

Hyperfunction の概念によるスカラー成層波動場の Green 関数のスペクトル表現の誘導

On the Spectral Representation of Green's function for a Layered Acoustic Medium
by Means of the Concept of the Hyperfunction

東平光生*

Terumi Touhei

*正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

The purpose of this research is to derive the spectral representation of Green's function for an acoustic layered medium by means of the concept of the Hyperfunction. The concept of the Hyperfunction used here is that the Hyperfunction is the result of the difference of the boundary values of the wave function on the spectrum in the complex wavenumber plane. The eigenfunction for the continuous spectrum is assumed to be the Hyperfunction due to Green's function in the resolvent set. Green's function in the resolvent set satisfies the radiation condition, so that the definition and calculation for the energy integral for the continuous spectrum is carried out without any difficulty. As a result, the kernel of the integral for the continuous spectrum is decomposed into eigenfunctions. The decomposed form agrees with the previous result which the author showed.

Key Words : Acoustic Layered Medium, Green's function, Spectral theory, Hyperfunction

1. はじめに

地震工学や応用力学の分野では、成層弾性波動場の Green 関数を求めることは重要な課題である。これは、成層波動場の応答を求めることにとどまらず、成層媒質中の散乱体による散乱波動の解析にも有効であることが期待される¹⁾ためである。この成層弾性波動場の Green 関数と固有値問題との関わりとして、正規モード解による Green 関数の合成の問題²⁾が挙げられるが、応用力学の場合において、成層弾性波動場の Green 関数を固有値問題としての一貫した視点から考察することは、あまりなされてこなかったようである。

固有値問題そのものの出発点は、たとえば、固有振動の問題などのように極めて物理的、実際的な問題意識に支えられている。しかし、固有値問題の一貫した視点から成層波動場の Green 関数を捉えようとする、波動場の放射条件と関連して、必然的に固有値の拡張概念としてのスペクトルを必要とし、応用力学の場合においても関数解析学的なアプローチが要求されることになる。関数解析学的なアプローチによる抽象的な数学の論理体系と具体的な弾性波動の問題の二つの対極から波動の本質を見極めようとする研究は、弾性波動の Green 関数を固有値問題としての一貫した視点から考察することがあまりなされてこなかった現状を考えると、応用力学の場合でも今後に残された課題であると思われる。

これまで、著者は成層波動場の離散と連続スペクトルの固有関数による Green 関数のスペクトル分解³⁾⁻⁵⁾について論じてきた。この中で特に、成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル分解⁵⁾については固有関数の直交関係式を用いることができなかったため、定式化はあいまいな点も多く見られることになった。その後、佐藤の超関数(Hyperfunction)⁶⁾⁷⁾の概念を用いた弾性波動場の Green 関数のスペクトル分解の結果を正当化する方法⁸⁾を見出したものの、多くの事柄を限られた紙面に定式化のプロセスを大幅に簡略化して記述することになってしまった。定式化のプロセスを簡略化せざるを得なかった背景には、弾性波動場を直接扱わざるを得なかったこともある。そこで、本論文ではスカラー成層波動場(ここでは弾性流体)の Green 関数のスペクトル分解を Hyperfunction の概念を用いることで展開し、展開のプロセスが極力明解になるように試みる。そして、Hyperfunction の概念を用いることで、連続スペクトルの固有関数に関する内積の扱いが自然な形で行えること、得られた結果が著者のこれまでに得てきた結果³⁾⁴⁾と一致することを示す。

また、Green 関数のスペクトル表現に関わる本研究の今後の展望のために、本論文の Appendix では、スペクトル分解表現された Green 関数による 3 次元弾性流体中の散乱体による散乱波動解析の例題を紹介する。そして、散乱波のスペクトルの検討における Green 関数のスペクトル表現の一つの可能性を示す。

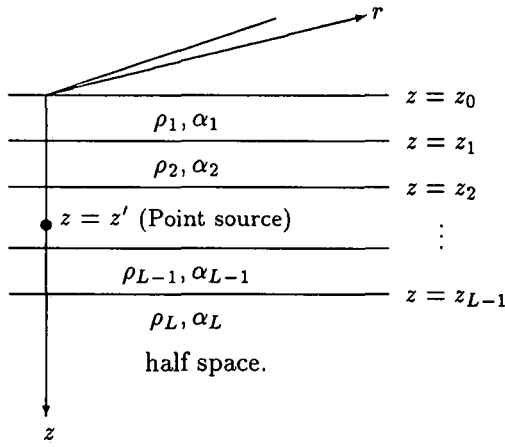


Fig. 1 Point source in a layered scalar wave field.

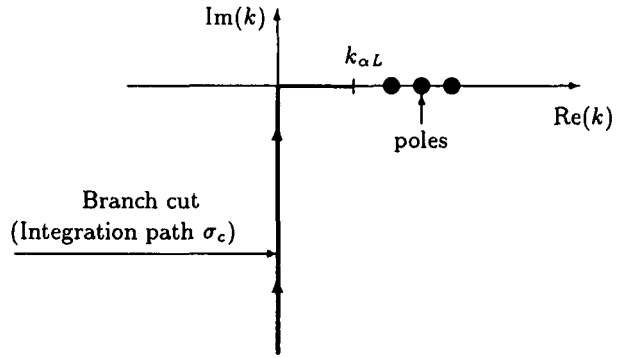


Fig. 2 Integration path in the complex wavenumber plane.

2. Green 関数とスペクトルおよび Hyperfunction の概念

Fig.1 に示す成層構造を有する弾性流体からなる波動場を考える。図中の ρ は媒質の密度、 α は音速を示す。これらの物理量は層ごとに一定の値を持つものとし、これらの物理量の添え字は層の番号を表わすことにする。また、後述の議論では、これらの物理量は深さ方向の関数として、 $\rho(z)$ あるいは $\alpha(z)$ と表記されることもある。ただし、 z は深さ方向を表す鉛直座標で下向きを正にとる。媒質内部に点源がある場合の波動場は Green 関数によって記述され、Green 関数の満たすべき方程式は次式となる。

$$(\nabla^2 + k_\alpha^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - z') \quad (1)$$

ここに、 k_α 媒質の波数、 δ は Dirac のデルタ関数、 $\mathbf{r}$ は観測点、 $\mathbf{r}'$ はソース点、 r は観測点とソース点の水平距離、 z は観測点の鉛直座標、 z' はソース点の鉛直座標を表わす。媒質の波数 k_α は媒質の物理定数が層ごとに一定であることから、 k_α の値も層ごとに一定の値を持つことに注意する。

前論文⁴⁾ に示したように、Green 関数は次のように表現することができる。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{2} \sum_{k_n \in \sigma_p} k_n H_0^{(2)}(k_n r) \text{Res}_{k=k_n} g_k(z, z') - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_c} k H_0^{(2)}(kr) (g_k^\uparrow(z, z') - g_k^\downarrow(z, z')) dk \quad (2)$$

ここに、 g_k は波数領域の Green 関数であり、添え字の $\uparrow$ と $\downarrow$ は半無限層で up-going と down-going の波動であることを示している。また、 k_n は g_k の極であり、 σ_p は k_n の集合を示す。cut-off frequency の存在によって、 σ_p は有限集合となる。また、 $H_0^{(2)}$ は 0 次の第 2 種の

Hankel 関数である。波数領域の Green 関数 g_k は次式を満足する。

$$(T - k^2) g_k(z, z') = -\delta(z - z') \quad (3)$$

ただし、

$$T = \frac{d^2}{dz^2} + k_\alpha^2 \quad (4)$$

である。ここで、Green 関数の物理量を弾性流体の変位ポテンシャルとすれば、 g_k は層境界で次式を満足する。

$$\begin{aligned} \rho_j g_k(z_j - \epsilon, z') &= \rho_{j+1} g_k(z_j + \epsilon, z') \\ \frac{d}{dz} g_k(z_j - \epsilon, z') &= \frac{d}{dz} g_k(z_j + \epsilon, z') \end{aligned} \quad (5)$$

($j = 1, 2, \dots, L-1$)

ここに、 ϵ は無限小の正数である。なお、変位ポテンシャルに密度を掛けた物理量は、流体圧力になることに注意する。この意味で、媒質の自由表面では圧力がゼロであることから、 $g_k(z_0, z') = 0$ が成立する。

前論文⁴⁾ で示したように σ_p は離散スペクトル σ_c は連続スペクトルとして特徴づけられる。今後の展開ではスペクトル上の波数を表すために変数 k を使い、スペクトルの補集合としてのレゾルベント集合上の波数を τ で表すことにする。したがって、レゾルベント集合上の波数を持つ波数領域の Green 関数は g_τ で表されることになる。なお、式(2)の表現に現れる σ_c は g_τ のための branch cut であり、up-going の波動は第 4 象限のレゾルベントの波数から σ_c への極限移行で、down-going の波動は第 1 象限から第 3 象限のレゾルベントの波数から、 σ_c への極限移行で得られる。

g_τ のための branch cut は、 g_τ が半無限層で、

$$g_\tau = A_\tau \exp(-\nu_\tau z), \quad (z \geq z_{L-1}) \quad (6)$$

$$\nu_\tau = \sqrt{\tau^2 - k_{\alpha L}^2} \quad (7)$$

の形を有するために必要である。ここで、 $k_{\alpha L}$ は半無限層の媒質の波数である。また、 A_τ はソース点の位置や表層の影響が決まる τ に依存する係数である。Fig. 2 に示す cut をとった場合には、一つの Riemann 葉全

体(ただし, 連続スペクトルは除く)で $\text{Re}(\nu_\tau) > 0$ となり, レゾルベント集合全体で g_τ は放射条件を満足することになる. また, 連続スペクトル上では $\text{Re}(\nu_\tau) = 0$ となり, 連続スペクトル上の波動関数は放射条件を満足しない. この場合, 連続スペクトル上の波動関数は L_2 空間に属さない.

この g_τ は, 極や cut を除いた複素数の波数で定義されているから, τ に関しては解析的ということになる. すなわち, レゾルベント集合からみれば, スペクトルとは g_τ が τ に関して複素平面上で不連続になるところの波数の集合であると考えられることも可能である.

この観点から Hyperfunction と本研究とのつながりが生まれてくる. 一変数の Hyperfunction⁶⁾ とは簡単に言えば, $C \setminus \mathcal{R}$ 上の正則関数 $F(\tau)$ (ここに τ は複素変数, C は複素数, $\mathcal{R}$ は実数の集合) の実軸の上下からの境界値の差として表されるものである. すなわち, Hyperfunction $f(x)$ は $F(\tau)$ を用いて次のように表される.

$$f(x) = F(x + i\epsilon) - F(x - i\epsilon) \quad (8)$$

もちろん, $F(\tau)$ が実軸でも解析的ならば境界値に差は生じないから $f(x) = 0$ が結論できる. しかし, たとえば

$$F(\tau) = -\frac{1}{2\pi i \tau} \quad (9)$$

とすれば, $F(\tau)$ は原点で境界値の差を生じ, 実はこのとき, $f(x)$ は Dirac のデルタ関数となる. また,

$$F(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \log(-\tau) \quad (10)$$

とすれば, $f(x)$ は Heaviside の単位階段関数となる⁶⁾.

本論文では, この概念を用いてレゾルベント集合で定義された Green 関数のスペクトル上での境界値の差も Hyperfunction を与えるものと考えことにする. たとえば, 式(2)に現れた表現, $g_k^\uparrow - g_k^\downarrow, k \in \sigma_c$ はレゾルベント集合で定義された Green 関数の連続スペクトル上での境界値の差ということになり, たとえスペクトルが実数でなくとも, スペクトル上で Hyperfunction を与えているという理解を与えることにする. Hyperfunction の成書⁶⁾によれば, 前述の $F(\tau)$ は定義関数と呼ばれる. この意味で g_τ はスペクトル上の波動関数の定義関数ということになる.

レゾルベント集合で定義された Green 関数は前述のように放射条件を満足するから, 連続スペクトル上の波動関数は, 放射条件を満足できないとしても, レゾルベント集合上で波動の内積やエネルギーを定義し, 極限移行によって, 連続スペクトル上の波動のエネルギーを定義する自然な方法の定式化が期待できる. 以降では, こうした観点から議論を進めて行く.

3. Green 関数を構成する留数項の固有関数への分解について

Aki&Richards のテキスト²⁾ §7.4 では成層弾性波動場の Green 関数と正規モードの関係が扱われ, Green 関数を構成する留数項の固有関数への分解を, 固有関数の直交関係式を用いることなく展開している. ここで用いられる議論に Hyperfunction の概念を導入することで, 後述の連続スペクトルの積分核の固有関数への分解が得られるので, しばらく Aki&Richards のテキストの内容を弾性流体の波動場の問題に適用しながら概観することにする.

記号の用い方は, Aki&Richards のテキストと異なるが, Aki&Richards は波数領域の成層波動場の Green 関数を次のような二つの波動場の線形結合で表現している.

$$g_\tau(z, z') = u_\tau(z, z') + \frac{v_\tau(z)}{\Delta(\tau)} \quad (11)$$

ここに, $u_\tau(z, z')$ は次の関係を満たす波動場である.

$$u_\tau(z, z') = 0 \quad (z > z') \quad (12)$$

$$(T - \tau^2)u_\tau(z, z') = -\delta(z - z') \quad (13)$$

すなわち, u_τ は $z = z'$ の深さでポテンシャルを拘束し, かつその点でデルタ関数で表現される外力を加えて得られる波動場である. 拘束した点でデルタ関数としての外力を加えることは, 境界条件として,

$$\left[\frac{d}{dz} u_\tau(z, z') \right]_{z=z'} = -1 \quad (14)$$

を与えることに等しい. このとき, τ がこの閉じた領域 ($z' \geq z \geq 0$) の固有値でない限り, u_τ は自由表面上の境界条件を満足することができない. このため, g_τ が自由表面上の境界条件を満足できるように $v_\tau(z)/\Delta(\tau)$ を加えることになる. ここに,

$$(T - \tau^2)v_\tau(z) = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \quad (15)$$

であり, $\Delta(\tau)$ は v_τ の振幅を調整する関数である.

Aki&Richards のテキストでは波数 τ は実数であることを想定していたと考えられるが, もちろん τ はレゾルベント集合に属すると考えて良い. こうして, τ をスペクトルへ極限移行したときの g_τ の振る舞いを考察するという視点が生まれてくる.

Aki&Richards は $\Delta(\tau)$ を評価するのに, エネルギー積分を用いている. 自由表面の鉛直座標を $z = 0$ として, エネルギー積分の出発点を次の内積にとる.

$$\begin{aligned} & \langle v_\tau(z), (T - \tau^2)v_\tau \rangle \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \rho(z) v_\tau(z) (T - \tau^2)v_\tau(z) dz \\ & = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

内積の定義の中に, 質量密度を入れる理由は, 層間の圧力の連続条件を確保するためである. レゾルベント集合上の波動場は放射条件を満足するから, 内積の演

算やそれに付随する部分積分の演算には意味を持つことに注意する。τが正規モードの波数付近にある場合には、波動場が放射条件を満足することは、むしろ当然に近いかもしれないが、連続スペクトルを扱う場合には重要な性質となる。

式(16)に部分積分を施すことで次式を得る。

$$\begin{aligned} & \langle v_\tau(z), (T - \tau^2)v_\tau \rangle \\ &= \left[\rho(z)v_\tau(z) \frac{d}{dz} v_\tau(z) \right]_0^\infty + \omega^2 I_1 - \tau^2 I_2 - I_3 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 I_j , $j = 1, 2, 3$ はエネルギー積分で次式で定義される。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha(z)^2} v_\tau(z)^2 \rho(z) dz \\ I_2 &= \int_0^\infty v_\tau(z)^2 \rho(z) dz \\ I_3 &= \int_0^\infty v'_\tau(z)^2 \rho(z) dz \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、

$$v'_\tau(z) = \frac{d}{dz} v_\tau(z) \quad (19)$$

とした。

式(11)のGreen関数が自由表面上の境界条件を満足することを用いれば、

$$v_\tau(0) = -\Delta(\tau)u_\tau(0, z') \quad (20)$$

が得られるから、式(17)の境界項を書き換えると式(17)は次のように変形できる。

$$\rho(0)\Delta(\tau)u_\tau(0, z')v'_\tau(0) = I_3 + \tau^2 I_2 - \omega^2 I_1 \quad (21)$$

すなわち、

$$\frac{1}{\Delta(\tau)} = \frac{\rho(0)u_\tau(0, z')v'_\tau(0)}{I_3 + \tau^2 I_2 - \omega^2 I_1} \quad (22)$$

また、τがFig. 1に示した波動場の正規モードの波数に等しいとき(たとえば、 k_n)次式が成立する。

$$\rho(0)u_\tau(0, z')v'_\tau(0) = \rho(z')\varphi_n(z') \quad (23)$$

ここに、 φ_n は波数 k_n に対する正規モードである。式(23)を示すためには

$$\begin{aligned} & \int_0^{z'-\epsilon} \rho(z)u_\tau(z, z')(T - \tau^2)v_\tau(z) dz \\ & - \int_0^{z'-\epsilon} \rho(z)v_\tau(z)(T - \tau^2)u_\tau(z, z') dz = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

の部分積分をとり境界項に着目すれば良い。特に、τは正規モードの波数に等しいので、 v_τ は正規モードとなり、自由表面上の境界条件を満足することが利用できる。

また、エネルギー積分の性質から、τが正規モードの波数に等しいとき、式(21)の右辺はゼロになる。これは、式(17)の内積の値がゼロになることと、正規モードの波数をとったとき、同様に式(17)の右辺の境界項がゼロになることに基づく。したがって、 $\Delta(\tau)$ も正規モー

ドの波数でゼロ点を有することが分かる。すなわち、式(11)のτが正規モードの波数 k_n に近づいたとき、 v_τ が φ_n に近づいて行くことを考慮して、次の表現を得る。

$$g_\tau(z, z') \underset{\tau \rightarrow k_n}{\sim} \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(z')\rho(z')}{\Delta(\tau)} + u_{k_n}(z, z') \quad (25)$$

これより、式(25)の留数を計算すれば、

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\tau=k_n} g_\tau(z, z') &= \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(z)\rho(z)}{\Delta'(k_n)} \\ &= \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(z)\rho(z')}{2k_n I_2} \end{aligned} \quad (26)$$

となる。正規モードを $I_2 = 1$ となるように正規化すれば、前論文⁴⁾に示されたGreen関数の離散スペクトル項と一致することが確かめられる。ここではもちろん、式(18)より $I_2 = \langle \varphi_n(z), \varphi_n(z) \rangle$ であることに注意する。

4. 連続スペクトルの積分核の固有関数への分解とHyperfunction

4.1 積分核の固有関数への分解

次に、前述の離散スペクトルの項の固有関数への分解のプロセスをたどりながら、連続スペクトルの積分核を固有関数へ分解する。式(2)に示したように、連続スペクトルの積分核は $(g_k^\uparrow(z, z') - g_k^\downarrow(z, z'))$ で与えられ、この固有関数への分解がここでの問題である。

τをレゾルベント集合上にとり、up-goingとdown-goingの波動を表すGreen関数を式(11)と同様に次のように表現する。

$$g_\tau^\uparrow(z, z') = u_\tau(z, z') + \frac{v_\tau^\uparrow(z)}{\Delta^\uparrow(\tau)} \quad (27)$$

$$g_\tau^\downarrow(z, z') = u_\tau(z, z') + \frac{v_\tau^\downarrow(z)}{\Delta^\downarrow(\tau)} \quad (28)$$

また、連続スペクトルの固有関数はup-goingとdown-goingの波動関数の差によって生じたから⁴⁾、ここでは連続スペクトルの固有関数を次のように表現しておく。

$$\psi_k(z) = v_k^\uparrow(z) - v_k^\downarrow(z) \quad (k \in \sigma_c) \quad (29)$$

波動関数に付けた添え字↑および↓は波動の半無限層での方向を示すものであるが、式(27)および(28)の $v_\tau^\uparrow$ と $v_\tau^\downarrow$ は、レゾルベント集合で定義されたひとつの波動関数 v_τ が連続スペクトルへの近づき方によって、異なる進行方向の波動を示しているに過ぎないことに注意する。連続スペクトル上の固有関数は、式(29)の表現によって、レゾルベント集合で定義された波動場 v_τ の連続スペクトル上の境界値の差として現れていることが明確になる。

留数項の固有関数への分解での議論と同様に、 $\Delta^\uparrow(\tau)$ および $\Delta^\downarrow(\tau)$ を連続スペクトルのエネルギー積分を定義することによって評価する。連続スペクトルのエネルギー積分を定義するために、up-goingの波動を用い

て出発点を次の内積にとる.

$$\langle \psi_k(z), (T - \tau^2)v_\tau^\dagger(z) \rangle = 0 \quad (30)$$

τ がレゾルベント集合にあれば、波動関数は放射条件を満足するから、連続スペクトルの固有関数が L_2 に属さなくても内積は意味を持ち、前述のように内積を主発点とした部分積分も同様に意味を持つ。Hyperfunction の視点を導入することの意義がこの点にある。式(30)に適当な部分積分を施し、内積の結果を次のように表す。

$$\begin{aligned} & \langle \psi_k(z), (T - \tau^2)v_\tau^\dagger(z) \rangle \\ &= \left[\rho(z)\psi_k(z) \frac{d}{dz} v_\tau^\dagger(z) \right]_0^\infty \\ & \quad - \left[\rho(z)v_\tau(z) \frac{d}{dz} \psi_k(z) \right]_0^\infty \\ & \quad + \langle (T - k^2)\psi_k(z), v_\tau^\dagger(z) \rangle \\ & \quad + (k^2 - \tau^2) \int_0^\infty \rho(z)\psi_k(z)v_\tau^\dagger(z) dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、up-going の波動による連続スペクトルのエネルギー積分を $E^\dagger(k, \tau)$ として、次のように定義する。

$$E^\dagger(k, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} (k^2 - \tau^2) \int_0^\infty \rho(z)\psi_k(z)v_\tau^\dagger(z) dz \quad (32)$$

また、連続スペクトルの固有関数が境界条件ならびに対応する方程式の同次解であることから、式(31)の右辺の第1項と第3項がゼロになる。したがって、式(31)は次のように変形される。

$$\rho(0)\Delta^\dagger(\tau)u_\tau(0, z')\psi'_k(0) + E^\dagger(k, \tau) = 0 \quad (33)$$

ただし、ここでは式(27)の $g_\tau^\dagger$ が自由表面の境界条件を満足することから、

$$v_\tau^\dagger(0) = -\Delta^\dagger(\tau)u_\tau(0, z') \quad (34)$$

を用いている。

連続スペクトルのエネルギー積分 $E^\dagger(\tau, k)$ は、後述のように極限移行 $\tau \rightarrow k \in \sigma_c$ によってもゼロでない有限な値を持つ。この値をここでは $E_k^\dagger$ と表記する。また、留数項の正規モードへの分解のプロセスで用いた式(23)に相当する関係式

$$\rho(0)u_k(0, z')\psi'_k(0) = \rho(z')\psi_k(z') \quad (k \in \sigma_c) \quad (35)$$

を用いれば、レゾルベント集合上の Green 関数からの極限移行として、連続スペクトル上の up-going の波動の Green 関数が次式のように得られる。

$$g_k^\dagger(z, z') = u_k(z, z') - \frac{v_k^\dagger(z)\psi_k(z')\rho(z')}{E_k^\dagger} \quad (k \in \sigma_c) \quad (36)$$

同様な手続きを踏むことで、連続スペクトル上の down-going の波動に関する Green 関数が次のように得られる。

$$g_k^\downarrow(z, z') = u_k(z, z') - \frac{v_k^\downarrow(z)\psi_k(z')\rho(z')}{E_k^\downarrow} \quad (k \in \sigma_c) \quad (37)$$

ただし、 $E_k^\downarrow$ は down-going の波動による連続スペクトルのエネルギー積分で、

$$E_k^\downarrow \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \rightarrow k} E^\downarrow(k, \tau) \quad (38)$$

$$E^\downarrow(k, \tau) = (k^2 - \tau^2) \int_0^\infty \rho(z)\psi_k(z)v_\tau^\downarrow(z) dz \quad (39)$$

としている。

後ほど、連続スペクトル上のエネルギー積分は波動の伝播方向に依らないことが示され、結果として連続スペクトルのエネルギー積分 E_k が次のように定義できることになる。

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} E_k^\dagger = E_k^\downarrow, \quad k \in \sigma_c \quad (40)$$

したがって、レゾルベント集合で定義された Green 関数の、連続スペクトル上での境界値の差は固有関数に分解され、以下ようになる。

$$g_k^\dagger(z, z') - g_k^\downarrow(z, z') = -\frac{\psi_k(z)\psi_k(z')\rho(z')}{E_k} \quad (41)$$

この式は、分岐線積分の積分核の固有関数への分解式に他ならない。以下では、この分解式が前論文⁴⁾の結果と一致することをエネルギー積分の性質と共に示して行く。

4.2 連続スペクトルのエネルギー積分の評価

ここでは、連続スペクトルのエネルギー積分 $E_k^\dagger$ および $E_k^\downarrow$ を求め、これらが等しいことを示す。まず、エネルギー積分に寄与するものは表層部分の波動関数ではないことに注意する。なぜなら、表層部分の波動場による積分値は有限な値となり、 $(k^2 - \tau^2)$ との掛け算によって $\tau \rightarrow k$ のときゼロに近づいて行くからである。したがって、エネルギー積分に寄与するものは、半無限層部分の波動場で、積分値が発散するものである。

半無限層部分での波動関数は以下の形を持つ。

$$v_\tau(z) = A_\tau \exp(-\nu_\tau z) \quad (z \geq z_{L-1}, \tau \in \mathcal{C} \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)) \quad (42)$$

そして、 τ の連続スペクトルへの近づきかたによって、up-going の波動か down-going の波動かが決まる。たとえば、第1象限から第3象限のレゾルベント集合上の τ から連続スペクトルへ近づけるときは、

$$\nu_\tau = i\bar{\nu}_{k'} + \epsilon \quad (43)$$

となり、down-going の波動として、

$$v_\tau^\downarrow(z) = A_\tau^\downarrow \exp(-(i\bar{\nu}_{k'} + \epsilon)z) \quad (z \geq z_{L-1}, k' \in \sigma_c) \quad (44)$$

を得る。ただし、ここではあくまで τ は連続スペクトルに非常に近い場所でのレゾルベント集合にあるものと考え $\tau = k' + i\epsilon(k')$ が負の虚数軸の場合は $\tau = k' - \epsilon$ としている。また、式(44)の $\bar{\nu}_{k'}$ は

$$\bar{\nu}_{k'} = \sqrt{k_{\alpha L}^2 - k'^2} \quad (45)$$

を意味する。連続スペクトル上の波数として k' を用い、 k と区別する理由は、以下で極限移行 $k' \rightarrow k$ を考察するためである。以降では、便宜的に式 (43) で与えられた ν_r を $\nu_r^\dagger$ と表記する。

同様に、第4象限のレゾルベント集合上の τ を連続スペクトルの波数へ近づけるときは、

$$\nu_r = -i\bar{\nu}_{k'} + \epsilon \quad (46)$$

から、up-going の波動として、

$$\begin{aligned} v_r^\dagger(z) &= A_r^\dagger(\tau) \exp((i\bar{\nu}_{k'} - \epsilon)z) \\ (z \geq z_{L-1}, \quad k' \in \sigma_c) \end{aligned} \quad (47)$$

を得る。以降では、便宜的に式 (46) で与えられた ν_r を $\nu_r^\dagger$ と表記することにする。

以上より、連続スペクトルの固有関数は、半無限層で次の形を持つ。

$$\begin{aligned} \psi_k(z) &= v_k^\dagger(z) - v_k^\dagger(z) \\ &= A_k^\dagger \exp(i\bar{\nu}_k z) - A_k^\dagger \exp(-i\bar{\nu}_k z) \\ (z \geq z_{L-1}) \end{aligned} \quad (48)$$

ここまで来れば、エネルギー積分の評価が可能となる。式 (27) の $E^\dagger(k, \tau)$ を評価するための被積分関数は半無限層で以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho(z)\psi_k(z)v_r^\dagger(z) &= \rho_L A_k^\dagger A_r^\dagger \exp((i\bar{\nu}_{k'} + i\bar{\nu}_k - \epsilon)z) \\ &\quad - \rho_L A_k^\dagger A_r^\dagger \exp((i\bar{\nu}_{k'} - i\bar{\nu}_k - \epsilon)z) \end{aligned} \quad (49)$$

この中で、右辺第1項の積分の結果は、極限移行によっても有限な値に収まるので、 $(k^2 - \tau^2)$ との掛け合わせと極限移行でゼロとなり、エネルギー積分の結果には寄与しない。一方、右辺第2項の積分値は極限移行で発散するので、エネルギー積分の評価では右辺第2項の積分値の発散の様子を追跡する必要があることになる。

積分を実行するにあたり、Fig.1 より半無限層の積分区間は $[z_{L-1}, \infty)$ であることが分かる。しかし、積分の評価では区間を $[0, \infty)$ としてもエネルギー積分そのものには影響を与えない。この理由は区間 $[0, z_{L-1})$ の積分値は有限であり、 $(k^2 - \tau^2)$ との掛け合わせでゼロに近づいて行くためである。そこで、積分区間を $[0, \infty)$ として式 (49) の右辺第2項の積分値に着目してエネルギー積分を評価する。

これまでの議論からエネルギー積分 $E_k^\dagger$ は

$$\begin{aligned} E_k^\dagger &= -\lim_{\tau \rightarrow k} (k^2 - \tau^2) \rho_L A_r^\dagger A_k^\dagger \times \\ &\quad \int_0^\infty \exp((-i\bar{\nu}_k - \nu_r^\dagger)z) dz \end{aligned} \quad (50)$$

として良いことは明らかである。ここでは、この極限移行を行うために、任意の小さな正数を δ として $\tau = k' - i\delta$ と置く (k' が虚数軸にある場合は $\tau = k' + \delta$ とする)。このとき、

$$\nu_r^\dagger = -i\bar{\nu}_{k'} + \frac{k'}{\bar{\nu}_{k'}} \delta + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (51)$$

$$k^2 - \tau^2 = k^2 - k'^2 + 2ik'\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (52)$$

とできるから、まず、 $k' \rightarrow k$ の極限移行を実行することで、

$$\begin{aligned} E_k^\dagger &= -2ik\delta \rho_L A_k^\dagger A_k^\dagger \frac{\bar{\nu}_k}{k\delta} \\ &= -2\rho_L i\bar{\nu}_k A_k^\dagger A_k^\dagger \quad (k \in \sigma_c) \end{aligned} \quad (53)$$

が得られる。また、同様の手続きを踏むことで、

$$E_k^\dagger = -2\rho_L i\bar{\nu}_k A_k^\dagger A_k^\dagger \quad (k \in \sigma_c) \quad (54)$$

が得られる。すなわち、前述のようにエネルギー積分の結果は、up-going の波動でも down-going の波動でも同じ値を生み、波動の方向に依らないことが確かめられる。

著者の先のスカラー波動場の結果⁴⁾では、固有関数を正規化していたから、このエネルギー積分にも正規化の条件を導入する。連続スペクトルの固有関数の主要部、すなわち半無限層での形状を

$$\begin{aligned} \psi_k(z) &= a_k \cos(\bar{\nu}_k z) + b_k \sin(\bar{\nu}_k z) \\ (z \geq z_{L-1}) \end{aligned} \quad (55)$$

としたとき、正規化の条件は

$$a_k^2 + b_k^2 = \frac{2|k|}{\pi \bar{\nu}_k \rho_L} \quad (56)$$

であった。ここで用いた固有関数の係数との対応関係は

$$a_k^2 + b_k^2 = -4A_k^\dagger A_k^\dagger \quad (57)$$

となるから、正規化の条件は、

$$A_k^\dagger A_k^\dagger = -\frac{|k|}{2\pi \bar{\nu}_k \rho_L} \quad (58)$$

とも表される。したがって、エネルギー積分は

$$E_k = -\frac{|k|}{\pi i} \quad (59)$$

となり、積分核の固有関数への分解は

$$g_k^\dagger(z, z') - g_k^\dagger(z, z') = \frac{\pi i}{|k|} \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') \quad (60)$$

と完全な一致が確かめられる。

以上、離散スペクトルの分解と連続スペクトルの分解をあわせ、Green 関数は、次のスペクトル分解の表現を持つことになる。

$$\begin{aligned} G(r, r') &= -\frac{i}{4} \sum_{k_n \in \sigma_p} H_0^{(2)}(k_n r) \varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z') \\ &\quad - \frac{i}{4} \int_{\sigma_c} H_0^{(2)}(kr) \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') |dk| \end{aligned} \quad (61)$$

5. 終わりに

本論文では、スカラー成層波動場(ここでは弾性流体)の Green 関数のスペクトル表現を求めるプロセスに Hyperfunction の概念を用いた。基本的な出発点は Aki&Richards のテキスト §7.4 で論じられた、Green 関数を構成する留数項の固有関数への分解の方法であっ

た. ここでは, Aki&Richardsのテキストで論じられた手法をレゾルベント集合上の波数からスペクトルへの極限移行によってGreen関数とスペクトル上の固有関数を結び付けるものとして捉えた. そして, そこにHyperfunctionの概念を導入することで連続スペクトルのエネルギー積分を定義した. また, レゾルベント集合で定義されたGreen関数のスペクトル上での境界値の差をHyperfunctionとみなし連続スペクトルの積分核の固有関数への分解を行った. レゾルベント集合上のGreen関数が放射条件を満足するという性質により, 内積やエネルギーの定義および計算が自然な形で行われ, 固有関数への分解の結果も著者のこれまでの結果と一致することが見出せた.

Appendix-A Green関数のスペクトル表現の可能性について

Green関数のスペクトル表現そのものは, 固有値問題とGreen関数の関係を明確にする上で意味があるが, この問題はあくまでも数学上の形式の問題と言える. したがって, この形式が応用力学, あるいは工学上の意味において有意義かどうかはまた別の問題である. このAppendixでは, スペクトル表現されたGreen関数の利用に関する今後の可能性について, 簡単な数値計算結果を紹介することで言及する.

ここでは簡単のため, 3次元の半無限弾性流体中の散乱体による散乱問題を扱う. この波動場におけるGreen関数のスペクトル分解表現は次式となり,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} \int_{\sigma_c} H_0^{(2)}(kr) \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') |dk| \quad (\text{A.1})$$

離散スペクトルの項は存在しない. 連続スペクトルの固有関数は次式で表される.

$$\psi_k(z) = a_k \sin(\bar{\nu}_k z), \quad (k \in \sigma_c) \quad (\text{A.2})$$

ここに, a_k は規格化のための係数で次式で示される.

$$a_k = \sqrt{\frac{2|k|}{\pi \bar{\nu}_k k^2 \rho}} \quad (\text{A.3})$$

散乱体の境界を Γ で表し, 簡単のため境界条件としてDirichletの条件を与える. 境界に平面波が入射したときの境界積分方程式は次式となる.

$$s(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') q(\mathbf{r}') d\Gamma(\mathbf{r}') + u_I(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

ここに, $s(\mathbf{r})$ は以下に示す関数である.

$$s(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in \Gamma \\ 1 & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

ただし, Ω は波動場の領域を示す. また, 式(A.4)において q は変位ポテンシャルの境界上での法線方向微分(すなわち法線方向の変位)を, u_I は入射波を示す.

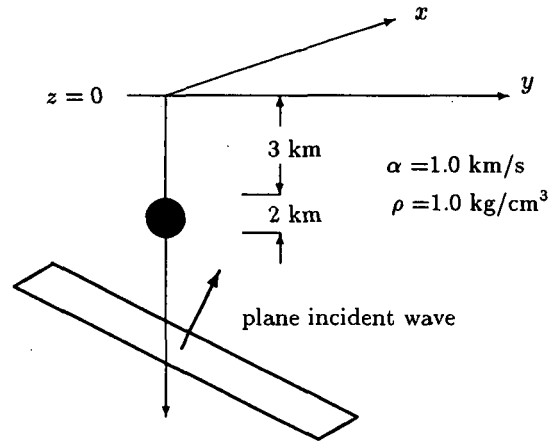


Fig. A.1 Spherical obstacle in a homogeneous half space.

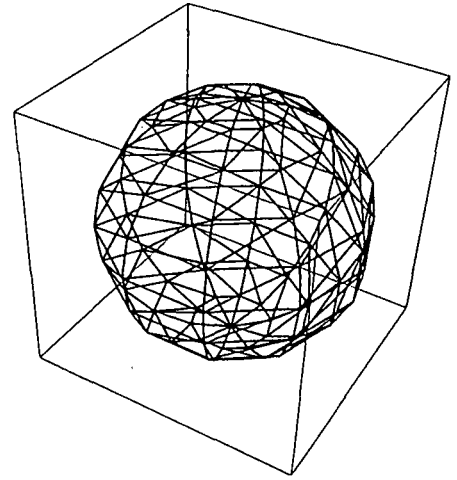


Fig. A.2 Boundary elements for the spherical obstacle.

散乱波動場の解析は式(A.4)を離散化し境界要素法のスキームを用いる. Green関数の特異点を含む積分の離散化は, Green関数が特異点近傍で,

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} + O(1) \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0) \quad (\text{A.6})$$

の性質を持つことを利用し, Green関数から特異点を除去して数値積分を行い, 特異性を考慮して $(4\pi R)^{-1}$ の積分を実行した結果を加えることにより行う.

次に, Green関数のスペクトル表現に現れるスペクトルの積分と境界積分方程式の順序の交換の問題について考えてみる. 式(A.4)の境界積分方程式にGreen関数のスペクトル表現の式(A.1)を代入し, 形式的に離散スペクトルの和と連続スペクトルの積分を境界積分と順序の交換を行うと次式を得る.

$$\begin{aligned} s(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) &= + \int_{\sigma_c} \psi_k(z) |dk| \int_{\Gamma} \left(-\frac{i}{4}\right) H_0^{(2)}(kr) \psi_k(z') \rho(z') q(\mathbf{r}') d\Gamma \\ &\quad + u_I(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

すなわち、散乱波動場は連続スペクトルの固有関数に分解され、散乱波のスペクトル解析への道筋が示される。

積分の順序の交換の数学的な保証は、Lebesgue 積分論での Fubini の定理を用いる。すなわち、Lebesgue 積分のテキスト⁹⁾の定理 15.2 の系に基けば、被積分関数の絶対値を取り、スペクトル積分と境界積分を実行したとき積分値が有限の場合に、境界積分とスペクトル積分の交換が可能となる。この条件は、式(A.7)において、 $r \neq 0$ となるから、観測点が散乱体から離れこの条件を満足する場合に積分の順序の交換が保証できることになる。

数値計算は、半無限均質波動場中の球によるによる平面波の散乱の問題を扱う。解析モデルを Fig. A.1 に散乱体の境界要素分割を Fig. A.2 に示す。まず、スペクトル表現された Green 関数を用いた境界積分方程式法による結果と、通常用いられる Green 関数

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik_\alpha R)}{4\pi R} - \frac{\exp(-ik_\alpha R')}{4\pi R'} \quad (\text{A.8})$$

による結果の比較を行う。ここに、 k_α は媒質の波数である。解析振動数を 1.0 Hz、平面入射波の方向ベクトルは直交座標系で

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1) \quad (\text{A.9})$$

とした場合の従来型の境界積分方程式による解と、スペクトル表現された Green 関数による境界積分方程式による解の比較の結果 Fig. A.3 に示す。ここでは横軸は波動場の観測点の x 座標の値を縦軸は波動の振幅を表している。また、観測点の y 座標はゼロとしている。図中、破線は従来型の境界積分方程式の解を、実線はスペクトル表現された Green 関数を用いた境界積分方程式の解を示す。両者の解はほとんど完全に一致し、スペクトル表現された Green 関数によっても精度の高い解析が可能であることが示されている。

次に、式(A.7)を用いて、散乱波がどのようなスペクトルの構造を持っているかを調べてみる。散乱波のスペクトル特性を Fig. A.4 および Fig. A.5 に示す。図中の座標はスペクトルを算出した観測点の位置を示している。図中の横軸は波数を示すが、負の領域では虚数を示す。これは横軸で連続スペクトルの波数 σ_c を表現するためである。また、縦軸は散乱波の連続スペクトルの固有関数 ψ_k の振幅を表すが、ここでは入射波振幅に対する比として無次元化して考える。ここでの散乱波は入射波成分を含まないことに注意する。

これらのスペクトルで明らかのように、スペクトルの振幅のピークは、 $k = \pi \text{ (km}^{-1}\text{)}$ 近くの波数に集まっている。この波動の水平方向の位相速度は、結局は媒質の波動の伝播速度そのものであり、散乱波の主成分は、ほぼ媒質の伝播速度で水平方向に伝播することが分かる。また、連続スペクトルの中で、虚数の波数成分は、観測点が散乱体から離れるに従い急速に減衰する。虚数の波数成分は、鉛直方向に伝播する波動の成

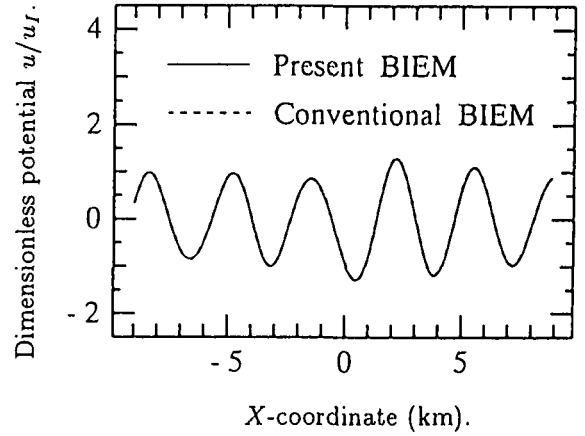


Fig. A.3 Comparison of displacement potential ($z=2 \text{ km}$).

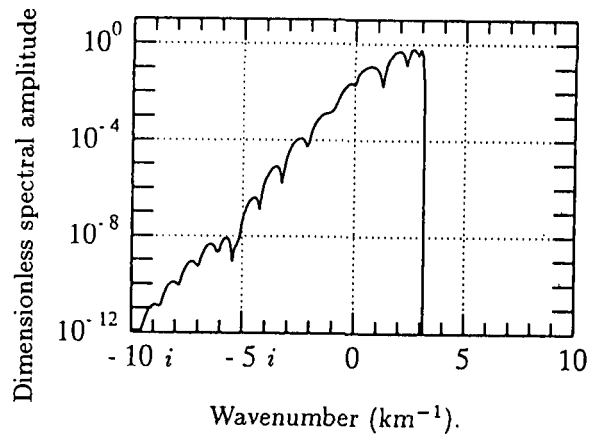


Fig. A.4 Wavenumber spectrum for the scattering wave ($x=3 \text{ km}$, $y=0 \text{ km}$, $z=0.5 \text{ km}$).

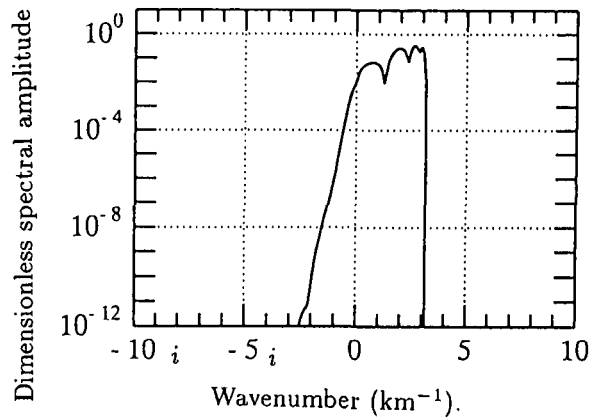


Fig. A.5 Wavenumber spectrum for the scattering wave ($x=10 \text{ km}$, $y=0 \text{ km}$, $z=0.5 \text{ km}$).

分であるから、散乱体から離れるに従い、急速に減衰することは、物理的な直感とも一致する。また、実数領域の連続スペクトルの波動はあまり減衰せず、一つの束のようになって遠方へ伝播して行くことも理解できる。

以上に示すように散乱波動は Green 関数のスペクトル表現を介して、固有関数への分解が可能になる. Green 関数の表現は媒質の層数に依存しないことから, こうした解析は, 多層媒質中での散乱波動の解析へとつながる. 本質的には Green 関数がスペクトル上の固有関数で完全に表現され, スペクトル積分と境界積分の順序の交換が可能になることに, Green 関数のスペクトル表現の意義がある.

参考文献

- 1) 東平光生: スペクトル表現された成層弾性流体波動場の Green 関数による散乱波のスペクトル解析, 土木学会論文集, 1999 (投稿中).
- 2) Aki, K. and Richards, P.G., *Quantitative Seismology*, Freeman and Company, 1980.
- 3) 東平光生: 離散固有値および連続固有値を用いた Green 関数のスペクトル分解表示について, 土木学会論文集, No.577/I-41, pp. 245-256, 1997.
- 4) 東平光生: スカラー成層波動場の Green 関数のスペクトル測度をを用いた表現, 応用力学論文集, Vol.1, pp. 245-256, 1998.
- 5) 東平光生: 離散および連続スペクトルを用いた成層弾性波動場の Green 関数の表現, 土木学会論文集, No.605/I-45, pp. 171-185, 1998.
- 6) 金子晃:(新版)超関数入門, 東京大学出版, 1996.
- 7) 今井功:応用超関数入門 I, II, サイエンス社, 1981.
- 8) 東平光生: Hyperfunction の概念による成層弾性波動場の Green 関数の分岐線積分核の分解について, 土木学会論文集, (投稿中).
- 9) 伊藤清三:ルベーク積分入門, 裳華房, 1963

(1999 年 4 月 23 日 受付)