

風上差分スキームを用いた直接数値シミュレーションの基礎的研究

Fundamental Study on Direct Numerical Simulation Using Upwind Difference Scheme

林 俊一郎*, 大本 照憲**, 矢北 孝一***, 平川 隆一****

Syunichiro HAYASHI, Terunori OHMOTO, Kouichi YAKITA, Ryuichi HIRAKAWA

*正会員 熊本県芦北土木事務所 (〒869-5461 熊本県芦北郡芦北町芦北2670)

**正会員 工博 熊本大学助教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪2-39-1)

***正会員 熊本大学技官 工学部環境システム工学科 (同上)

****学生員 熊本大学大学院生 自然科学研究科環境土木工学専攻 (同上)

A few basic studies on Direct Numerical Simulation (DNS) using upwind difference scheme and regular mesh have been executed to investigate its applicability to complex boundary and high Reynolds number flows. In this paper, one-dimensional linear advection equation was calculated by use of the upwind scheme in combination with the time marching schemes. The result showed that 5th-order accurate upwind scheme for convective term and 3rd-order Adams-Bashforth method for time step gave the superior accuracy and stability in the combinations selected. Moreover, fully developed turbulent flows between parallel plates were analyzed to clarify the influence of different difference schemes for convective term on computational accuracy. Comparison with the spectral method proved that the high-order upwind DNS is sufficiently accurate with respect to turbulence statistics.

key words: DNS, upwind difference scheme, regular mesh, numerical analysis, turbulent channel flow

1. はじめに

カオスの発見により時空間的に不規則な振舞いをする多くの物理系が、決定論的方程式に従っていることが明らかとなりつつある。このことは、Navier-Stokes方程式を正確に計算すれば、流体现象を定量的に再現することが可能なことを意味しており¹⁾、最近では乱流を数値解析で捕らえようとする試みが数多く行われている²⁾。そのなかで信頼性や解析精度の高さから他を圧倒しているのが直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation, 以下「DNS」と呼ぶ。) である。DNSはこれまでスペクトル法で行われることが多かったが、複雑境界流れや高レイノルズ数流れへの適用が困難であるなど解析可能な系に限られ、その特長を十分に活かしかれていないと言いがたい。このため最近では、より複雑な系への適用性の高さから、差分法による解析も見られるようになってきている。このなかには二次精度の差分スキームに基づく

解析法で、スペクトル法と遜色のない大変優れた結果を示しているものもある³⁾。

一方、高レイノルズ数流れの計算でよく用いられているのが、3次精度風上差分スキームを用いた擬似直接法である⁴⁾。このスキームはその強い数値的安定性から、任意形状の物体周り流れなど主に実用計算を目的とした汎用ソフトに広く採用されている。この背景には、高レイノルズ数流れの解析においては、たとえ高次精度であっても中心差分を用いれば打ち切り誤差の主要項が奇数階微分となり非線形不安定を生じやすく⁵⁾、風上差分スキームのような高波数成分を除去する一種の数値フィルタが不可欠なことがあげられる。しかし、このスキームの持つ数値粘性が解へ与える影響が指摘されており⁶⁾、このためこれまでも多数の研究がなされている。

乱流解析においては、Raiら⁷⁾によって5次精度風上差分スキームが提案されるとともに、宮内ら⁸⁾による一様等方性乱流への適用の結果、実験やスペクトル法とも良い

一致を示すという報告がなされるなど、風上差分スキームを用いることで、より実用性の高い問題へのアプローチが期待される。さらに、工学上重要な高レイノルズ数流れの解析が、近い将来を含め依然困難な状況にあることを鑑みると、実行可能な計算機環境の中で風上差分のような一種の数値フィルターの影響を把握しつつ利用することが必要である。このようにDNSの汎用化に向けて、風上差分スキームの違いが解の精度に与える影響を検討することは、工学的有用性が極めて高く重要である。

本研究では、一次元線形対流問題を検討することにより風上差分スキームと時間的離散化とのカップリングの選択が精度の確保にとって重要なことを示すとともに、風上差分スキームとレギュラー格子によるDNSを構築し、壁面せん断乱流の検証問題としてよく知られる平行平板間流れを対象に、その特性を定量的に評価する。

2. 風上差分スキームと時間進行法の選択

移動性⁹⁾を満たさない非保存型中心差分スキームを用いると aliasing 誤差のため解が発散するように、非線形項である対流項には特別な配慮を施さないと安定解が得られないことはよく知られる。この不安定さを除去する手法として風上差分スキームがあるが、ここでは風上差分と時間進行法とのカップリングが解へ与える影響について、以下の一次元線形対流問題¹⁰⁾を対象に検討する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (U=1, -\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x - \pi)}{2}, & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、初期値に滑らかではあるが、 $\pi/2$, $3\pi/2$ において偶数階微分が不連続となる関数を採用することにより、振幅誤差、位相誤差に加え、偶数階微分型である数値粘性の適切性を調べることにする¹⁰⁾。なお、式(1)の厳密解は初期値が保存されることから、解析には等間隔格子 ($N=65$) を用い、両端に周期境界条件を採用することで、 m 周期後に元の位置に戻った時の数値解と厳密解

との比較を行う。対流項近似には、式(2)~(6)に示す1次風上、3次風上 ($K-K^4$), UTOPIA¹¹⁾, QUICK¹²⁾), 5次風上⁷⁾の5種、時間積分には Crank-Nicolson 法, Runge-Kutta 法, 2次精度 Adams-Bashforth 法, 3次精度 Adams-Bashforth 法の4種を用い、それぞれ表-1に示す組み合わせにより数値実験を行う。

1) 1次風上

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + |u_i| \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2)$$

2) K-K スキーム

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + |u_i| \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{4\Delta x} \quad (3)$$

3) UTOPIA スキーム

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + |u_i| \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} \quad (4)$$

4) QUICK スキーム

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u_i \frac{-u_{i+2} + 10(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{16\Delta x} + |u_i| \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{16\Delta x} \quad (5)$$

5) 5次風上

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u_i \frac{u_{i+3} - 9u_{i+2} + 45(u_{i+1} - u_{i-1}) + 9u_{i-2} - u_{i-3}}{60\Delta x} + |u_i| \frac{-u_{i+3} + 6u_{i+2} - 15u_{i+1} + 20u_i - 15u_{i-1} + 6u_{i-2} - u_{i-3}}{60\Delta x} \quad (6)$$

表-1 時間進行法と対流項近似の組み合わせ

CASE		時間進行法	対流項差分スキーム				
			1次	K-K	UTOPIA	QUICK	5次
RUN1	①	Crank-Nicolson	○				
	②			○			
	③				○		
	④					○	
	⑤						○
RUN2	①	Runge-Kutta	○				
	②			○			
	③				○		
	④					○	
	⑤						○
RUN3	①	2nd Adams-Bashforth	○				
	②			○			
	③				○		
	④					○	
	⑤						○
RUN4	①	3rd Adams-Bashforth	○				
	②			○			
	③				○		
	④					○	
	⑤						○

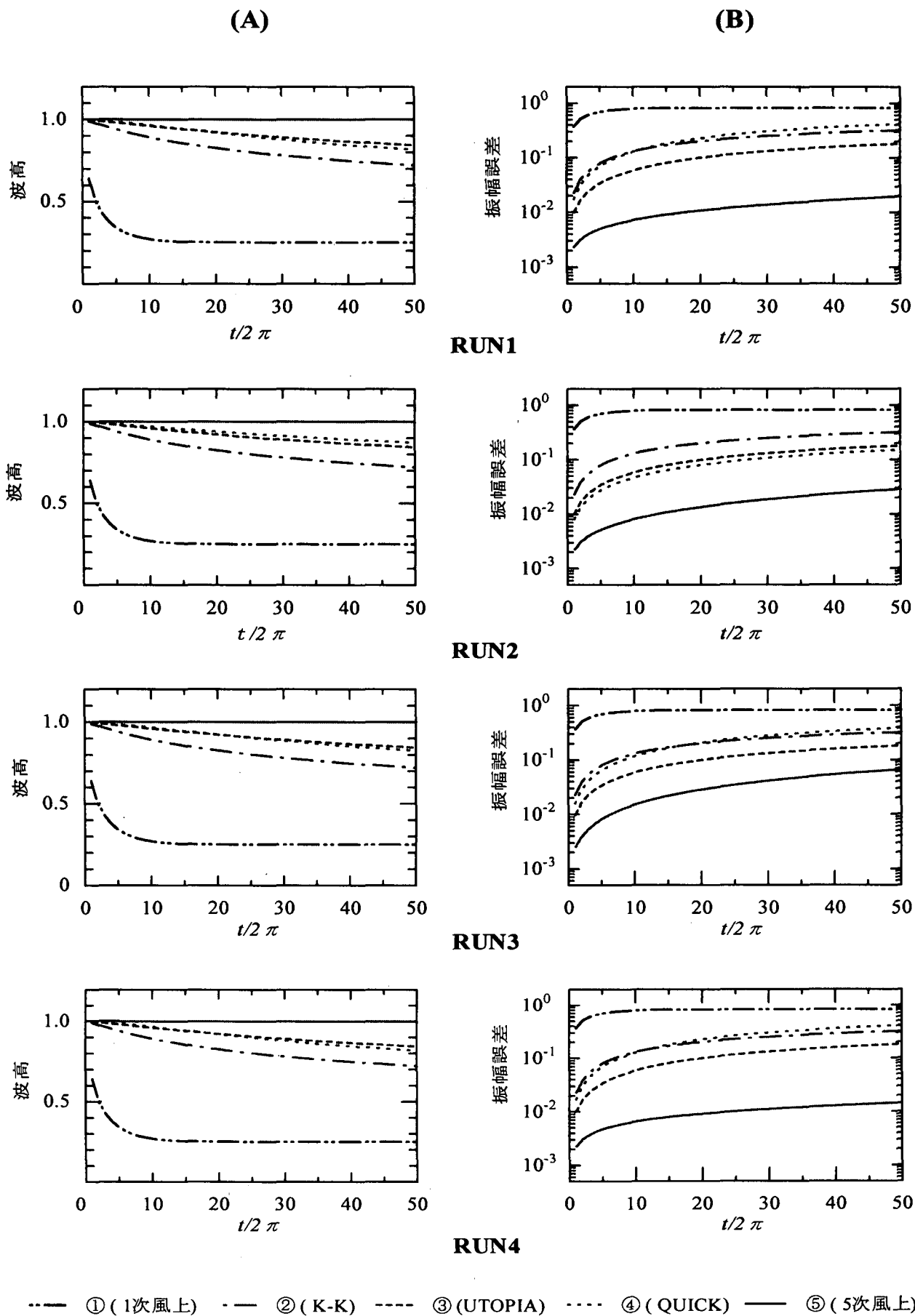


図-1 波高の減衰状況と振幅誤差 (Courant 数 0.1)

表-2 50 周期後の振幅誤差の状況

RUN 1	Courant Number				
	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
① (1次風上)	▲	▲	▲	▲	▲
② (K-K)	▲	▲	▲	▲	▲
③ (UTOPIA)	▲	▲	▲	▲	▲
④ (QUICK)	▲	▲	▲	▲	▲
⑤ (5次風上)	○	○	▲	▲	▲

RUN 2	Courant Number				
	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
① (1次風上)	▲	▲	▲	▲	▲
② (K-K)	▲	▲	▲	▲	-
③ (UTOPIA)	▲	▲	▲	▲	-
④ (QUICK)	▲	▲	▲	-	-
⑤ (5次風上)	○	▲	▲	-	-

RUN 3	Courant Number				
	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
① (1次風上)	▲	▲	▲	▲	-
② (K-K)	▲	▲	-	-	-
③ (UTOPIA)	▲	▲	▲	▲	-
④ (QUICK)	▲	▲	▲	-	-
⑤ (5次風上)	○	○	▲	-	-

RUN 4	Courant Number				
	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
① (1次風上)	▲	▲	-	-	-
② (K-K)	▲	-	-	-	-
③ (UTOPIA)	▲	▲	▲	-	-
④ (QUICK)	▲	▲	▲	-	-
⑤ (5次風上)	○	○	○	-	-

○：振幅誤差 10^{-1} 未満，▲：振幅誤差 10^{-1} 以上，-：発散

図-1 はクーラン数が 0.1 の時の、波高の減衰状況 (A) と二乗残差の平方根で表した振幅誤差 (B) を示したものである。図-1 (A) から明らかなように、時間進行法にかかわらず低次の風上差分スキームほど減衰が著しいことが分かったとともに、完全に減衰した 1 次風上を除けば、図-1 (B) から振幅誤差の成長は、3 次風上の方が速いことが分かる。さらに、振幅誤差の最も小さな 5 次風上は、どの時間進行法との組合せにおいても波高の減衰はほとんど認められない。

次に、表-2 は 50 周期後の振幅誤差をクーラン数との関係からまとめたものである。RUN1 の結果から陰解法である Crank-Nicolson 法は発散もなく安定なことが分かるが、RUN2 から RUN4 の陽解法では高次の時間進行法ほどクーラン数を小さく制限しなければ発散することが分かる。このなかで特筆すべきことは、5 次風上との組み合わせは、概して振幅誤差の減少と安定性の向上へ寄与することが窺われることである。このように、時間進行法の選択にかかわらず、5 次風上の採用は極めて良好な結果を与えているかのように見える。

しかしながら、例えば図-2 に示す 50 周期後の波形状況を見ると、RUN4-⑤の 3 次精度 Adams-Bashforth 法以外は、偶数階微分不連続点において負値を示すなどズレが生じていることが確認できる。特に RUN3-⑤の 2 次精度 Adams-Bashforth 法においては、減衰誤差や位相誤差に加えクーラン数依存も見受けられるなど、その取り扱い

いには問題が残る。これに対し 3 次精度 Adams-Bashforth 法はこれらの障害はほとんど見受けられない。さらに演算行程も反復計算を必要とする Crank-Nicolson 法や多段型の Runge-Kutta 法に較べ少ないことから、DNS のように高い精度を維持しつつ、膨大な時間ステップ数の計算が要求される場合には有効であると判断される。また、積分時間ステップ数は $Re^{1/2}$ に比例し増大する¹³⁾ことを考えると、特にレイノルズ数の高い流れを解析する際、顕著な計算負荷量の軽減につながることが期待される。このことから、本研究においては時間進行法に 3 次精度 Adams-Bashforth 法を採用する。

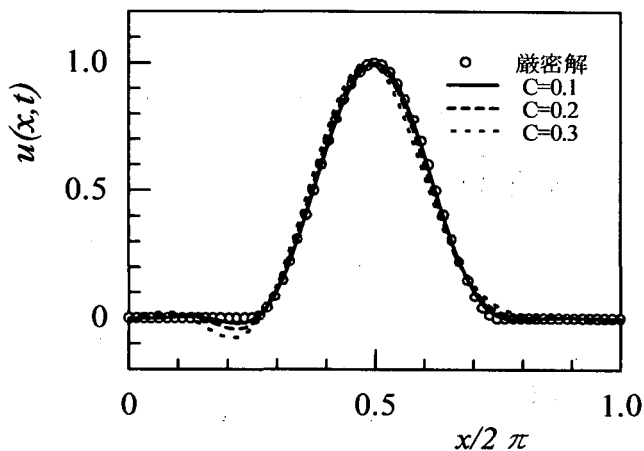
3. 数値解析法

非圧縮性粘性流れの支配方程式は、以下に示される連続の式と Navier-Stokes 方程式で表すことができる。

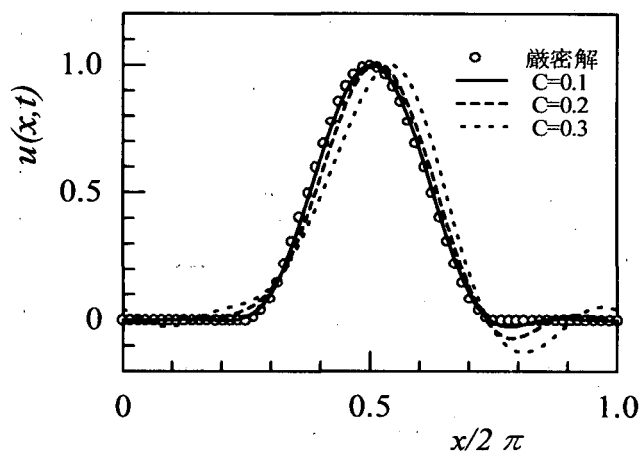
$$\operatorname{div} U = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^2 U \quad (8)$$

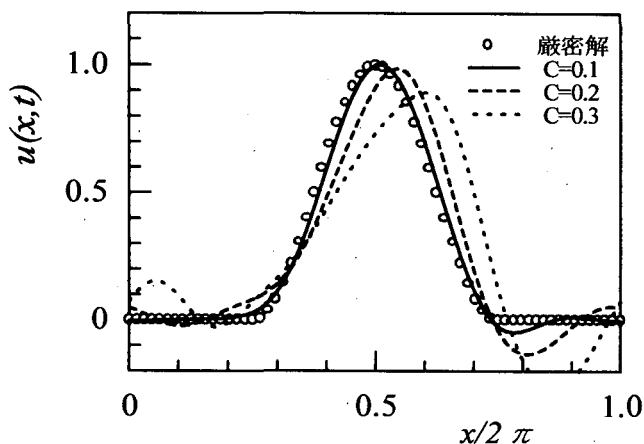
上式において U は速度ベクトル、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。上式を MAC 法と部分段階法¹⁴⁾を組み合わせた次に示すアルゴリズムによって解析を行う。このアルゴリズムの特長は、中間速度場を求める発展方程式



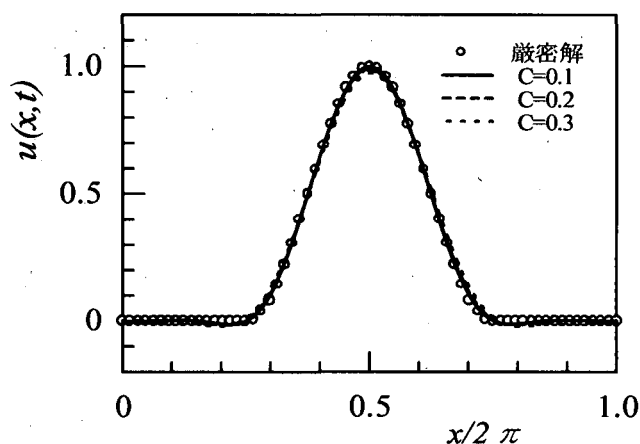
RUN1-⑤ (Crank-Nicolson)



RUN2-⑤ (Runge-Kutta)



RUN3-⑤ (2nd Adams-Bashforth)



RUN4-⑤ (3rd Adams-Bashforth)

図-2 5次風上とカップリングしたときの50周期後の波形の比較

の非線形項を陽解法の3次精度 Adams-Bashforth 法, 線形の粘性項を陰解法の2次精度 Crank-Nicolson 法で表すことにより, 陽解法によるコンパクト化と陰解法による収束性と数値的安定化を, さらに速度と圧力の分離による解法全体の縮小化を同時に達成したものとなっていることである。

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} (23H^n - 16H^{n-1} + 5H^{n-2}) + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\tilde{U} + U^n) \quad (9)$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\text{div } \tilde{U}}{\Delta t} \quad (10)$$

$$\frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} = -\text{grad } p^{n+1} \quad (11)$$

ここで H は対流項を表し, n は時間レベルを示すものとする。圧力の Poisson 方程式は4次精度で離散化を行うとともに, 新ステップの速度場は, 圧力に対し Euler の後退スキームを適用して計算する。なお, 圧力の Poisson 方程式および Navier-Stokes 方程式における Crank-Nicolson 法の反復解法には面 Gauss-Seidel 法を用い, 収束判定は平均自乗残差でそれぞれ 10^{-4} , 10^{-9} とした。

計算格子には, スタガード格子が採用されることが多いが, 境界条件の設定を始めプログラミングが煩雑なうえ, 一般曲線座標系への拡張や高精度化にあたっては工夫が必要である¹⁵⁾。一方, レギュラー格子は解の空間的振動 (spurious 誤差) の発生が指摘されている¹⁶⁾ものの, 物理量を同一点で定義することから, 特にプログラミン

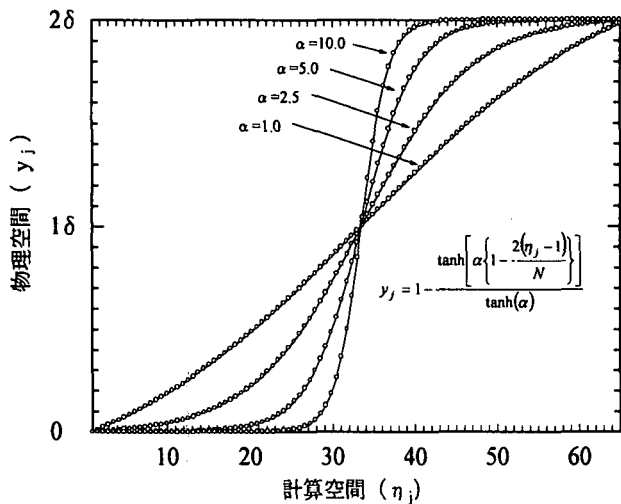


図-3 双曲線関数による座標変換

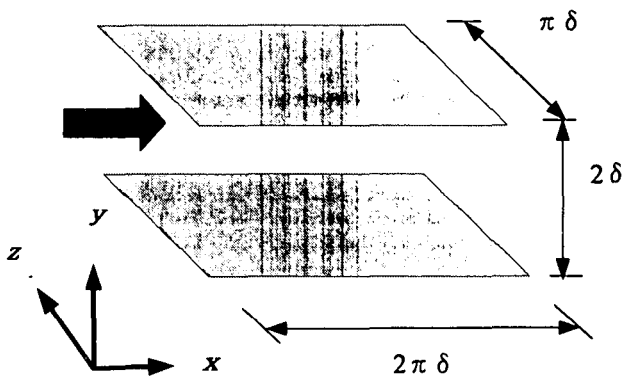


図-4 計算対象の概要

グの上で簡便なうえ、高精度化や複雑境界問題に有効な一般曲線座標系への変換が容易という利点を有している。これらを勘案すると、DNSの汎用化にはコンパクトかつハンドリングのよい格子系の選択も重要な要素となることから、本研究ではレギュラー格子を採用することにし、その適用可能性を確認する。なお、懸念される数値的振動解については不等間隔格子を採用することで除去するが、高レイノルズ数流れの性質が壁面境界付近を除くとあまりレイノルズ数によらないことから、この領域に相対的に疎な格子を充てることで、振動解の除去に加え効率的シミュレーションが期待される¹⁷⁾。不等間隔格子の生成には、計算空間への写像に伴うメトリック (metric) が解析的に得られるなど座標変換による誤差の混入を防ぐ意味から、図-3に示す双曲型関数 (tanh 関数) を用いる。なお、 α を調節することで壁面付近へ格子を密に配置することが可能であるが、概ね粘性底層およびバッファ層に総格子点の約1/4が確保できるよう $\alpha=2.5$ と設定した。計算は支配方程式を計算空間へ写像したうえで、差分近似を行った。

4. 精度の検証計算

計算対象には、境界形状が単純で壁面せん断乱流の素過程を考察するのに都合が良く、かつスペクトル法によるデータ・ベース¹⁸⁾が充実している図-4に示す平行平板間流れを採用する。境界条件には上下面において流速にノースリップ条件、圧力にノイマン条件、流下方向と

表-3 計算条件の概要

カプリング・アルゴリズム	Fractional Step Method
時間進行法	3次 Adams-Bashforth法
空間差分スキーム	3次風上 (対流項)
	5次風上 (")
	2次中心 (")
	4次中心 (")
	6次中心 (")
グリッド数	2次中心 (粘性項)
	64×65×64 (レギュラー)
解像度	$\Delta x = 18$
	$\Delta y = 0.45 \sim 13.9$
	$\Delta z = 9$
レイノルズ数	Rec = 3300
時間刻み	$\Delta t = 2/1000 * \delta / u_\tau$
全ステップ数	N = 100000

スパン方向には周期境界条件を課す。流れは平均圧力勾配により駆動されるものとし、チャンネル中心速度とチャンネル半幅によるレイノルズ数を3300とする。その他の計算条件は表-3のとおりである。初期値には十分に発達した乱れ場を与えるものとするが、その判定にはスキューネス (skewness) やフラットネス (flatness) といった乱流統計量の分布が十分に発達し、かつ定常に達することで判断した。なお、式(12)で定義するクーラン数¹⁹⁾は、すべての計算を通し0.05以下であった。

$$C(t) = \max \left\{ \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) \right\} \quad (12)$$

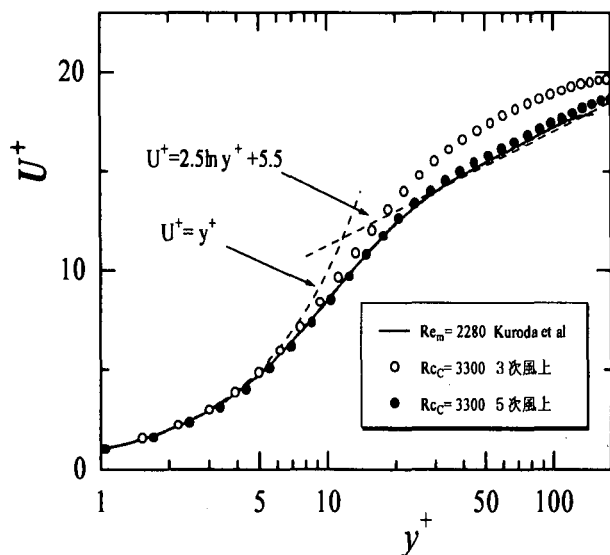


図-5 平均速度分布

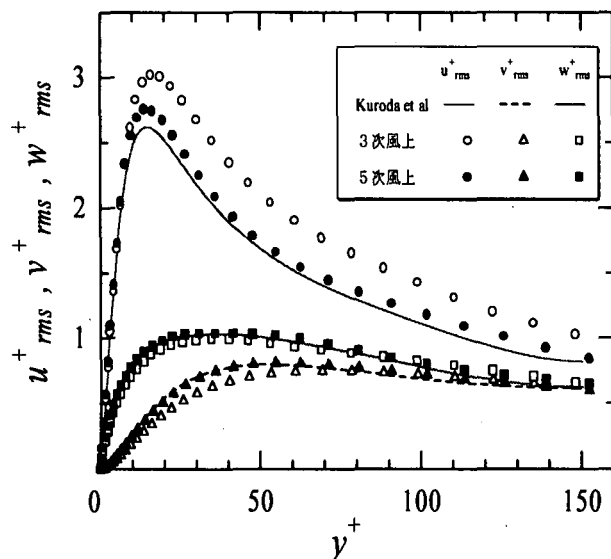


図-6 乱れ強さ分布

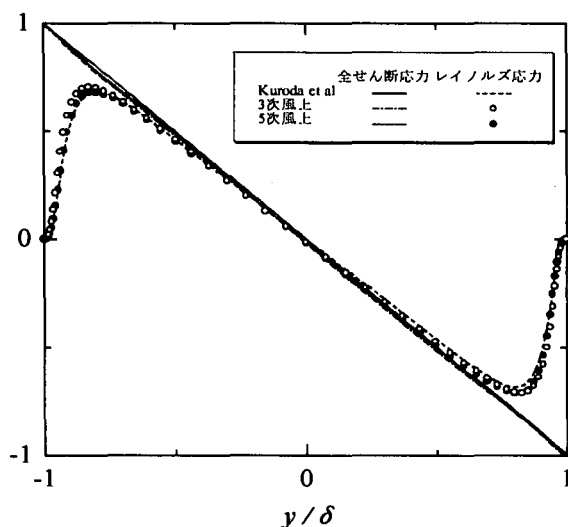


図-7 レイノルズ応力と全せん断応力の分布

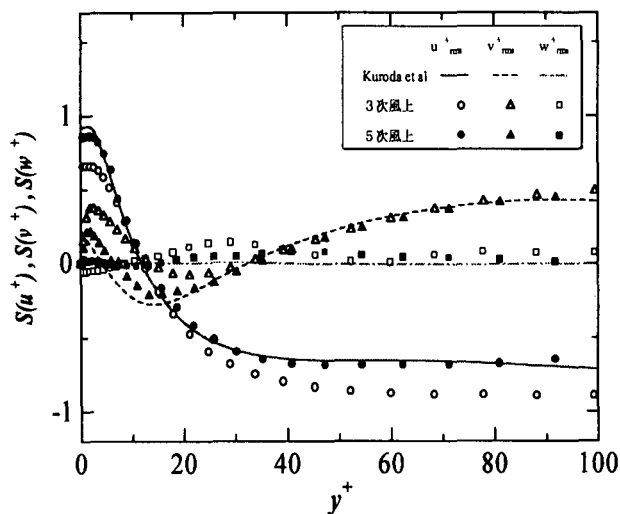


図-8 スキューネス

評価した差分スキームは3次と5次の風上差分とするが、式(2)～(6)で分かるように風上差分スキームは中心差分と数値粘性の和として表現できることから、数値粘性項を消去することにより、同項の果たす効果と中心差分(表-3参照)の結果についても考察する。

5. 結果と考察

図-5, 6は平均速度分布, 乱れ強さの結果をスペクトル法¹⁸⁾と比較したものである。粘性底層内の平均速度はスペクトル法とよく一致しているが、バッファー層付近から差分精度の違いが顕著となり、対数則領域において

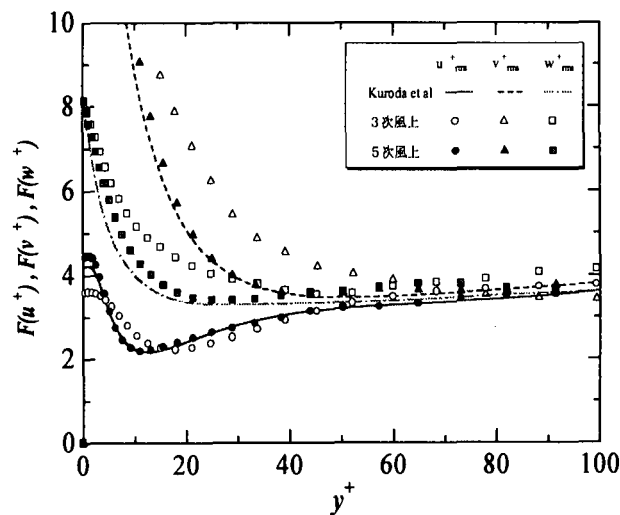


図-9 フラットネス

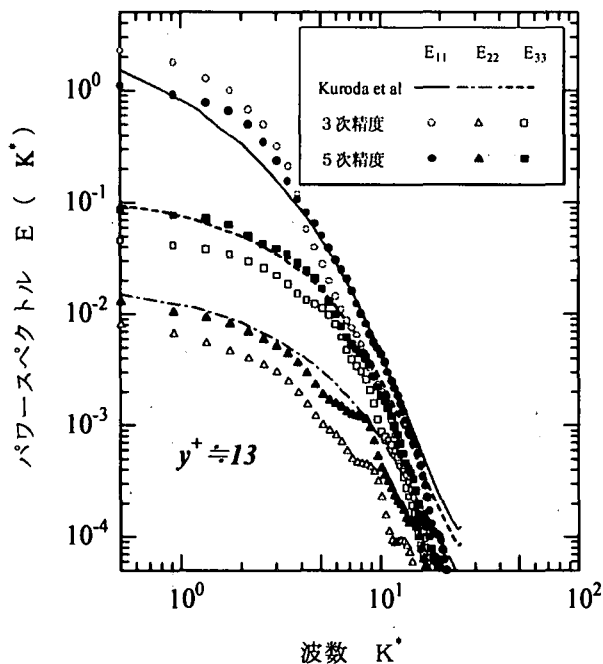


図-10 一次元エネルギースペクトル

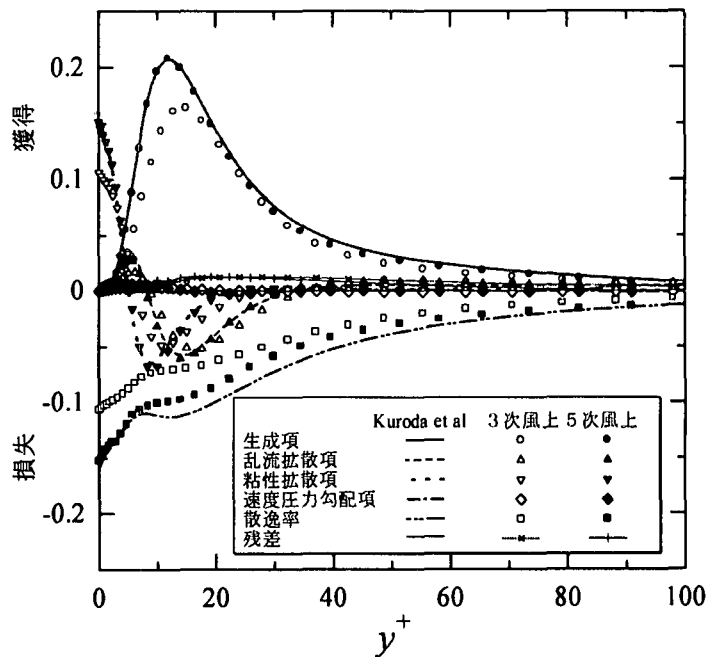


図-11 乱れエネルギーの収支

5 次風上がスペクトル法を僅かに上回るのに対し、3 次風上は大きく上回るなど数値粘性による解の層流化が示唆される。しかしながら、乱れ強さについて見ると、3 次風上が u^+_{rms} を過大に v^+_{rms} を過少に評価するなど再配分に問題が残る。このことは数値粘性の影響が必ずしも一様に層流化させる方向に作用しているわけではないことを示唆している。これに対し、5 次風上では u^+_{rms} のピーク値に不一致が見られるものの、 v^+_{rms} 、 w^+_{rms} はよく一致するなど、スペクトル法の約 1/8 の格子点数であることを考慮すれば良好な結果を与えているものと思われる。

図-7 はレイノルズ応力と全せん断応力の分布を示したもので、3 次風上と 5 次風上のどちらもスペクトル法と差はあまりなく、十分よく一致している。

図-8、9 はそれぞれ速度変動の 3 重および 4 重相関であるスキューネスとフラットネスを示したものである。

図-8 は壁面近傍から離れるに従って、 x 方向速度変動のスキューネスが正から負へ符号が反転する一方、 y 方向のそれはほぼ逆符号となることを示すなど、壁面近傍で高速流体の進入によるスウィープが、また対数則領域において低速流体の浮上によるイジェクションが支配的であることを示している。図-9 は壁面近傍における強い間欠性をよく捉ええており、バースティングのような組織構造の存在を示唆している。このように両図とも統計的対称性からのズレをよく捕捉しており、組織構造に関する情報を得ることが十分可能なことがわかる。なお、3

次風上と 5 次風上では、壁面近傍での定性的挙動を再現している点では同じだが、3 次風上の方がスペクトル法からのズレが大きい。

図-10 はバッファ層における一次元エネルギースペクトルの分布を比較したものである。5 次風上が低波数域から慣性領域にかけてよい一致を示しているのに対し、3 次風上は u 成分を過大に、 v 、 w 成分を過小に評価するなど、乱れ強さ分布と同様な傾向を示していることから、数値粘性による影響が出ているものと思われる。また、すべてのエネルギースペクトルにおいて、高波数領域でエネルギーが急激に減衰しているのがわかる。これは粘性項を 2 次精度で評価したことに原因があるものと思われる。改善には粘性項の高次精度化も有効と思われる^{21, 20)}。

図-11 は乱れエネルギーの収支を比較したものである。乱れエネルギーの生成と散逸が壁面近傍で卓越するのに対し、対数則領域では急激に減衰しほぼ局所平衡に近いことをよく再現している。残差は僅かではあるが正值を示すなど、風上化による散逸率の過小評価に起因する影響が認められる。ただ、3 次風上と 5 次風上の違いは顕著であり、本計算程度の粗格子でも 5 次風上を用いれば、計測では困難な壁面近傍の情報を得ることが可能など、複雑流れ場における乱流モデルの評価も期待できる。

以上の考察から、3 次風上と 5 次風上の差は歴然としており風上差分スキームを用い現象を忠実に再現するには高次精度の離散スキームが不可欠なことがわかる。

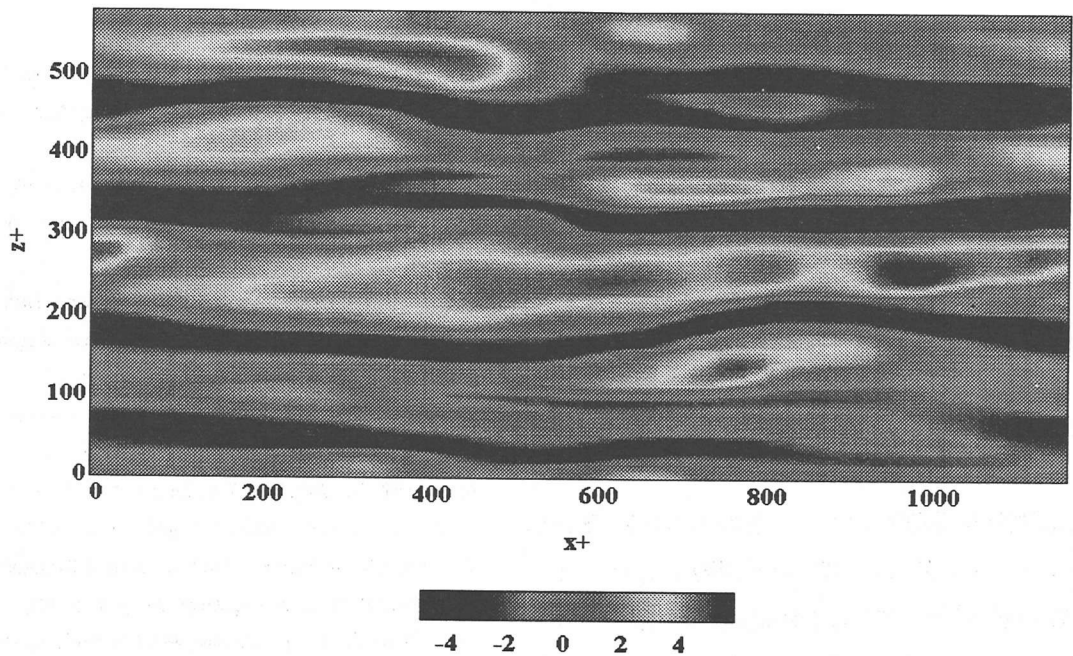


図-12 速度変動 u^+ の分布 ($y^+ \doteq 13$)

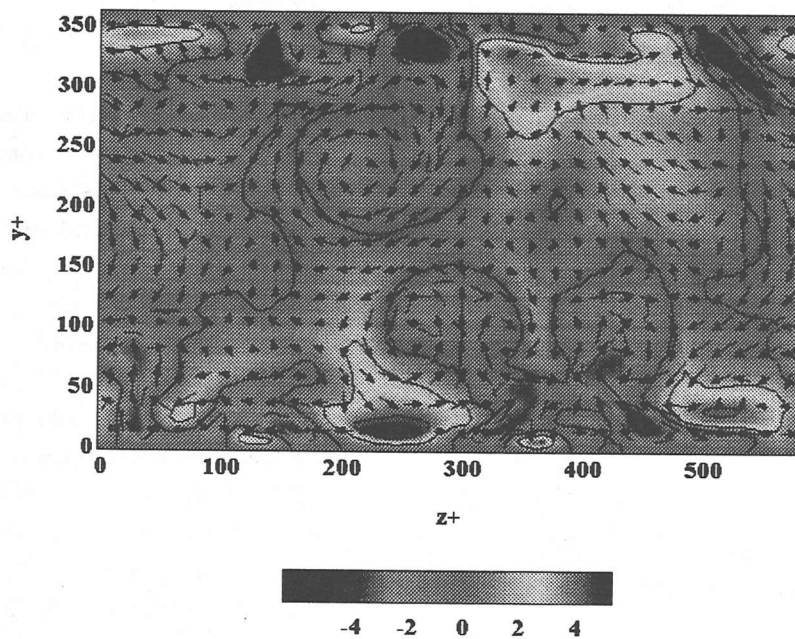


図-13 u^+ の面コンターと y - z 断面速度ベクトル ($x^+ \doteq 560$)

次に、5 次風上差分スキームによる解析から、ある時刻の瞬間場を見たのが図-12, 13 である。図-12 はバッファ層 ($y^+ \doteq 13$) における速度変動 u^+ の分布を示したもので、縞状に伸びた低速ストリークが wall unit で約 100 ν/u_τ の間隔で存在²¹⁾している様子が見える。図-13 はチャンネル中央 ($x^+ \doteq 560$) における y - z 断面の u^+ のコン

ターと v^+ , w^+ の瞬間速度ベクトルを重ね合わせたものであり、両図から低速ストリーク上では上昇流、高速ストリーク上では下降流が形成されているのが確認できるなど、イジェクションやスウィープを始めとした瞬時構造を十分に再現することが可能であることがわかる。

最後に、本論文におけるすべての計算において波動解

の発生はまったくなく、不等間隔とすることでレギュラー格子の有用性が確認された。一方、中心差分ではすべてのスキームでクーラン数を1オーダー下げても数値的な不安定により発散するなど、実用計算への適用は困難なことがわかった。このことから、5次精度風上差分スキームは高精度な解を与えつつ、数値的安定性を改善するなど、適用範囲の拡大に寄与することがわかる。

6. まとめ

一次元線形対流問題を対象に、時間的・空間的離散化手法のカップリングによる解への影響検討を行った。次に、具体的計算として平行平板間乱流を対象に、風上差分スキームによるDNSを行い、スペクトル法と比較検討した。得られた結果から、以下の結論を得た。

- 1) 2次精度 Adams-Bashforth 法は時間的位相誤差が大きく、さらにクーラン数依存が認められるなど、乱流計算のような長時間ステップの時間進行には注意が必要である。
- 2) 3次精度 Adams-Bashforth 法と5次精度風上差分スキームをカップリングした解析は、線形問題においては、減衰および位相誤差もほとんど見受けられないような数値的安定化の効果がある。非線形問題である平行平板間流れにおいては、粗格子にもかかわらずスペクトル法に匹敵する精度が確保できるなど、工学的実用性が高い。
- 3) レギュラー格子による解析でも、不等間隔格子とすることで spurious 誤差を、また風上差分スキームを併用することで aliasing 誤差を除去すれば、安定した計算が可能である。

なお、今回構築した Navier-Stokes 方程式の直接数値計算法は、現在市販されているパーソナル・コンピュータでも十分実行可能であり、その工学的有用性は極めて高いと考えられる。

謝辞：本研究の遂行にあたり貴重な御教示や御討議を頂いた熊本大学 松崎和愛博士に厚くお礼申し上げる。

参考文献

- 1) 巽友正：ナビエ・ストークス方程式と乱流、第44回応用力学連合

会議演習稿集、pp.7-11, 1995.

- 2) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. : Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, J. Fluid Mech., vol. 177, pp. 133-166, 1987.
- 3) 鈴木哲也, 河村洋：乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性, 日本機械学会論文集 (B 編), 60 巻 578 号, pp. 3280-3286, 1994.
- 4) Kawamura, T. and Kuwahara, K. : Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, AIAA, 22nd Aerospace Sciences Meeting, paper. 84-0340, 1984.
- 5) 例えば, 風工学のための流れの数値シミュレーション法入門, 土木学会, 1992.
- 6) 小林敏雄, 森西洋平：2次元正方形キャビティ内流れの数値解析における対流項差分の影響, 生産研究, 40-1, pp. 9-15, 1988.
- 7) Rai, M. M. and Moin, P. : Direct Simulation of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes, J. Comput. phys., 96, pp. 15-53, 1991.
- 8) 宮内敏雄, 平田徹, 店橋譲：高次精度差分法を用いた三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較), 日本機械学会論文集 (B 編), 61 巻 592 号, pp. 4400-4405, 1995.
- 9) ローチェ, P. J. (高橋亮一他訳)：コンピュータによる流体力学 (上), 構造計画研究所, 1978.
- 10) 梶島岳夫：非圧縮流れのための上流補間法, 日本機械学会論文集 (B 編) 60 巻 578 号, pp. 3319-3326, 1994.
- 11) Leonard, B. P. : A survey of finite differences with upwinding for numerical modelling of the incompressible convective diffusion equation, Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, 2, Pineridge Press, 1981.
- 12) Leonard, B. P. : A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, Comput. Methods. Applied Mech. & Eng., 19, pp. 59-98, 1979.
- 13) 笠木伸英：乱流の直接数値シミュレーション, 機械の研究, 第45巻第1号, pp. 111-115, 1993.
- 14) Kim, J. and Moin, P. : Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equation, J. Comput. phys., 59, pp. 308-323, 1985.
- 15) 梶島岳夫：対流項の差分形式とその保存性, 日本機械学会論文集 (B 編), 60 巻 574 号, pp. 2058-2063, 1994.
- 16) パタンカー, S. V. (水谷幸夫, 香月正司共訳)：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985.
- 17) 桑原邦郎：乱流のシミュレーション, 日本物理学会誌, 40 巻 11 号, pp. 877-884, 1985.
- 18) 笠木伸英：直接数値シミュレーションによる乱流輸送現象のデータベース構築に関する研究, 平成3年科学研究費補助金 (総合研究 A) 研究成果報告書, 1992.
- 19) Moin, P. and Kim, J. : Numerical investigation of turbulent channel flow, J. Fluid Mech. Vol. 118, pp. 341-377, 1982.
- 20) 松崎和愛, 本田逸郎, 吉田順一, 宗像瑞恵, 程詠華：高次精度差分法を用いた非圧縮流れの解析法に関する研究, 日本機械学会論文集 (B 編), 64 巻 627 号, pp. 3530-3536, 1998.
- 21) 例えば, 日野幹雄：流体力学, 朝倉書店, 1992.

(1999年4月23日受付)