

固有関数展開法による横等方性矩形厚板の衝撃応答解析

Impact Response Analysis of A Transversely Isotropic, Thick Rectangular Plate
by the Method of Eigenfunction Expansion

小林 治俊*, 須方 大介**

Harutoshi KOBAYASHI and Daisuke SUKATA

*正会員 工博 大阪市立大学工学部土木工学科 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

**正会員 修士(工学) 川崎重工業(株) 機械・鉄構事業本部 (〒278-8585 千葉県野田市二ツ塚 118)

This paper presents the method of eigenfunction expansion to the impact response analysis of a transversely isotropic, thick rectangular plate with simply supported conditions, based on the theory of elastodynamics. The elastodynamic solution is decomposed into their quasi-static and dynamic components. The quasi-static solution is obtained by an exact analysis of the quasi-differential equations with the time-dependent boundary conditions under the given impact pressure loading. The dynamic part is given in an infinite series of the eigenfunctions (normal modes) which are derived from the free vibration analysis of the associated problem satisfying homogeneous boundary conditions. Stresses and displacements responses at transient and long-time states are shown graphically, and then influences of anisotropy on the dynamic response are revealed.

Key words : impact, stress wave, transverse isotropy, thick plate, eigenfunction expansion, elastodynamics

1. はじめに

衝撃荷重を受ける異方性有限体の波動伝播特性に関する研究は、近年の複合材料力学の進展とともに複合材料の広範な工学分野への適用によりますますその重要性が増している。したがって、異方弾性体の波動伝播を解析的に取り扱う方法を示すとともに弾性域ではあるが正確な衝撃応答特性を示しておくことは、材料特性や衝撃破壊現象の解明に関連するとともに各種の近似解法による解析結果のベンチマークとしても重要であると考えられる。しかしながら、これまで異方性板を対象に衝撃応答解析を行った研究は数少ない。例えば Chang-Sun [1] は、平面応力あるいは平面ひずみ状態での直交異方性板を対象に空間および時間変数の双方を差分近似して解析する方法を示し、単一および双対の集中荷重の元での変位応答解を実験結果と比較している。また Weaver ら[2] は表面に集中パルス荷重を受ける横等方性無限板を取り扱い、空間変数に対してハンケル変換そして時間変数に対してラプラス変換を適用して像空間での解を求めるとともに、ラプラス逆変換には高速フーリエ変換 (FFT) を用いて数値逆変換し、変位応答解を求めている。両研究は acoustic emission に動機付けられたものであり、解析結果は変位応答に留まり、衝撃破壊に関連する応力の応答については何ら示していない。

さて、衝撃問題(波動伝播問題)を動弾性論に基づき解析的に取り扱う手法としては主に 3 つあり、これらは相互にラプラス変換法に関連し合っ

ている[3]。第 1 の方法は積分変換法であり、時間や空間変数の消去法としてのラプラス変換、フーリエ変換などを使用する方法である。一般に変換された像空間の解式は複雑であり、それらの逆変換を解析的に行うには困難を伴う。ラプラス逆変換に関しては、衝撃点より遠方の観測点での応答を求める場合には漸近展開による近似解によることが多いが留数定理の適用により遠・近点の双方に適用できる正確解を求めることができる。その結果は自由振動問題の振動モード関数(固有関数)よりなる級数解が求められる。第 2 の方法は一般化波線理論(Generalized ray theory)によるものであり、これはラプラス像空間での解式を衝撃点から観測点に直接到達する応力波や境界において幾度か反射を繰り返して到達する応力波を表す ray 積分と称する成分に分離する方法である。本法はごく短時間内の応答は高精度で求められるが、遠方の観測点や長時間帯の応答を計算するには数多くの ray 積分が必要である。第 3 の固有関数展開法は、Reismann [4]によって定式化され、先に記したようにラプラス変換と留数定理を用いて正確解が固有関数よりなる級数解として求められることに着目して、ラプラス変換を使用することなく解析当初より固有関数を適用する方法である。すなわち解を慣性力が影響しない部分と慣性力の影響を受ける部分に分解して、後者に固有関数を適用するものである。したがって、構造物の動的解析に用いられるいわゆるモード法と同一の解析過程を経て弾性体の波動伝播解析が行える利点がある。

著者らの一人はこの固有関数展開法を等方性か

らなる平板や多層板の衝撃応答解析に適用するとともに、横等方性円板や平面ひずみ状態の横等方性板の衝撃応答解析に適用し、板厚方向の応力をはじめとする弾性衝撃挙動を明らかにした[5,6]。最近 Lange-Bottega[7]も等方性からなる多層無限板の衝撃応答解析に固有関数展開法を適用しているが、解析結果は変位応答が主であり板厚方向の応力については何ら言及していない。

本研究では三次元動弾性論に基づき、固有関数展開法により横等方性矩形板の衝撃応答解析を行う方法を示すとともに、材料定数が応答に及ぼす影響および応力波伝播特性を検討する。

2. 基礎式

本文で取り扱う横等方性矩形厚板とその座標系を図-1に示している。矩形板の辺長を a, b 、板厚を h とし、 $x=0, a$ および $y=0, b$ の4辺で単純支持されているものとする。また異方軸を z 軸、 $x-y$ 面を等方面にとる。荷重は空間関数 $q(x, y)$ と時間関数 $f(t)$ の積により $q(x, y, t) = q(x, y)f(t)$ のように表わされ、 $x_0 \times y_0$ の載荷面に作用する。

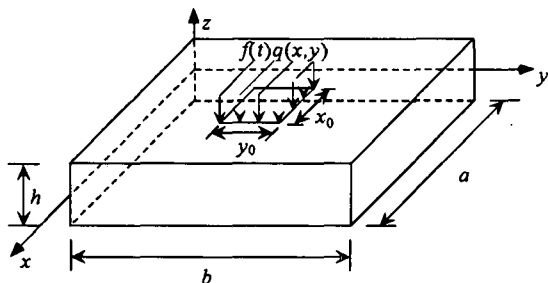


図-1 矩形板の座標系

座標 x, y, z 方向の変位をそれぞれ $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$ 、 $w(x, y, z, t)$ 、材料定数を C_{ij} とすれば、横等方性体の応力-変位関係式[8]は以下になる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_y &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} &= C_{44} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= C_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

ただし $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ の関係がある。また、運動方程式は密度を ρ とすると

$$\begin{aligned}L_u(u, v, w) &= \rho \ddot{u}, \quad L_v(u, v, w) = \rho \ddot{v}, \\ L_w(u, v, w) &= \rho \ddot{w},\end{aligned}\quad (2)$$

ここにドットは時間 t に関する微分($\dot{} = \partial/\partial t$)を意味し、また $L_u(u, v, w)$ 、 $L_v(u, v, w)$ 、 $L_w(u, v, w)$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}L_u(u, v, w) &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\quad + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ L_v(u, v, w) &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ L_w(u, v, w) &= (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \\ &\quad + C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (3)$$

次に単純支持条件は

$$\begin{aligned}w = v = \sigma_x &= 0 \quad (x=0, a) \\ w = u = \sigma_y &= 0 \quad (y=0, b)\end{aligned}\quad (4)$$

であり、平板の上下面での境界条件は

$$\begin{aligned}\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} &= 0 \quad (z=-h/2) \\ \sigma_z = -q(x, y)f(t), \tau_{zx} = \tau_{zy} &= 0 \quad (z=+h/2)\end{aligned}\quad (5)$$

で与えられる。応答開始前に矩形板は静止状態にあるものとすれば、初期条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}u = v = w &= 0 \quad (t=0) \\ \dot{u} = \dot{v} = \dot{w} &= 0 \quad (t=0)\end{aligned}\quad (6)$$

なお外荷重のフーリエ級数展開は

$$q(x, y, t) = f(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (7)$$

である。ただし

$$\begin{aligned}q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy \\ \alpha_m &= m\pi/a, \beta_n = n\pi/b \quad (m, n=1, 2, 3, \dots)\end{aligned}\quad (8)$$

3. 衝撃応答解析

運動方程式(2)の解を慣性力の影響を受けない部分と受ける部分に分離して次のようにとる。

$$\begin{aligned}u &= u^s(x, y, z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl}(x, y, z) \\ v &= v^s(x, y, z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) V_{mnl}(x, y, z) \\ w &= w^s(x, y, z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) W_{mnl}(x, y, z)\end{aligned}\quad (9)$$

すなわち、 u^s, v^s, w^s は式(2)で慣性項を無視した場合の準静的解であり、つり合い式：

$$L_u(u^s, v^s, w^s) = 0, \quad L_v(u^s, v^s, w^s) = 0, \quad L_w(u^s, v^s, w^s) = 0 \quad (10)$$

および境界条件：

$$\begin{aligned} w^s &= v^s = \sigma_x^s = 0 & (x=0, a) \\ w^s &= u^s = \sigma_y^s = 0 & (y=0, b) \\ \sigma_z^s &= \tau_{zx}^s = \tau_{zy}^s = 0 & (z=-h/2) \\ \sigma_z^s &= -q(x, y)f(t), \quad \tau_{zx}^s = \tau_{zy}^s = 0 & (z=+h/2) \end{aligned} \quad (11)$$

を満足する。ただし、応力は式(1)を参照して、

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= C_{11} \frac{\partial u^s}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v^s}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\ \tau_{zy}^s &= C_{44} \left(\frac{\partial v^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

などで与えられる。

一方、式(9)の右辺の級数を本文では擾乱解と呼び、 $U_{mnl}(x, y, z)$, $V_{mnl}(x, y, z)$, $W_{mnl}(x, y, z)$ は固有関数（振動モード関数）、 $Q_{mnl}(t)$ は未定の時間関数（一般化座標）、また m, n, l はそれぞれ座標 x, y, z 方向のモード次数である。固有関数は、 ω_{mnl} を固有円振動数、 $i = \sqrt{-1}$ として、

$$(u, v, w)_{mnl} = (U, V, W)_{mnl} \exp(i\omega_{mnl}t) \quad (14)$$

とおき、式(2)に代入したのち時間項を省略した自由振動問題のつり合い式：

$$\begin{aligned} L_u(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho\omega_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_v(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho\omega_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_w(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho\omega_{mnl}^2 W_{mnl} \end{aligned} \quad (15)$$

および境界条件：

$$\begin{aligned} W_{mnl} &= V_{mnl} = \sigma_x^{(mnl)} = 0 & (x=0, a) \\ W_{mnl} &= U_{mnl} = \sigma_y^{(mnl)} = 0 & (y=0, b) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_z^{(mnl)} = \tau_{zx}^{(mnl)} = \tau_{zy}^{(mnl)} = 0 \quad (z = \pm h/2) \quad (17)$$

を満足する。応力のモード式は式(1)を参照して、

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(mnl)} &= C_{11} \frac{\partial U_{mnl}}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial V_{mnl}}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial W_{mnl}}{\partial z} \\ \tau_{zy}^{(mnl)} &= C_{44} \left(\frac{\partial V_{mnl}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mnl}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

などで与えられる。固有関数には相反定理より求められる次の直交性がある。

$$\int_V (U_{mnl} U_{ijk} + V_{mnl} V_{ijk} + W_{mnl} W_{ijk}) dV = \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{lk} N_{mnl}^2 \quad (19)$$

ただし $\delta_{mi}, \delta_{nj}, \delta_{lk}$ はクロネッカーのデルタ、 N_{mnl} はノルムであり、積分は矩形板全体に行う。

以上のように衝撃応答解から分離させた準静的解と擾乱解を規定するそれぞれの境界条件式(11), (12)および式(16), (17)の和によって衝撃問題の境界条件式(4), (5)が満たされていることは明らかで

ある。そこで未定の時間関数 $Q_{mnl}(t)$ を定めるために、式(9)をつり合いの式(2)に代入し、式(10), (15)を利用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) U_{mnl} &= -\ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) V_{mnl} &= -\ddot{v}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) W_{mnl} &= -\ddot{w}^s \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ をそれぞれ上式の第 1~3 式の両辺に乗じたのち 3 式を加え合わせ、それを矩形板全体にわたり積分する。そして、式(19)の固有関数の直交性を利用することより $Q_{mnl}(t)$ に関する微分方程式

$$\ddot{Q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) = \ddot{Z}_{mnl}(t) \quad (21)$$

を得る。ただし、

$$Z_{mnl}(t) = -\frac{1}{N_{mnl}^2} \int_V (u^s U_{mnl} + v^s V_{mnl} + w^s W_{mnl}) dV \quad (22)$$

である。式(21)の解は周知のように以下になる。

$$\begin{aligned} Q_{mnl}(t) &= Q_{mnl}(0) \cos \omega_{mnl} t + \frac{1}{\omega_{mnl}} \dot{Q}_{mnl}(0) \sin \omega_{mnl} t \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{mnl}} \int_0^t \ddot{Z}_{mnl}(\tau) \sin[\omega_{mnl}(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

積分定数 $Q_{mnl}(0), \dot{Q}_{mnl}(0)$ を決定するために、式(9)で $t=0$ とおき、初期条件の式(6a)を利用すれば、

$$\begin{aligned} u^s(x, y, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) U_{mnl}(x, y, z) \\ v^s(x, y, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) V_{mnl}(x, y, z) \\ w^s(x, y, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(0) W_{mnl}(x, y, z) \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。上式の第 1~3 式の両辺にそれぞれ $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ を乗じたのち 3 式を加え合わせる。そして矩形板全体に積分して固有関数の直交性を利用すると

$$Q_{mnl}(0) = Z_{mnl}(0) \quad (25)$$

を得る。同様にして

$$\dot{Q}_{mnl}(0) = \dot{Z}_{mnl}(0) \quad (26)$$

以上が固有関数展開法による定式化であり、以下の第 4, 5 節において、準静的解および固有関数の具体式を求める。

4. 自由振動解析・固有関数

固有関数 $U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}$ は、自由振動問題の振動

モード関数であり、式(15)～(17)より誘導する。そのためにはまず式(15)を非連成にする必要があり、Hu [9]の変位関数 ϕ^d, ψ^d を用いて変位を次のように表す。ただし、以下では断らない限り添字 m, n, l を省略する。

$$U = \frac{\partial^2 \phi^d}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi^d}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial^2 \phi^d}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi^d}{\partial x}$$

$$W = -\frac{1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \right] \phi^d \quad (27)$$

ここで、演算子 ∇_1^2 は

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (28)$$

である。式(27)を式(15)に代入すると、 ϕ^d, ψ^d に関して独立した次の偏微分方程式を得る。

$$\left[\left(C_{11} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \right) \left(C_{44} \nabla_1^2 + C_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \right) - (C_{13} + C_{44})^2 \nabla_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi^d = 0 \quad (29)$$

$$\left[C_{66} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \right] \psi^d = 0 \quad (30)$$

式(29), (30)の解を求めるにあたり、式(16)の単純支持条件を満たすように次のようにおく。

$$\phi^d(x, y, z) = \Phi^d(z) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (31)$$

$$\psi^d(x, y, z) = \Psi^d(z) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (32)$$

最初に式(31)を式(29)に代入して $\Phi^d(z)$ について整理すると次式を得る。

$$A \frac{d^4 \Phi^d}{dz^4} + B \frac{d^2 \Phi^d}{dz^2} + C \Phi^d = 0 \quad (33)$$

ただし、係数 A, B, C の内容は

$$A = C_{33} C_{44} > 0$$

$$B = (C_{33} + C_{44}) \rho \omega^2 + [C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) - C_{11} C_{33}] \gamma_{mn}^2$$

$$C = (\rho \omega^2 - C_{11} \gamma_{mn}^2)(\rho \omega^2 - C_{44} \gamma_{mn}^2) \quad (34)$$

であり、また

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \quad (35)$$

である。式(33)の解を求めるにあたり

$$\Phi^d(z) = \exp(pz) \quad (36)$$

とおけば、 λ に関する次の特性方程式を得る。

$$A p^4 + B p^2 + C = 0 \quad (37)$$

これは p^2 についての2次方程式と見なせ、その2根の種別は係数 A, B, C の値、すなわち材料定数 C_{ij} , γ_{mn} そして固有円振動数 ω に依存する。2次式の根の判別式を $D = B^2 - 4AC$ とすれば、 $A > 0$ は自明であるから、2根の種別と係数 B, C との関係は、(1) 2正根($D > 0, B < 0, C > 0$) ; (2) 1正根, 1負根($D > 0, C < 0$) ; (3) 2負根($D > 0, B > 0,$

$C > 0$) ; (4) 共役複素根($D < 0, C > 0$)となる。2根の種別が決まれば、式(37)の4根はこれに対応して、(1) 4実根, (2) 2実根, 2虚根, (3) 4虚根, (4) 2共役複素根となり、 $\Phi^d(z)$ の解形式も異なったものになる。このように根の種別には、 C の正負が深く関与しており、 C の正負と固有円振動数 ω の存在する領域との関係が式(34c)により次のように決まる。ただし、 $C_{11} > C_{44}$ 。

領域 I : $0 < \omega / \gamma_{mn} < \sqrt{C_{44} / \rho}$ ($C > 0$)

領域 II : $\sqrt{C_{44} / \rho} < \omega / \gamma_{mn} < \sqrt{C_{11} / \rho}$ ($C < 0$)

領域 III : $\sqrt{C_{11} / \rho} < \omega / \gamma_{mn}$ ($C > 0$)

ここでは4実根の場合のみその解形式を示すことにして式(37)を p^2 の2次式とみなした場合の2正根を p_1^2, p_2^2 とすると、式(33)の解は $A^d \sim D^d$ を積分定数として次式で与えられる。

$$\Phi^d(z) = A^d \cosh p_1 z + B^d \sinh p_1 z + C^d \cosh p_2 z + D^d \sinh p_2 z \quad (38)$$

一方、 $\Psi^d(z)$ については、式(32)と式(30)から次式を得る。

$$\frac{d^2 \Psi^d}{dz^2} - p_3^2 \Psi^d = 0, \quad (39)$$

$$p_3^2 = \frac{C_{66} \gamma_{mn}^2 - \rho \omega^2}{C_{44}} \quad (40)$$

この場合も p_3^2 の正負により2つの解形式を持つが、ここでも先と同様に p_3^2 が正值の場合について解式を示すことにすれば、次のようになる。ただし、 E^d, F^d は積分定数である。

$$\Psi^d(z) = E^d \sinh p_3 z + F^d \cosh p_3 z \quad (41)$$

以上により変位式は、まず式(38), (41)をそれぞれ式(31), (32)に代入したのち、それらを式(27)に代入することにより以下のように求められる。

$$U_{mnl} = [\alpha_m p_1 (A^d \sinh p_1 z + B^d \cosh p_1 z) + \alpha_m p_2 (C^d \sinh p_2 z + D^d \cosh p_2 z) - \beta_n (E^d \sinh p_3 z + F^d \cosh p_3 z)] \times \cos \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$V_{mnl} = [\beta_n p_1 (A^d \sinh p_1 z + B^d \cosh p_1 z) + \beta_n p_2 (C^d \sinh p_2 z + D^d \cosh p_2 z) + \alpha_m (E^d \sinh p_3 z + F^d \cosh p_3 z)] \times \sin \alpha_m x \cos \beta_n y$$

$$W_{mnl} = [\zeta_1 (A^d \cosh p_1 z + B^d \sinh p_1 z) + \zeta_2 (C^d \cosh p_2 z + D^d \sinh p_2 z)] \times \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (42)$$

ここに

$$\zeta_i = \frac{C_{11} \gamma_{mn}^2 - \rho \omega^2 - C_{44} p_i^2}{C_{13} + C_{44}} \quad (i = 1, 2) \quad (43)$$

である。また、応力式は式(42)を式(18)に代入することによりその具体式を求めることができる。

積分定数を決定するに際しては、 $z=0$ 平面に対称および逆対称変形問題に分けて取り扱うと都合がよい。よって式(17)の矩形板の上下面での境界条件式に応力式を代入すると、積分定数に関する次の連立同次方程式を得る。

$$\text{対称問題: } \mathbf{C}_S[A^d, C^d, E^d]^T = 0 \quad (44)$$

$$\text{逆対称問題: } \mathbf{C}_{AS}[B^d, D^d, F^d]^T = 0 \quad (45)$$

ここに $\mathbf{C}_S, \mathbf{C}_{AS}$ は 3×3 の係数行列である。したがって、固有円振動数 ω を定める振動数方程式は、それぞれで

$$|\mathbf{C}_S| = 0, \quad |\mathbf{C}_{AS}| = 0 \quad (46)$$

となる。上式は ω に関する超越方程式であるから、パラメータ $b/a, h/a, C_{ij}, m, n$ を与えて数値的に解く。そして ω_{mnl} ($l=1,2,3,\dots$) が決まれば、式(44), (45)から積分定数 $A^d \sim F^d$ が定まり、したがって固有関数が決定する。

以上、横等方性体の固有関数の誘導を記したが、以下に等方性体の変位関数について考察する。等方性体では、 λ, μ をラメの定数とすれば、材料定数 C_{ij} との間に次の関係がある。

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{13} = \lambda, \\ C_{44} &= C_{66} = \mu \end{aligned} \quad (47)$$

よって、式(37)の特性方程式は

$$\begin{aligned} C_{11}C_{44}p^4 + [(C_{11} + C_{44})\rho\omega^2 - 2C_{11}C_{44}\gamma_{mn}^2]p^2 \\ + (\rho\omega^2 - C_{11}\gamma_{mn}^2)(\rho\omega^2 - C_{44}\gamma_{mn}^2) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

となる。これは容易に因数分解できて2根は

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \gamma_{mn}^2 - \rho\omega^2 / C_{11} \\ p_2^2 &= \gamma_{mn}^2 - \rho\omega^2 / C_{44} \end{aligned} \quad (49)$$

である。また式(40)より

$$p_3^2 = \gamma_{mn}^2 - \rho\omega^2 / C_{44} \quad (50)$$

したがって $p_1^2 \neq p_2^2$, $p_3^2 = p_2^2$ となるが、これらによっていずれも独立した解式 $\Phi^d(z), \Psi^d(z)$ が得られるので、横等方性の場合に得られた諸式において、式(47)の材料定数を適用すればそのまま等方性の諸式として適用できることが分かる。

5. 準静的解

次に式(10)～(13)で規定される準静的問題では、自由振動問題で慣性力項を $\rho\omega_{mnl}^2 = 0$ としたものに対応する。よって式(27)に対応して変位関数 ϕ^s, ψ^s を用いて以下のようにおく。

$$\begin{aligned} u^s &= \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi^s}{\partial y}, \quad v^s = \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi^s}{\partial x} \\ w^s &= -\frac{1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \nabla_1^2 \phi^s + C_{44} \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

これを式(10)に代入すれば変位関数 ϕ^s, ψ^s に関する次式を得る。

$$\nabla_1^2 \phi_i^s + k_i \frac{\partial^2 \phi_i^s}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1,2) \quad (52)$$

$$\nabla_1^2 \psi^s + k_3 \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial z^2} = 0 \quad (53)$$

ただし

$$\phi^s = \phi_1^s + \phi_2^s \quad (54)$$

また k_1, k_2 は次の2次方程式

$$C_{11}C_{44}k^2 - (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}C_{44})k + C_{33}C_{44} = 0 \quad (55)$$

の2根であり、さらに

$$k_3 = \frac{C_{44}}{C_{66}} > 0 \quad (56)$$

である。式(55)の根については、実在の様々な横等方性材料 [10] について数値計算を行うと、2正根である場合がほとんどであり、共役複素根もあるが、2負根はない。そこで以下では2正根として議論を進める。式(48), (49)の解として、単純支持条件式(11)を満たすように次式にとる。

$$\phi_i^s(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_i^s(z) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (57)$$

$$\psi^s(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^s(z) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (58)$$

上式をそれぞれ式(48), (49)に代入すれば、 $\Phi_i^s(z), \Psi^s(z)$ について次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \Phi_i^s}{dz^2} - s_i^2 \Phi_i^s = 0 \quad (i=1,2) \quad (59)$$

$$\frac{d^2 \Psi^s}{dz^2} - s_3^2 \Psi^s = 0 \quad (60)$$

ただし、

$$s_i = \sqrt{\gamma_{mn}^2 / k_i} \quad (i=1,2,3) \quad (61)$$

式(59), (60)の解は容易に求められて、 $A^s \sim F^s$ を積分定数として

$$\begin{aligned} \Phi_1^s(z) &= A^s \cosh s_1 z + B^s \sinh s_1 z \\ \Phi_2^s(z) &= C^s \cosh s_2 z + D^s \sinh s_2 z \end{aligned} \quad (62)$$

$$\Psi^s(z) = E^s \sinh s_3 z + F^s \cosh s_3 z \quad (63)$$

これらを式(57), (58)に代入した後、式(47)に適用すれば次の変位式を得る。

$$\begin{aligned} u^s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_m s_1 (A^s \sinh s_1 z + B^s \cosh s_1 z) \\ &\quad + \alpha_m s_2 (C^s \sinh s_2 z + D^s \cosh s_2 z) \\ &\quad - \beta_n (E^s \sinh s_3 z + F^s \cosh s_3 z)] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ v^s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_n s_1 (A^s \sinh s_1 z + B^s \cosh s_1 z) \\ &\quad + \beta_n s_2 (C^s \sinh s_2 z + D^s \cosh s_2 z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_m (E^s \sinh s_3 z + F^s \cosh s_3 z) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\
w^s = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\eta_1 (A^s \cosh s_1 z + B^s \sinh s_1 z) \\
& + \eta_2 (C^s \cosh s_2 z + D^s \sinh s_2 z)] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y
\end{aligned} \quad (64)$$

ここに

$$\eta_i = \frac{C_{11} \gamma_{mn}^2 - C_{44} s_i^2}{C_{13} + C_{44}} \quad (i=1,2) \quad (65)$$

である。以上の変位式を式(13)に代入することにより応力の具体式が求まり、これに矩形板の上下面での境界条件式(12)を規定することにより積分定数 $A^s \sim F^s$ が決定できる。この場合も自由振動問題同様に $z=0$ 面に対称・逆対称問題に分けて取り扱えばよい。

次に等方性体の変位関数について考える。式(47)の材料定数を式(55)に適用すると、

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \quad \therefore k_{1,2} = 1 \quad (66)$$

が得られ、 k は重根である。よって、 $\Phi_i^s(z)$ は式(62)の代わりに次式にとる必要がある。

$$\begin{aligned}
\Phi_1^s(z) &= A^s \cosh \gamma_{mn} z + B^s \sinh \gamma_{mn} z \\
\Phi_2^s(z) &= C^s z \sinh \gamma_{mn} z + D^s z \cosh \gamma_{mn} z
\end{aligned} \quad (67)$$

また式(56)により、 $k_3 = 1$ であるので、 $\Psi^s(z)$ は式(63)で $s_3 = 1$ とおいた次式を使用すればよい。

$$\Psi^s(z) = E^s \sinh \gamma_{mn} z + F^s \cosh \gamma_{mn} z \quad (68)$$

6. 数値計算例

(1) 諸元

数値計算には板厚比 $h/a = 0.2$ の正方形板 ($a=b$) を取り扱った。板上面の中央部に载荷幅 $x_0 = y_0 = 0.2a$ で強度 q_0 の部分等分布荷重が時間に関してステップ状 [$f(t) = H(t)$] に作用するものとする (図-1 参照)。横等方性材料として自然界にはマグネシウムや亜鉛などがあり、Graphite/epoxy や E-glass/epoxy などの複合材料も巨視的には横等方性を示すものであるが、ここでは異方性の特性を簡明に検討するために等方面と異方面での縦弾性係数比 E/E' のみを変化させて数値計算を行うことにした。この場合、 E, G, ν をそれぞれ等方面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比、また E', G', ν' をそれぞれ等方面に垂直な面での縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比とすれば、これらは材料定数 C_{ij} との間に次の関係がある[8]。

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E' - E(\nu')^2}{(1+\nu)R}, \quad C_{12} = \frac{E'\nu - E(\nu')^2}{(1+\nu)R}, \\
C_{13} &= \frac{\nu'E'}{R}, \quad C_{33} = \frac{(1-\nu)(E')^2}{ER}, \quad C_{44} = G', \\
C_{66} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = G = \frac{E}{2(1+\nu)},
\end{aligned}$$

$$R = (1-\nu)(E'/E) - 2(\nu')^2 \quad (69)$$

そこで、縦弾性係数比を $E/E' = 1/3, 1/2, 1$ (等方性), 2, 3 と変化させ、ポアソン比、横弾性係数は $\nu = \nu' = 0.3, G = G'$ とした。また各ケースの密度 ρ も同じとした。なお、このように材料定数を選択してもエネルギー正值の条件[10]を満足していることを確認している。

以下の応答計算は全て無次元化して行い、時間については等方面 ($x-y$ 面) 内を伝播する縦波速度 c_L で基準化した無次元時間 τ を使用する。すなわち、

$$\tau = \frac{c_L t}{h}, \quad c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (70)$$

なお、衝撃応答解は式(9)の級数解で与えられており、その収束性は材料、着目点、時刻、応力、変位の種別によって異なる。後の図-5 に示した板厚方向の応力 σ_z の応答図が示すように急激に不連続的に応答が変化する箇所の収束がもっとも遅く[5,6]、この場合は $m = n \geq 100, l \geq 500$ 程度の項数が必要である。しかしながら他の諸量の収束は良好であり、 m, n, l の項数はいずれも数十程度用いればよいことが分かった。

(2) 固有値分布

衝撃応答計算に必要な固有円振動数 ω_{mnl} は、無次元固有振動数 $\Omega_{mnl} (= \omega_{mnl} h \sqrt{\rho/C_{66}})$ を用いて式(42)の振動数方程式を Regula-Falsi 法により数値的に解いて求めた。そして図-2 にその固有値分布を縦弾性係数比 $E/E' = 1/2, 1, 2$ の場合について

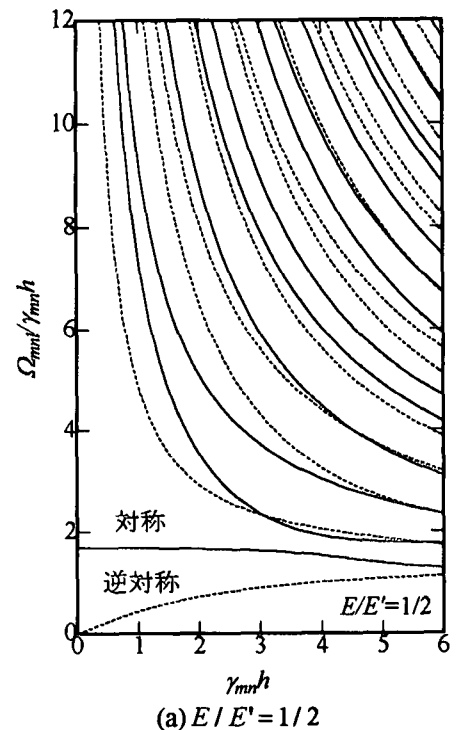
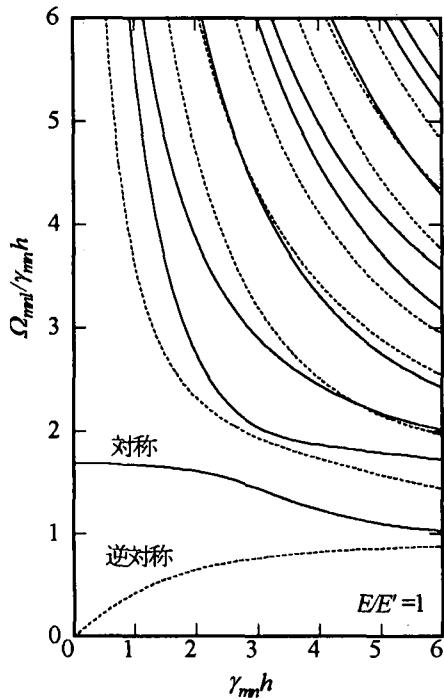
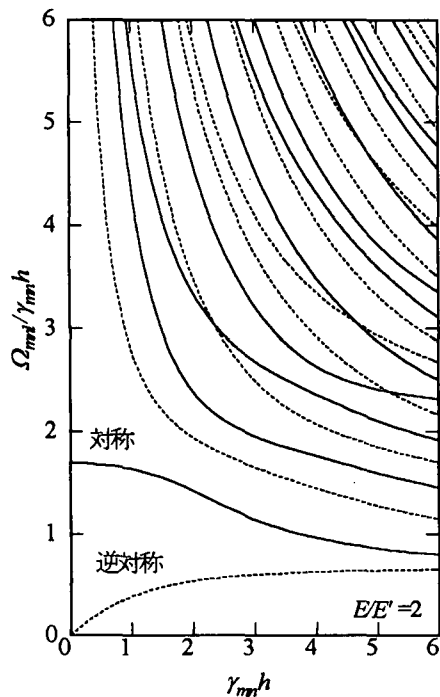


図-2 固有値分布



(b) $E/E'=1$



(c) $E/E'=2$

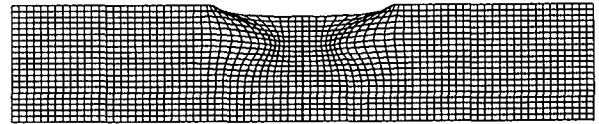
図-2 固有値分布 (続)

示している。図において実線、点線はそれぞれ $z=0$ 平面に関する対称、逆対称振動モードを意味する。図より縦弾性係数比が大きくなるほど固有値の分布が高密度、すなわち固有値が接近すること、また逆の場合は固有値間が疎になっていることが分かる。最低次固有値については、 $\gamma_{mn}h \rightarrow 0$ において、対称モードでは $\Omega_{mnl}/\gamma_{mn}h \rightarrow \sqrt{(C_{11}C_{33}-C_{13}^2)/C_{33}C_{66}}$ 、逆対称モードでは 0 とな

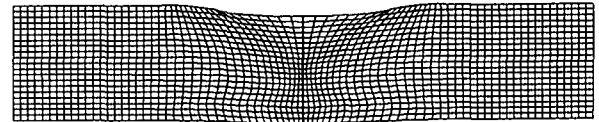
る。一方 $\gamma_{mn}h \rightarrow \infty$ においては Rayleigh 波速度[9] を c_R とすると対称、逆対称モードともに $\Omega_{mnl}/\gamma_{mn}h \rightarrow c_R/\sqrt{C_{66}/\rho}$ に漸近する。

(2) 変位の応答

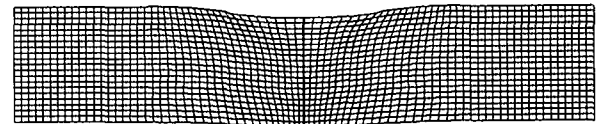
衝撃応答として最初に変位の応答を以下に示す。



$\tau=0.5$

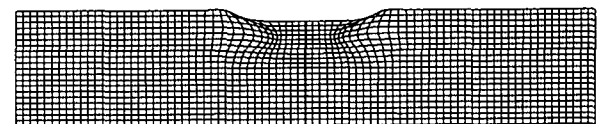


$\tau=1.0$

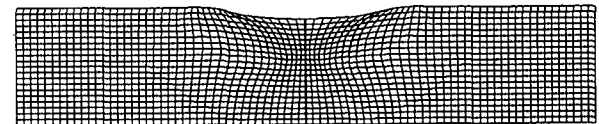


$\tau=1.2$

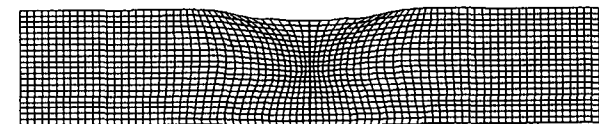
(a) $E/E'=1/2$



$\tau=0.5$

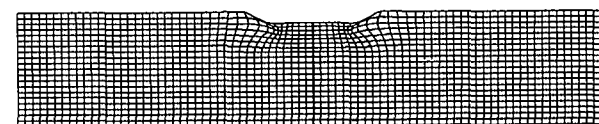


$\tau=1.0$

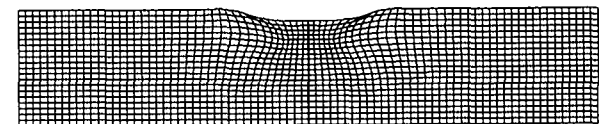


$\tau=1.2$

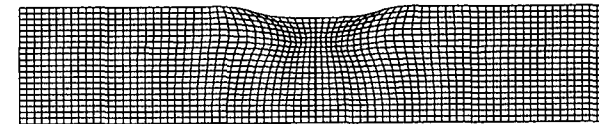
(b) $E/E'=1$



$\tau=0.5$



$\tau=1.0$



$\tau=1.2$

(c) $E/E'=2$

図-3 $x-z$ 断面の初期変形

図-3 は衝撃を受けた後の時刻 $\tau=0.5, 1.0, 1.2$ における $x-z(y-z)$ 断面の変形図である。画描にあたってスパン方向に 80 分割、板厚方向に 20 分割し、各応答時刻での変位 w の最大値で基準化している。異方性体においては、一般に任意方向に伝播する応力波の速度面と波面は一致しないが、主軸方向では一致する[10]。今の場合、主軸は x, y, z 軸であり、 z 軸（異方軸）方向に伝播する純縦波速度 $c_z = \sqrt{C_{33}/\rho}$ は縦弾性係数比 $E/E' = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$ に対して $c_z/c_L = 1.68, 1.38, 1.0, 0.745, 0.645$ の関係がある。これを念頭において図の初期変形状態を見ると、まず等方性体 ($E/E' = 1$) に関しては、時刻 $\tau=0.5$ では中心軸上板厚中央まで応力波の影響を受けるとともに衝撃部分より球面状の部分に変形が起きている。平板の下面に応力波（純縦波）が最初に到達する時刻は $\tau=1.0$ であり、この応力波は反射されて圧縮から引張に位相が変わる。そのために時刻 $\tau=1.2$ ではこの影響が現れている。異方性体では等方性体と同時刻における矩形板の変形は、縦弾性係数比が小さい場合 ($E/E' = 1/2$)

では広い範囲に起こり、大きな場合 ($E/E' = 2$) では狭い範囲で起こっている。これは等方性である $x-y$ 平面での応力波速度を基準速度としているために、水平方向へ伝播する応力波速度は等方性体の場合と同じであるが、それ以外の任意方向へ伝播する応力波速度が異なり、同じ時刻での応力波および波面の到達範囲に違いがあるからである。

次に平板の中央点 ($x=y=a/2, z=0$) における変位 w の長期応答を図-4 に示す。無次元基本周期 T は、固有値解析によれば縦弾性係数比 $E/E' = 1/3, 1/2, 1, 1/2, 3$ に対して $T = 30.22, 31.17, 34.43, 43.49, 63.88$ となった。これは応答図から読みとれる時刻と一致している。縦弾性係数比が大きくなれば $x-y$ 平面（等方性）の剛性が相対的に高まり、それに対応した周期と応答値の違いが図に現れている。

(4) 応力の応答

a) σ_z の応答

図-5 は板中央点 ($x=y=a/2, z=0$) における板厚方向の応力 σ_z の初期応答である。例えば実線で表した等方性体の応答時刻 $\tau=0.5$ を見ると、これは载荷中央部分より発生した純縦波が到達した最初の応答時間帯であるから、本来ゼロから $-q_0$ に不連続的に変化する応答でなければいけない。また引き続き純横波の到達により応答が急変するまでの間にもわずかながら応答曲線に乱れが見られる。これは先にも述べた級数解の収束性に起因するものである。しかしながらそれ以後は滑らかな応答曲線が求められているものと判断できる。また、先に記した z 軸方向の純縦波の速度 c_z から縦波による最初の応答時刻を計算すれば、縦弾性係数比 $E/E' = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\tau = 0.298, 0.362, 0.5, 0.671, 0.776$ となり、これらは図より読みとれるものと一致しており、本級数解は正しく計算されていると考えられる。

本着目点での応力 σ_z の初期応答は、いずれのケースでも板上下面における縦波の反射により圧縮波と引張波が繰り返し交互に現れるとともに、その間に载荷中央点で発生した横波および载荷端で発生した疑似縦波、疑似横波の波面が到達することによる不連続的な応答が現れている。

b) 応力 σ_x の応答

図-6 および図-7 に応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ の初期 ($0 \leq \tau \leq 10$) および長期 ($0 \leq \tau \leq 70$) 応答曲線を示している。着目点は中央断面の上下面中央点 ($x=y=a/2, z=\pm h/2$) である。最初に初期応答を検討すると、上面中央ではいずれのケースの応答も载荷瞬時に圧縮の応答値を持ち、縦弾性係数比が大きいほどその値が大きくなっている。これは、作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力 $\sigma_z = -q_0$ によ

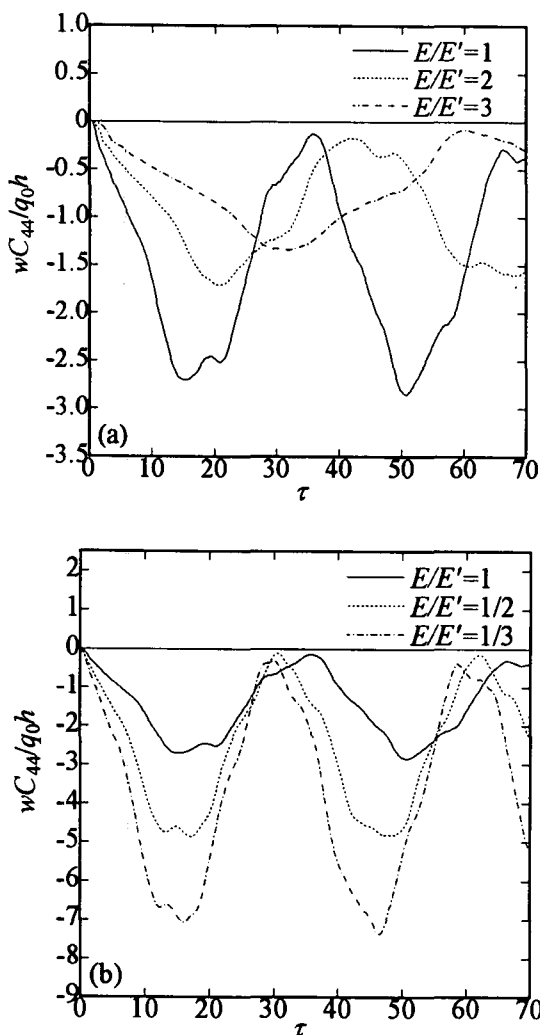


図-4 変位 w の長期応答 ($x=y=a/2, z=0$):
(a) $E/E' = 1, 2, 3$; (b) $E/E' = 1, 1/2, 1/3$

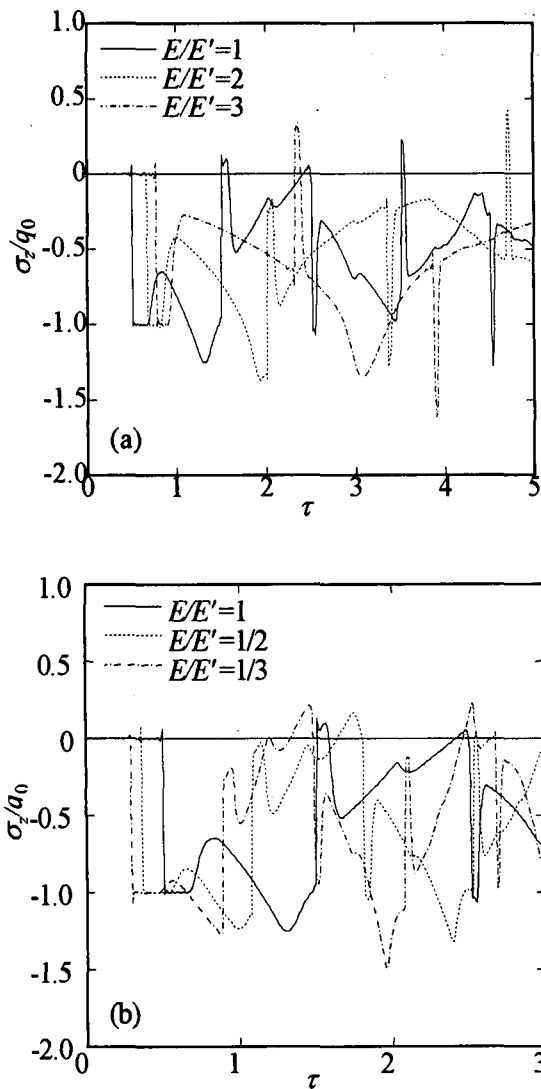


図-5 応力 σ_z の初期応答 ($x=y=a/2, z=0$):
(a) $E/E'=1, 2, 3$; (b) $E/E'=1, 1/2, 1/3$

る x, y 方向のひずみが拘束されるために応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ が生じるからであり、縦弾性係数比が大きいと $x-y$ 平面での剛性が高まるためにその応答値が大きくなっている。その後の応答は、時刻 $\tau=0.5$ において、荷重の載荷端である 4 点： $(x=0.5a, y=0.4a)$, $(x=0.5a, y=0.6a)$, $(x=0.4a, y=0.5a)$, $(x=0.6a, y=0.5a)$ から発生した疑似縦波による急変した応答が見られる。さらに引き続き尖った応答は Rayleigh 波の影響によるものであり、その到達時刻は縦弾性係数比 $E/E'=1/3, 1/2, 1, 2, 3$ に対して、Rayleigh 波速度[11]からの計算値では $\tau=0.65, 0.74, 1.07, 1.60, 2.67$ と求められ応答図の時刻と一致している。下面中央点でも応答の遅れはあるものの、表面波の影響と見られるピーク値を持っている。次に長期応答の場合はいずれも振動の高周波成分のために複雑な応答曲線になっているが、初期の応答を除けば先に変位応答のところで示した無次元基本周期に従う応答を示し

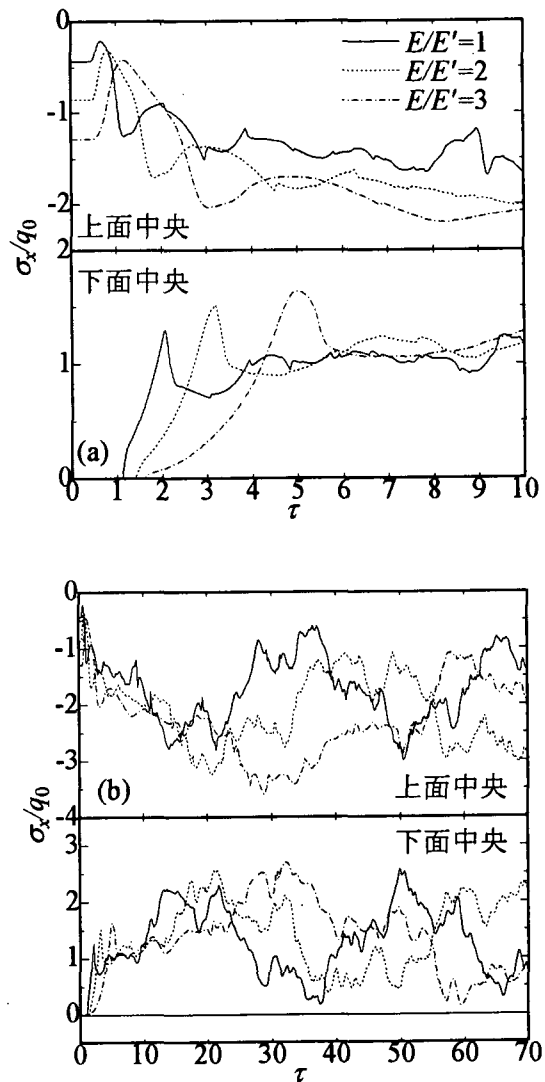


図-6 応力 σ_x の応答 ($x=y=a/2, z=\pm h/2$; $E/E'=1, 2, 3$): (a) 初期応答, (b) 長期応答

ている。縦弾性係数比が大きいほど $x-y$ 面での剛性が相対的に高まることにより、曲げ応力に対応するこの応力 σ_x の応答値も大きいことが図より分かる。

5. まとめ

本研究は、板厚方向が異方軸である横等方性矩形厚板の弾性衝撃応答解析を試みたものであり、動弾性論に基づく固有関数展開法により衝撃応答解を固有関数（振動モード関数）からなる級数解、式(9)、として求めた。数値計算例では等方性と異方性での縦弾性係数比 E/E' のみを異方性パラメータとして正方形板を対象にして計算を行った。以下に得られた結果をまとめる。

(1) 級数解については、板厚方向の応力 σ_z の収束は遅いが衝撃初期の応力波の波頭を正しく捉えた結果が得られた。他の応力、変位の収束は良好であった。

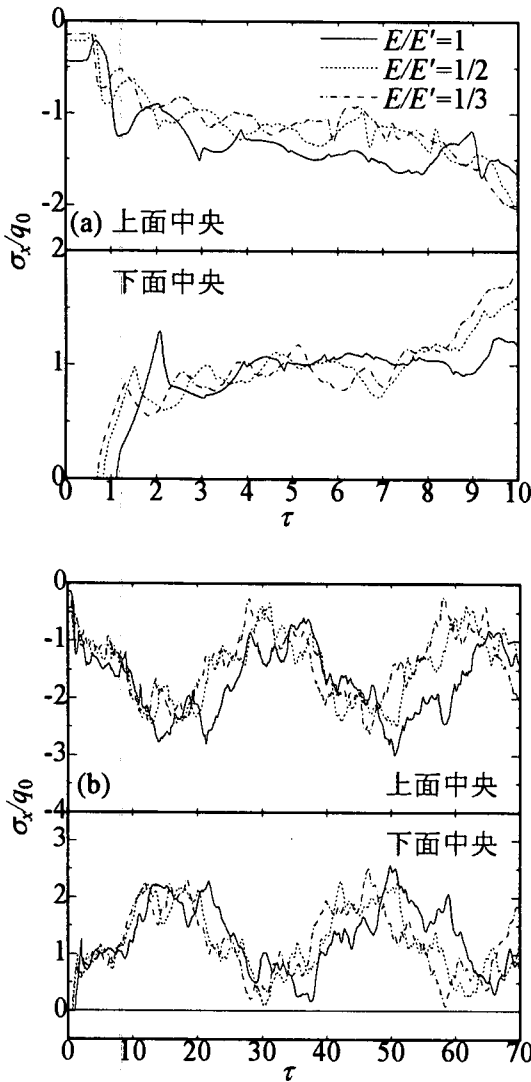


図-7 応力 σ_x の応答曲線 ($x=y=a/2, z=\pm h/2$; $E/E'=1, 1/2, 1/3$) : (a)初期応答, (b)長期応答

(2)固有値については、縦弾性係数比が大きくなるほど固有値スペクトル密度が高くなる。すなわち固有値（固有振動数）が接近する。

(3)変位 w （たわみ）応答では、縦弾性係数比が大きくなるほど応答周期が延びかつその応答値が小さくなる。また縦弾性係数比が大きくなるほど異方軸に沿った縦波速度が遅くなるために、衝撃後の初期変形は小さな範囲に留まる。

(4)板厚方向応力 σ_z の初期応答では、板上下面での反射波、載荷面中央からの純縦波・横波、さらに載荷端からの疑似縦波・横波の到達の度に不連続的な応答が生じる。そして圧縮応力、引張り応力が交互に現れる。

(5)板上下面中央での応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ の初期応答では、衝撃瞬時に応答値が生じるとともに引き続いて Rayleigh の表面波の影響が現れる。また長期応答では、振動の高周波成分の影響が現れ複雑な応答曲線となり、縦弾性係数比が大きくなるほど等方性体に比べ大きな応答値となる。

参考文献

- [1] Chang, C. and Sun, C. T. : Acoustic Emission and Transient Elastic Waves in an Orthotropic Laminate Plate, *Composites Science and Technology*, Vol. 33, pp. 213-236, 1988.
- [2] Weaver, R. L., Sachse, W. and Kim, K.-Y. : Transient Elastic Waves in a Transversely Isotropic Plate, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 337-346, 1996.
- [3] Pao, Y.-H. : Elastic Waves in Solids, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 1152-1164, 1983.
- [4] Reismann, H. : On the Forced Motion of Elastic Solids, *Applied Scientific Research*, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- [5] 小林治俊, 米田幸司 : 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 42A, pp. 1287-1293, 1996.
- [6] 小林治俊, 米田幸司 : 異方性平面梁の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 44A, pp. 1737-1744, 1998.
- [7] Lange, K. A. and Bottega, W. J. : On the Elastodynamic Response of Thick Multi-layered Plates Subjected to Impact Load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 221, pp. 39-93, 1998.
- [8] Lekhnitskii, S. G. : *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [9] Hu, H.-C. : On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic body, *Acta Scientia Sinica*, Vol. 2, pp. 145-151, 1953.
- [10] Payton, R. G. : *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague/Boston/Lancaster, 1983.
- [11] Deresiewicz, H. and Mindlin, R. D. : Wave on the Surface of a Crystal, *Journal of Applied Physics*, Vol. 28, pp. 669-671, 1957.
- [12] Musgrave, M. J. P. : On the Propagation of Elastic Waves in Aeolotropic Media, II. Media of Hexagonal Symmetry, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. A226, pp. 356-366, 1954.

(2000年4月21日受付)