (47)$$

を定義し, 考えている载荷経路上で $0 < \theta, \tilde{\theta} \leq 1/2$ において最初に固有値が負になる $\theta, \tilde{\theta}$ の組み合わせを, 範囲内を適当にサンプリングし, 内挿により推定する. ただし, $\lambda_N^{(N)}$, $\lambda_{\tilde{N}\tilde{N}}^{(\tilde{N}\tilde{N})}$ は $\theta = \tilde{\theta} = 1$ に相当するが, これらの対角化されたブロックに対応するブロック $\mathbf{h}$ は, 先にも述べたように全ての単位周期構造が同位相で変形するモードであり, この場合は単位周期構造の数 k は 1 でよいことになるが, $k \geq 2$ のユニットセルは $k = 1$ の分岐モードを常に含むため, 問題はない. したがって, ここでは $k \geq 2$ と考え, $\theta, \tilde{\theta}$ の領域を決定した.

上記のような $\theta, \tilde{\theta}, \dots$ の組み合わせが求められれば, 相当する $i, j, \dots, N, \tilde{N}, \dots$ およびそれに対応するブロック $\mathbf{h}$ の持つ対称性から, $N/\gcd(j, N) \times \tilde{N}/\gcd(i, \tilde{N}) \times \dots$ 個の単位周期構造を微視構造として考えればよいことになる.

6. セル構造体の分岐解析

前節までに示した, 非凸ポテンシャルの大変形均質化法の定式化と, ブロック対角化による分岐モードの推定法の有効性を示すため, 以下に述べるセル構造体の分岐解析を行った. セル構造体は, 軽量かつ高剛性, 高いエネルギー吸収性能といった利用価値の高い力学的特徴を有しており, さまざまな分野で利用されている. そのため, 古くから場の平均化理論を用いた等価弾性, 梁理論による座屈荷重に関する解析的な研究, あるいは実験的な研究も数多く行われてきた^{1),17),18),19)}.

ここでは, セル構造体の代表的な例である図-6(a)に示す正六角形平面ハニカムの一軸および二軸圧縮につい

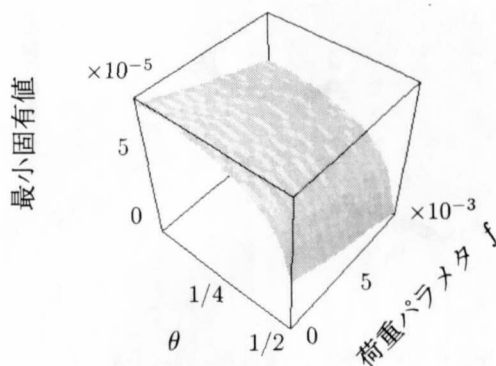


図-7 対角化されたブロック λ_θ の最小固有値

て解析を行った^{2),8)}. 図-6(b)において, 破線で囲まれた領域がこのセル構造体の単位周期構造である. 一辺の長さ ℓ に対する壁の厚さ h の比は $h/\ell = 0.11$ とした. また, セルを構成する材料は, 第二 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみが Young 率 $E = 1$, Poisson 比 0.3 の微小ひずみ線形弾性体における応力とひずみの関係と同様の関係にある超弾性体 (St.Venant 材料) とした.

ここで示す解析は, 文献²⁾と同様微視構造に関する結果であるが, 文献²⁾では巨視ひずみ制御を行っているので, ミクロスケール問題のみを解析していた. これに対し, ここでは巨視応力制御で圧縮を行っているため, 前述の特性関数を用いたマクロ接線剛性の評価が必須であり, いわばマクロ的な一物質点におけるマルチスケール解析とも言える.

一軸圧縮

まず, ハニカムの一軸圧縮, すなわちマクロ応力 $\mathbf{S}^H := \langle \mathbf{S}^0 \rangle_{kY}$ が

$$\mathbf{S}^H = f \mathbf{S}_{uc} = f \{0, -1, 0\}^T \quad (48)$$

で与えられるような応力経路での解析結果を示す. ここに, f は荷重パラメタ, $\mathbf{S}_{uc}$ は荷重パターンベクトルである. この一軸圧縮については, 文献²⁾より, 一次元周期構造と考え, 解析を行った.

図-7に, 式(47)で定義される対角化されたブロック λ_θ の最小固有値を θ と荷重パラメタ f に対して示す. この図より, $\theta = 1/2$ に対応する $\lambda_{1/2}$ の最小固有値が最初に負となることが分かる. したがって, この载荷経路に関しては, ユニットセルに含まれるべき単位周期構造の数 k は 2 とすれば良いと言える.

ユニットセルの座屈後の実変形および応力分布は図-8に示した. 図中, 濃淡は $\mathbf{S}^0$ の第二不変量 S_e の大きさを表す.

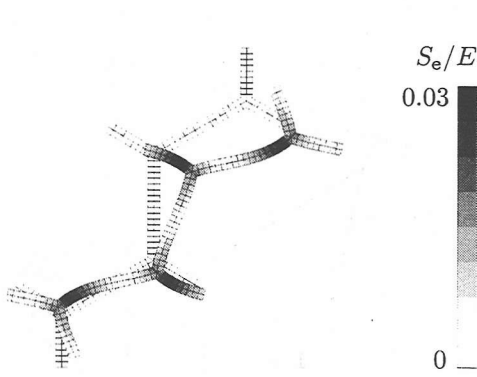


図-8 座屈後の変形形状: 一軸圧縮, 2×1 正六角形ハニカム

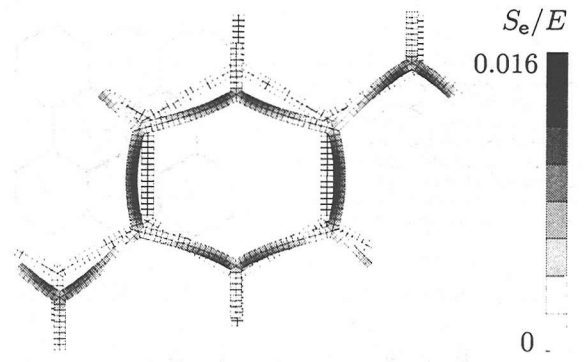


図-10 座屈後の変形形状: 二軸圧縮, 2×2 正六角形ハニカム

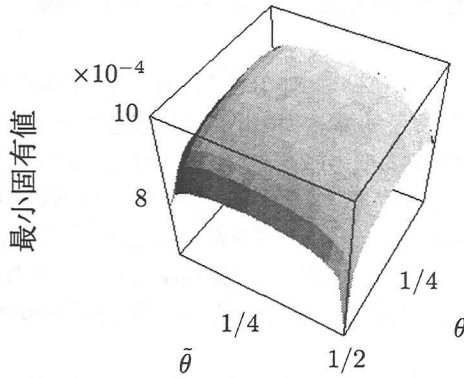


図-9 対角化されたブロック $\lambda_{\tilde{\theta}\theta}$ の最小固有値

等方二軸圧縮

荷重パターンベクトル S_{bc} を用いて, 応力経路を

$$S^H = f S_{bc} = f \{-1, -1, 0\}^T \quad (49)$$

とし, 等方二軸圧縮を行った. 図-9 に, 第一分岐点近傍でのブロック $\lambda_{\tilde{\theta}\theta}$ の最小固有値を $\tilde{\theta}$ および θ に対して示す. この図から, $\theta = \tilde{\theta} = 1/2$ に対応するブロック $\lambda_{1/2, 1/2}$ の最小固有値が最初に負となることが分かる. したがって, この载荷経路に関しては, ユニットセルに含まれるべき単位周期構造の数 k は 2, すなわち 2×2 の単位周期構造を考えれば良いことになる. また, 座屈後の変形形状を図-10 に示す.

以上から, このハニカム構造の一軸圧縮, 等方二軸圧縮に関しては, その微視構造として 2×2 のセルを用いればよいことが結論付けられる. ここでは 2 種類の応力経路のみ取り上げたが, 他の载荷経路についても同様の方法でセルの数を決定することができる.

また, 得られた巨視応力 - ひずみ関係を図-11 に示す. 図において, 縦軸は無次元化巨視応力成分, 横軸は巨視変位勾配成分を表す. ここに, $u_{i,j} := \langle \partial u_i^0 / \partial X_j \rangle_{k,Y}$ である. 図において, それぞれの曲線が急変している点, 微視構造であるセルの座屈点であり, 微視的な構造不安定と, 巨視的な材料不安定の関係を表している. 図-8, 10 に示したこれらに対応した座屈パターンは,

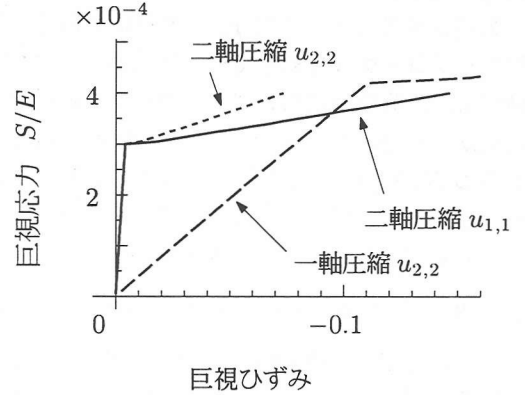


図-11 巨視応力 - 巨視ひずみ関係

それぞれの载荷経路における Gibson and Ashby¹⁾らのゴムハニカムの実験と一致している.

7. おわりに

非凸ポテンシャル問題の非線形均質化法において未解決であったミクロスケール問題に含まれるべき単位周期構造の数を決定するための方法を示した.

まず, この問題の定式化に対する問題点を指摘し, 一般化収束論から得られる結果を利用した定式化の概要を示した. 次に, 群論的分岐理論に基づき, その増分釣合式をブロック対角化する方法を示した. 本手法は, このブロック対角化法を用いて, 分岐モードを推定し, 微視構造が持つ対称性をその分岐モードを拘束しないように決定するものである.

数値例として, 正六角形ハニカムを取り上げ, ユニットセルに含まれるべき単位周期構造の数を明らかにした. この問題は微視構造固有の議論であるが, 本論文で提案する微視構造が持つべき周期性を決定する方法論は任意の微視構造について適用可能である.

本研究の成果により, これまで経験的にしか取り扱うことのできなかった材料不安定問題に対して, 微視構造の不安定を加味したマルチスケールモデリングの適用性が示された.

謝辞：本研究のために，東京大学地震研究所地震予知情報センターの計算機システムを利用させて頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge, 1997.
- 2) 斉木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏：セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察，応用力学論文集，Vol.2, pp.287-294, 1999.
- 3) Bensoussan, A., Lions, J.-L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, 1978.
- 4) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 5) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 6) Miehe, C., Schroder, J. and Schotte, J.: Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.171, pp.387-418, 1999.
- 7) 寺田賢二郎, 菊池 昇：非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム，土木学会論文集，No.633/I-49, pp.217-229, 1999.
- 8) 大野信忠, 奥村 大：更新ラグランジュ形式による有限変形の均質化法の定式化について，第49回理論応用力学講演会講演論文集，pp.47-48, 2000.
- 9) Hornung, U.(ed.): *Homogenization and Porous Media*, Springer, New York, 1997.
- 10) Müller, S.: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. rat. mech. anal.*, 99, pp.189-212, 1987.
- 11) Oguni, K., Hori, M. and Ikeda, K.: Analysis on evolution pattern of periodically distributed defects, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.3259-3272, 1997.
- 12) Zloković, G.: *Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- 13) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.12, pp.273-297, 1991.
- 14) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithm for nonlinear multi-scale analyses for heterogeneous media, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* (to be appeared).
- 15) Terada, K., Saiki, I. and Matsui, K.: Kinematically correct formulation for two-scale finite deformation problems, *Transactions of JSCEs*, Vol.2, pp.53-62, 2000.
- 16) 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝：応用群論(増補版), 裳華房, 1980.
- 17) Gent, N. and Thomas, A.G.: The deformation of foamed elastic materials, *J. Appl. Polymer Science*, Vol.1, pp.107-113, 1959.
- 18) Chapman, A.M. and Higdon, J.J.L.: Effective elastic properties for a periodic bicontinuous porous medium, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42, No.2, pp.283-305, 1994.
- 19) Warren, W.E., Kraynik, A.M. and Stone, C.M.: A constitutive model for two-dimensional nonlinear elastic foams, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, No.6, pp.717-733, 1989.

(2000年4月21日受付)