

離散固有値および連続固有値を用いた2層構造を成す スカラー波動場のGreen関数の漸近展開表示

Asymptotic Expansion of Green's Function for a Layered Acoustic Half-Space
Represented by Discrete and Continuous Eigenvalues

中川英則*, 東平光生**

Hidenori NAKAGAWA and Terumi TOUHEI

*学生員 東京理科大学 理工学部 土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

**正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部 土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

This paper shows an asymptotic expansion of Green's function for a two-layered acoustic half-space. In general, an asymptotic expansion is able to give a brief overview for the physical phenomena at the far field from a source point by indicating the decaying factor, although, there is a difficulty to represent the asymptotic form due to the complicated modification of the wavenumber integral. In this paper, a proper modification of the wavenumber integral path is carried out to apply Watson's lemma, namely the wavenumber integration is transformed into Laplace transform. The asymptotic expansion obtained here is applicable to a generalized layered medium because of incorporating the representation of Green's function in terms of eigenvalues and takes some properties that are not found out through Green's function directly.

Key Words : *Green's function, Asymptotic expansion, Discrete eigenvalue, Continuous eigenvalue*

1. はじめに

一般に成層構造を持つ弾性波動場を表すGreen関数は、Hankel変換などの積分変換を介することによって波数積分で表現されることが多い。Lamb¹⁾やEwing²⁾はこの積分を扱い、波数積分で表現されるGreen関数を表面波に関する留数からの寄与と実体波に関する分岐線回りの積分からの寄与によって表現した。さらに近年になって、この表現に対する新たな視点からの解釈が、Touheiの論文³⁾で与えられた。そこでは、積分への寄与のうち、留数からのものは離散固有値に、分岐線回りの積分からのものは連続固有値に関係していることが示されている。

本研究は、2層構造を成すスカラー波動場を表すGreen関数の漸近展開を、離散および連続固有値の視点から行うものである。漸近展開は物理数学でよく用いられる些か古典的な手法であるが、far-fieldでの関数の挙動をつかむのに適しており、Green関数の波数積分表示からでは直接的に見通すことのできない波動特性を簡潔な数式表現として示すことができる利点を持つ。しかし、一方で漸近展開は物理条件を考慮した複素平面上でのPermissible-sheetの作成、解析接続性を満足する積分経路のとり方、偏角の考慮など様々な制約条件が入ってくるためその展開法が複雑となってしまう欠点をもっている。本論文では、積分変数として用いられる波数を複素領域の範囲にまで拡張し、ここに物理条件を満足する適当なPermissible-sheetと積分経

路を導入することでGreen関数をLaplace変換型の積分として表し、ここにWatsonの補助定理を適用することで漸近展開を行う方法を提示している。この方法では、漸近展開はLambの論文に示されるような、表面波に関する留数からの寄与と実体波に関する線積分からの寄与という形を保ったまま分解される。ここで、これら2つの寄与がそれぞれ離散および連続固有値に深く根ざしていることから、漸近展開における偏角やPermissible-sheetのとり方は層数によらない決まった形として常に定まってくる。また、漸近展開が代数的な計算に帰着されるため、一貫した方法としてまとめることができる利点をもっている。さらに、半無限均質媒体に対するGreen関数を同様の手法を用いて漸近展開し、この展開式の自然な拡張として上述の半無限2層媒体の漸近展開式が成り立つことを示すことで理論の妥当性を検討している。

2. 層構造を成す弾性流体の波動場を表すGreen関数

2.1 基礎方程式および境界条件

本論文では、具体例としてFig.1に示す2層からなる弾性流体の波動場を扱う。ただし、以降で提示される漸近展開の方法並びに結果は、ここで得られる漸近展開がその表現形式として離散および連続固有値に深く根ざしたものであることから、後述のように多層の

弾性流体の波動場に適用可能となる。ここでは、議論の出発点を明確にするため、基礎方程式と境界条件を与えることから始める。

弾性流体を伝播する波動は、スカラー場の波動方程式で与えられる。ここでは、Ewingの著書^{*2)}に基づいた形で、流体の支配方程式を変位ポテンシャルに関するものとして、次式で与える。

$$(\nabla^2 + k_{\alpha_j}^2)\phi_j(r, z) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

ここに、 ϕ_j は弾性流体の変位ポテンシャルで、添字の j によって層を区別するものとする。即ち、添字が1の値をとる場合には表層を、添字が2の値をとる場合には半無限層を表すものとする。また、 k_{α_j} は各媒質の波数を表す。ここで、境界条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 \quad (\text{at } z = 0) \\ \rho_1 \phi_1 &= \rho_2 \phi_2 \quad (\text{at } z = H) \\ \partial_z \phi_1 &= \partial_z \phi_2 \quad (\text{at } z = H) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに ∂_z は、鉛直方向成分である変数 z についての偏微分の演算子を表し、 ρ_j ($j = 1, 2$)は各層における媒質の質量密度を表している。また、Fig.1に示すSは震源を、 α_j ($j = 1, 2$)は各層における媒質の音波速度をそれぞれ表している。

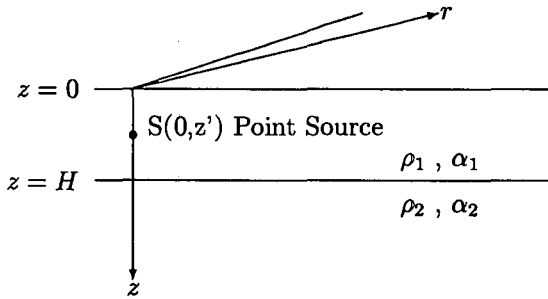


Fig.1 Point source in two-layered liquid half space

2.2 Green関数の波数積分表示

表層内に点震源がある場合のGreen関数の導出過程はEwingらのテキストに譲り、ここでは結果のみを記すことにする。

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) E_k(z, z') dk \quad (3)$$

ここに、 G はGreen関数、 r は観測点、 r' は点震源、 r は観測点と点震源の水平距離を、また、 k は波数の水平成分、 J_0 は0次の第1種Bessel関数を示す。また、 $E_k(z, z')$ は次の方程式を満足するGreen関数であり、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha_j}^2 - k^2\right)E_k(z, z') = -\delta(z - z') \quad (4)$$

具体的な $E_k(z, z')$ の形は、次式で与えられる。

$$E_k(z, z') = \frac{E_k^*(z, z')}{F(k)} \quad (5)$$

$$F(k) = \nu_1 \cosh(\nu_1 H) + \eta_1 \nu_2 \sinh(\nu_1 H) \quad (6)$$

ただし、 $E_k^*(z, z')$ は以下のように与えられている。

$$E_k^*(z, z') = \frac{\sinh(\nu_1 z)}{\nu_1} \times [\nu_1 \cosh\{\nu_1(H - z')\} + \eta_1 \nu_2 \sinh\{\nu_1(H - z')\}] \quad (\text{when, } 0 \leq z \leq z') \quad (7)$$

$$E_k^*(z, z') = \frac{\sinh(\nu_1 z')}{\nu_1} \times [\nu_1 \cosh\{\nu_1(H - z)\} + \eta_1 \nu_2 \sinh\{\nu_1(H - z)\}] \quad (\text{when, } z' \leq z \leq H) \quad (8)$$

$$E_k^*(z, z') = \eta_1 \sinh(\nu_1 z') \exp\{-\nu_2(z - H)\} \quad (\text{when, } H \leq z) \quad (9)$$

ここに、 η_1 、 ν_1 および ν_2 については以下のように表される。

$$\eta_1 = \rho_1 / \rho_2 \quad (10)$$

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - k_{\alpha_1}^2} \quad (11)$$

$$\nu_2 = \sqrt{k^2 - k_{\alpha_2}^2} \quad (12)$$

とする。

ここで、Bessel関数とHankel関数の間で成立する、次の関係式を式(3)に代入する。

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x) \right) \quad (13)$$

$$H_0^{(1)}(x) = -H_0^{(2)}(-x) \quad (14)$$

ここに、 $H_0^{(1)}$ は0次の第1種Hankel関数を、 $H_0^{(2)}$ は0次の第2種Hankel関数をそれぞれ表している。これにより、式(3)は次のようになる。

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k H_0^{(2)}(kr) E_k(z, z') dk \quad (15)$$

一般に漸近評価法には、鞍部点法を始め、Laplaceの方法など様々な方法があるが、本紙面ではその中の一つであるWatsonの補助定理(後述のAppendixを参照)を用いる方法を提案する。その理由としては、漸近展開への手順が以下に述べるように、層の数によらない一環した形で行えることが挙げられる。以降、その方法について述べる。

3. Green関数の漸近展開

3.1 被積分関数の漸近近似

Green関数の漸近展開に際し、Watsonの補助定理が適用可能なようにするため、式(15)で表される波数積分をLaplace変換型の積分に直すことを考える。そのため、式(15)の被積分関数に現れる0次の第2種Hankel

関数 $H_0^{(2)}$ に予め漸近展開を施し、簡単の為その初項のみをもって波数積分を直しておく。

$$H_0^{(2)}(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2}{k\pi r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (16)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{1}{8\pi^3 r}} e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} e^{-ikr} E_k(z, z') dk \quad (17)$$

後述の Appendix に示される様に、関数どうしの積の漸近展開はそれぞれの関数を漸近展開したものの積と同じであることから、予め被積分関数の一部を漸近展開しておいても数学的に等価性は保たれる。また、Hankel 関数の漸近展開は、初項の値に比べて他の項の値は、水平方向距離が大きくなるに従い十分無視できることから、上述の近似は十分成り立つ。

3.2 Permissible-sheet の作成

さて、式(17)の積分変数である波数 k を複素数にまで拡張し、積分経路を取り直す。この時、式(17)の被積分関数に含まれる $\sqrt{k}$, ν_1 , ν_2 について、多価性を考慮した Riemann 面の取り方が要求される。ここで、式(5)で表される関数 $E_k(z, z')$ は ν_1 に対して偶関数となっており、そのため式(17)で表される波数積分の被積分関数は、 ν_1 の符号の取り方には依存しない。しかしながら、 ν_2 に関しては、関数 $E_k(z, z')$ が ν_2 に対しては偶関数ではないため、そのことから式(17)の被積分関数は ν_2 の符号の取り方に依存してくることになる。また、 $\sqrt{k}$ については $\text{Re}(\sqrt{k}) > 0$ となる面を表面とし、その面内で積分経路が閉じるように定める。これらの条件に加え、さらに以下に示す物理的・数学的条件が Riemann 面の取り方に課せられる。

1. Watson の補助定理が適用可能なよう、式(17)で表される波数積分を上手く Laplace 変換型の積分に帰着させるような積分経路であること。
2. $\exp(-i\omega t)$ の時間依存性を考慮した時、式(17)の被積分関数が半無限層内で鉛直下方に逸散する波動を表すようにするため、 $-\infty \sim \infty$ へ向かう実軸に沿った積分経路上では常に $\text{Im}(\nu_2) > 0$ となること。
3. 半無限層内での波動の Radiation condition を満足させるため、実軸に沿った積分経路上では常に $\text{Re}(\nu_2) > 0$ となること。
4. 1. ~3. の条件を満たすように変形された積分経路上において、常に解析接続性が満たされていること。

以上の条件を全て考慮することで、Permissible sheet は Fig.2 のように定まる。

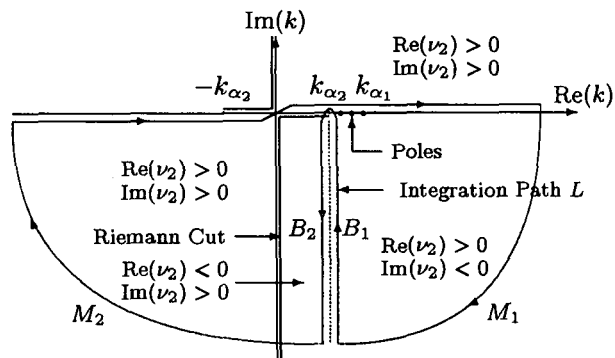


Fig.2 Integration path in the complex k -plane

ここで、Fig.2 において積分経路が k_{α_2} の近傍を迂回し Riemann cut を横切る点において、 $\text{Re}(\nu_2) > 0, \text{Im}(\nu_2) > 0$ から $\text{Re}(\nu_2) < 0, \text{Im}(\nu_2) > 0$ へと ν_2 符号が連続的に変化していること。また、積分経路が虚軸上を第4象限から第3象限に向かって横切る点においても、 $\text{Re}(\nu_2) < 0, \text{Im}(\nu_2) > 0$ から $\text{Re}(\nu_2) > 0, \text{Im}(\nu_2) > 0$ へと ν_2 符号が連続的に変化していることは注意すべき点である。このことから、Fig.2 に示される積分経路が数学的な解析接続の条件を満たしていることが分かる。

3.3 漸近展開にむけての Green 関数の離散項および連続項への分離

以上より、実軸上の波数 k_{α_1} と k_{α_2} の間に位置する有限個の極を除いては、積分経路およびそれによって囲まれる領域で式(17)の被積分関数は正則である。ここで、留数定理を使うことにより、式(17)の係数を除く積分部分は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} e^{-ikr} E_k(z, z') dk \\ &= - \int_{B_1} \sqrt{k} e^{-ikr} E_k(z, z') dk \\ & \quad - \int_{B_2} \sqrt{k} e^{-ikr} E_k(z, z') dk \\ & \quad - 2\pi i \sum_{n=1}^N \sqrt{k_n} e^{-ik_n r} \text{Res}_{k=k_n} E_k(z, z') \quad (18) \end{aligned}$$

ここに、経路 M_1, M_2 における値は $\text{Im}(k) < 0$ よりゼロとなり積分には寄与しない。また、 k_n は

$$F(k_n) = 0 \quad (19)$$

を満足する解であり、物理的条件である cut-off frequency の関係で有限個しか存在しない。

ここで、式(18)に示される経路 B_1, B_2 における積分の項について、さらに展開を加える。

$$k = k_{\alpha_2} - i\eta \quad (\eta > 0) \quad (20)$$

と変数変換を施すと、

$$\int_{B_1} \sqrt{k} e^{-ikr} E_k(z, z') dk = \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& i e^{-i k_{\alpha_2} r} \int_0^\infty \sqrt{k_{\alpha_2} - i \eta} e^{-\eta r} E_{k_1}(z, z') d\eta \\
& \int_{B_2} \sqrt{k} e^{-i k r} E_k(z, z') dk = \\
& -i e^{-i k_{\alpha_2} r} \int_0^\infty \sqrt{k_{\alpha_2} - i \eta} e^{-\eta r} E_{k_2}(z, z') d\eta
\end{aligned} \quad (22)$$

ここに、添字 k_1, k_2 はそれぞれ、経路 B_1, B_2 上での波数の値をとることを意味する。以上より、式(18)は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^\infty \sqrt{k} e^{-i k r} E_k(z, z') dk \\
& = -i e^{-i k_{\alpha_2} r} \int_0^\infty q(\eta) e^{-\eta r} d\eta \\
& - 2\pi i \sum_{n=1}^N \sqrt{k_n} e^{-i k_n r} \text{Res}_{k=k_n} E_k(z, z')
\end{aligned} \quad (23)$$

ここに、

$$q(\eta) = \sqrt{k_{\alpha_2} - i \eta} \{E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z')\} \quad (24)$$

本論文では便宜のため以降から、式(23)における右辺の第1項目を連続項、第2項目を離散項と呼ぶことにする。

3.4 連続項についての漸近展開

さて、離散項についてはすでに漸近展開されてしまっているため、ここからは連続項のみに着目して漸近展開を行う。始めに、 ν_1, ν_2 について、経路 B_1, B_2 を通ったときの値について偏角を考慮した展開を与えておく。但し、経路 B_1, B_2 上の波数 k は、複素 k -平面上での位置が Riemann cut を潜っているかどうかの違いを除く他同じであることから、経路 B_1, B_2 に対する ν_i ($i=1$ or 2) の値の違いは、実質的に符号の違いだけとなる。よって、経路 B_1, B_2 に対する ν_i ($i=1$ or 2) をそれぞれ、 $\nu_{i(B_1)}, \nu_{i(B_2)}$ ($i=1, 2$) と書くことで区別することにする。ここで、 $\nu_{i(B_2)} = -\nu_{i(B_1)}$ ($i=1$ or 2) の関係が成り立っていることに注意を要する。

$$\begin{aligned}
\nu_{i(B_1)} &= \sqrt{k^2 - k_{\alpha_1}^2} \\
&= \sqrt{2k_{\alpha_1}} e^{-\frac{\pi}{4} i} \eta^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2k_{\alpha_1}}} e^{\frac{\pi}{4} i} \eta^{\frac{3}{2}} + o(\eta^{\frac{3}{2}}) \\
&\quad (i=1, 2) \quad (25)
\end{aligned}$$

ここに、 o は Landau のスモールオーである。

次に、式(24)における $\{ \}$ の部分について展開を行う。ここで便宜上、 $\nu_{1(B_j)}$ ($j=1, 2$) について $\eta \rightarrow 0$ での値を予め計算しておく。 $\eta \rightarrow 0$ での値を求める理由は、後に Watson の補助定理を用いる際、その仮定として必要なためである。また、 $\nu_{2(B_j)}$ ($j=1, 2$) に関しては、 $\nu_{1(B_j)}$ の場合と違い $k = k_{\alpha_2} - i\eta$ を $\nu_{2(B_j)}$ に代入した後、 $\eta \rightarrow 0$ とすればよいわけではない。より正確な展開を必要とするため、 $\nu_{2(B_j)}$ はそのままの

形で $E_k(z, z')$ 内に残しておき、後の $E_k(z, z')$ の展開でまとめて取り扱った。

$$\nu_{1(B_1)} \stackrel{\eta \rightarrow 0}{=} -i\nu \quad (26)$$

$$\nu_{1(B_2)} \stackrel{\eta \rightarrow 0}{=} +i\nu \quad (27)$$

ここに、 $\nu = \sqrt{k_{\alpha_2}^2 - k_{\alpha_1}^2}$ である。式(26),(27)では、 ν_1 について B_1, B_2 の各経路上の値は互いに符号が逆になった形となるが、 $E_k(z, z')$ への寄与に関しては関数 $E_k(z, z')$ が ν_1 に対して偶関数であることより、経路がどちらであるかといったことは問題にならない。

上述の関係を踏まえ、次に $E_{k_1} - E_{k_2}$ についての $\eta \rightarrow 0$ での漸近展開を行う。但し、ここでは展開の結果のみを記すことにとどめ、展開の詳細については後述の Appendix にまわすことにした。

$$\begin{aligned}
& E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') \\
& \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} \frac{-2\eta_1 \sin \nu z}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \cos \nu(H - z') \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z') \} \cdot \nu_{2(B_1)} \\
& \quad (\text{when, } 0 \leq z \leq z') \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') \\
& \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} \frac{-2\eta_1 \sin \nu z'}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \cos \nu(H - z) \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z) \} \cdot \nu_{2(B_1)} \\
& \quad (\text{when, } z' \leq z \leq H) \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') \\
& \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} \frac{-2\eta_1 \sin \nu z'}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \nu \cos \nu H(z - H) + \eta_1 \sin \nu H \} \nu_{2(B_1)} \\
& \quad (\text{when, } H \leq z) \quad (30)
\end{aligned}$$

さて、以上の計算により、式(24)で与えられる $q(\eta)$ の $\eta \rightarrow 0$ での漸近展開が求まることになる。以下に、まとめて示す。

$$\begin{aligned}
& q(\eta) \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} C_1 \cdot \nu_{2(B_1)} \\
& C_1 = \frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}} \eta_1 \sin(\nu z)}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \cos \nu(H - z') \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z') \} \\
& \quad (\text{when, } 0 \leq z \leq z') \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q(\eta) \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} C_2 \cdot \nu_{2(B_1)} \\
& C_2 = \frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}} \eta_1 \sin(\nu z')}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \cos \nu(H - z) \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z) \} \\
& \quad (\text{when, } z' \leq z \leq H) \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q(\eta) \stackrel{\eta \rightarrow 0}{\approx} C_3 \cdot \nu_{2(B_1)} \\
& C_3 = \frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}} \eta_1 \sin(\nu z')}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\
& \{ \nu(z - H) \cos \nu H + \eta_1 \sin \nu H \}
\end{aligned}$$

$$(\text{when, } H \leq z) \quad (33)$$

上述してきた通り、 $q(\eta)$ の $\eta \rightarrow 0$ での漸近展開は少々手間の掛かるものではあるが、文字の置き換えによる代数的な計算で全て済んでしまう点がこの方法の大きな特色といえる。また、展開においては複素平面上での偏角の取り方が最も注意を払うべき点となるが、本論文で示した偏角の取り方は一般の成層構造の場合にも適用することができることから、一貫して代数的な計算で漸近展開ができることになる。

以上により、この段階にまで辿り着けば、あとは Appendix に記載した Watson の補助定理を機械的に使うことより、連続項についての漸近展開は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & -i\sqrt{\frac{1}{8\pi^3 r}} e^{i(\frac{\pi}{4} - k_{\alpha_2} r)} \int_0^\infty q(\eta) e^{-\eta r} d\eta \quad (34) \\ & \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -C_l \frac{i\sqrt{k_{\alpha_2}} e^{-ik_{\alpha_2} r}}{4\pi r^2} \quad (l = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

3.5 半無限2層媒体に対する Green 関数の漸近展開

最後に、離散項と連続項を組み合わせることによって、式(3)の Green 関数は最終的に次のように漸近展開される。

$$\begin{aligned} G(r, r') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} & -i\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \sum_{n=1}^N \sqrt{k_n} e^{-ik_n r} \text{Res}_{k=k_n} E_k(z, z') \\ & - C_l \frac{i\sqrt{k_{\alpha_2}} e^{-ik_{\alpha_2} r}}{4\pi r^2} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (35) \end{aligned}$$

上式により、留数項は $r^{\frac{1}{2}}$ で水平方向に減衰し、また、連続項は r^2 で水平方向に減衰してゆくことが分かる。さらに、水平方向へ伝播してゆく Green 関数の振幅の大きさは、表層では振動数の大きさに関係しておらず、半無限層内では振動数の $\frac{1}{2}$ 乗で関係してくることが漸近展開したことで明らかとなった。

3.6 固有値問題の視点からみた漸近展開

さて、以上により半無限二層媒体に対する Green 関数の漸近展開が得られた。ここで固有値問題の視点からこの漸近展開を振り返ってみる。前節に示された漸近展開の手法は、Permissible-sheet とその上での積分経路のとり方、および留数定理を用いた波数積分の分解にその本質を置く。Lamb の論文^{*1)}や Touhei の論文^{*3)}では、波数積分で表現された Green 関数は、Riemann 面上に適当な積分経路をとることで、留数からの寄与と分岐点回りの積分からの寄与に分解される。そしてこれら2つの寄与のうち、前者は表面波に後者は実体波に対応したものであることが Lamb の論文では示され、さらに固有値問題の視点から、前者は離散固有値に後者は連続固有値に対応していることが、Touhei の論文では示されている。

これらの視点から式(35)を眺めたとき、留数からの寄与については、常に式(6)で表される特性方程式のゼロ点に関連して留数が得られることから、式(35)における第1項目は表面波に関係しており、そこでの波数は離散固有値に対応していることが分かる。ここで、式(35)の第2項目である線積分からの寄与について以下に考察を与える。

式(35)の第2項目は、Fig.2に示す経路 B_1, B_2 上での線積分からの寄与であり、これは元々式(23)の連続項に基づくものであった。そこで、式(24)で表される関数 $q(\eta)$ に着目すると、この関数は $E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z')$ なる式を用いて表されていることが分かる。さて、ここで式(4)より、この $E_{k_1}(z, z')$ と $E_{k_2}(z, z')$ について次式が成立する。

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha_j}^2 - k^2 \right) E_{k_1}(z, z') = -\delta(z - z') \quad (36)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha_j}^2 - k^2 \right) E_{k_2}(z, z') = -\delta(z - z') \quad (37)$$

式(36)と式(37)は、 $\nu_{2(B_j)}$ ($j = 1, 2$) の符号に応じて同じ方程式に対して波動の進行方向の異なる2つの解が存在することを示している。いま、

$$\Psi_k(z, z') = E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') \quad (38)$$

と置くと、式(36)と式(37)より、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{\alpha_j}^2 \right) \Psi_k(z, z') = k^2 \Psi_k(z, z') \quad (39)$$

が成立し、Fig.2に示す実軸上の波数 k_{α_2} から無限遠点に延びる点線上の任意の波数 k について式(39)が成立することから、連続固有値問題が現れていることが分かる。ここで、経路 B_1 は Riemann 面の表側、経路 B_2 は Riemann 面の裏側にそれぞれあるため、その上でとられる関数 $E_{k_j}(z, z')$ ($j = 1, 2$) の値は連続的にもう片方側の値に Fig.2 に示す点線を通して移ることができないことに注意する。このことは、Ewing や Touhei の論文に現れる分岐点回りの積分についても成り立つ関係である。

以上より、連続固有値問題の成立する背景として、次のものが本質的であることが分かる。

1) 解析接続的につながらない2つの関数値の差という形を通して、常に連続固有値問題が浮上してくること。そのため、この形が作れる Permissible-sheet と積分経路であれば、そのとり方に任意性があってもよいこと。但し、実質的には物理条件などの制約が課されてくるため、とり方は限られる。

2) 連続固有値問題は、式(35)～式(39)に見られるように、上昇波と下降波が重ね合わさり解の特異性が打ち消されることで生じる。そのためには、半無限層内を鉛直方向に伝播する上昇波と下降波の波数 $\nu_{2(B_j)}$ ($j = 1, 2$) における実数部の絶対値が等しく、符号が反対であればよいこと。

3.7 半無限均質媒体に対する Green 関数の漸近展開

ここで、いままでの結果を踏まえ、Fig.3に示す均質な半無限の弾性流体に対する Green 関数の漸近展開を示しておく。

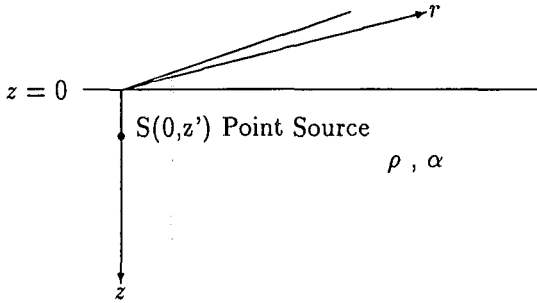


Fig.3 Point source in liquid half space

Fig.3において、 ρ は媒質の質量密度を、 α は媒質の音波速度をそれぞれ表している。また、 S は震源を、 z' は震源の鉛直方向成分を表すものとする。

ここで、半無限均質波動場を表す Green 関数の波数積分表示について詳しくは著者らによる論文⁴⁾を参照して頂くことにして、結果のみを記すと以下のような。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) E_k(z, z') dk \quad (40)$$

ここに、 $E_k(z, z')$ の具体的な式形を示すと次式のようにになる。

$$E_k(z, z') = \frac{1}{2\nu} \left\{ e^{-\nu(z'-z)} - e^{-\nu(z-z')} e^{-2z'\nu} \right\} \quad \dots (0 \leq z \leq z') \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2\nu} \left\{ e^{-\nu(z-z')} - e^{-\nu(z-z')} e^{-2z'\nu} \right\} \quad \dots (z' \leq z) \quad (42)$$

ここに、 $\nu = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}$ である。

さて、式(40)で表される Green 関数の波数積分表示に、上述してきた漸近展開の方法を同様な仕方で用いることにより、以下の漸近展開を得る。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx_{r \rightarrow \infty} 2\sqrt{k_\alpha} z z' \cdot \frac{i\sqrt{k_\alpha} e^{-ik_\alpha r}}{4\pi r^2} \quad (43)$$

なお、式(43)で表される半無限均質媒体に対する Green 関数の漸近展開は、式(35)において $\cos(\nu H) \simeq 1$ 、 $\sin(\nu H) \simeq 1$ 、 $\eta_1 = 1$ 、 $k_{\alpha_2} \sim k_\alpha$ としたものとして一致している。このことは、半無限均質媒体に対する Green 関数の漸近展開である式(43)の自然な拡張として、半無限2層媒体に対する漸近展開を表した式(35)が成り立っていることを意味しており、本論文で提示した方法の妥当性を確認することができた。

4. 数値計算例

Fig.4, Fig.5 は表層の厚さが1.0kmの2層からなる弾性流体モデルについて、Green 関数の連続項に関する部分とその漸近展開の係数部分を、解の実部と虚部の

双方について数値計算させたものである。表層での音波速度は1.0km/s、質量密度は1.0g/cm³、基盤層での音波速度は2.0km/s、質量密度は1.0g/cm³、点震源の位置は自由表面から深さ0.5km、観測点の位置は自由表面から深さ3.0km、振動数は1Hzとした。水平方向距離が大きくなるに従い両者の一致が確かめられ、数値計算の立場からも漸近展開の正しさが伺われる。

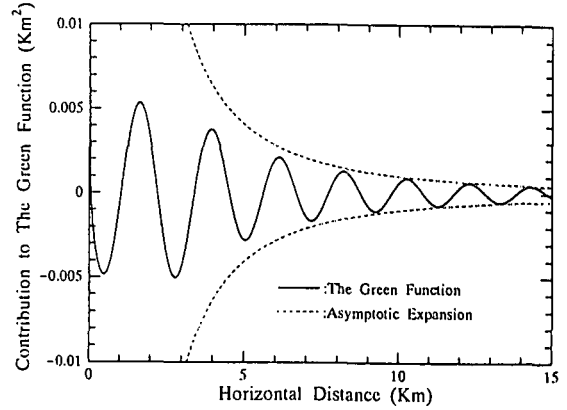


Fig.4 Comparison of the continuous part of Green's function with its asymptotic expansion (Real Part)

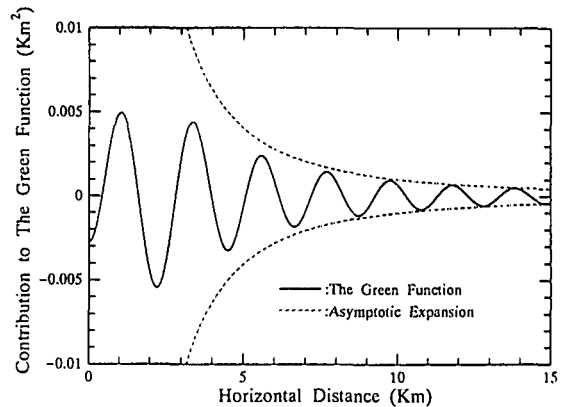


Fig.5 Comparison of the continuous part of Green's function with its asymptotic expansion (Imaginary Part)

5. 結論

本論文では、成層構造を成すスカラー波動場を表す Green 関数について、水平方向に関する漸近展開の方法を、具体的な2層構造のスカラー波動場について提示した。これによれば、複素波数平面上において、被積分関数の極と実軸上に位置する k_{α_2} から無限遠点に向かう線を挟む積分経路の一部分とに関連して、Green 関数の漸近展開はそれぞれ離散および連続固有値に関係した部分に分けられる。特に、解析接続的につながらない2つの関数値の差という形を通して、常に連続固有値問題が浮上してくることは Green 関数のスペクトル分解の場合と同じである。留数によって表される

離散固有値に関係した項は表面波に対応しており、 $r^{\frac{1}{2}}$ で水平方向に減衰してゆく。また、線積分で表される連続固有値に関係した項は実体波に対応しており、 r^2 で水平方向に減衰してゆくことが漸近展開により分かる。さらに、水平方向へ伝播してゆく Green 関数の振幅の大きさは、表層では振動数の大きさに関係しておらず、半無限層内では振動数の $\frac{1}{2}$ 乗で関係してくることが漸近展開したことで明らかとなった。以上より、本紙面で提示した Green 関数の漸近展開の方法は、離散並びに連続固有値に深く根ざしたものであることから、層数によらない一連の流れの中で漸近展開を見ることが出来る利点を持つ他、Green 関数の式からでは直接的に見通せなかった特性を提示してくれる利点を持つと考えられる。

Appendix-A $E_{k_1} - E_{k_2}$ の $\eta \rightarrow 0$ での漸近展開について

1° ($0 \leq z \leq z'$ の時)

式(7)に式(26)(または式(27))を代入して、

$$\begin{aligned} E_{k_j}(z, z') &= \frac{\sinh(i\nu z)}{i\nu} \times \\ &\frac{[i\nu \cosh\{i\nu(H - z')\} + \eta_1 \nu_2(B_j) \sinh\{i\nu(H - z')\}]}{[i\nu \cosh\{i\nu H\} + \eta_1 \nu_2(B_j) \sinh\{i\nu H\}]} \\ &= \frac{\sin(\nu z)}{\nu} \cdot \frac{\nu \cos \nu(H - z') + \eta_1 \nu_2(B_j) \sin \nu(H - z')}{\nu \cos \nu H + \eta_1 \nu_2(B_j) \sin \nu H} \\ &= \frac{\sin(\nu z)}{\nu} \left\{ A + \frac{B}{C + D\nu_2(B_j)} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

ここに、 A, B, C, D は次のようである。

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin \nu(H - z')}{\sin \nu H} \\ B &= \nu \left\{ \cos \nu(H - z') - \frac{\sin \nu(H - z') \cos \nu H}{\sin \nu H} \right\} \\ C &= \nu \cos \nu H \\ D &= \eta_1 \sin \nu H \end{aligned}$$

(A.1)式で求めた E_{k_j} の展開を用いて、 $E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z')$ を計算する。

$$\begin{aligned} E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') &= \frac{\sin \nu z}{\nu} \left\{ A + \frac{B}{C + D\nu_2(B_1)} - \left(A + \frac{B}{C + D\nu_2(B_2)} \right) \right\} \\ &= \frac{\sin \nu z}{\nu} \cdot \frac{B}{D} \cdot \left\{ \frac{1}{E + \nu_2(B_1)} - \frac{1}{E - \nu_2(B_2)} \right\} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

ここに、 E は次のようである。

$$E = \frac{C}{D} = \frac{\nu \cos \nu H}{\eta_1 \sin \nu H} \quad (\text{A.3})$$

次に、(A.2)式における $\{ \}$ のなかを計算する。ここで、 $E + \nu_2(B_1)$ および $E - \nu_2(B_1)$ はつぎのように展開できる。

$$E + \nu_2(B_1) \quad (\text{A.4})$$

$$= E + \sqrt{2k_{\alpha_2}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \eta^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2k_{\alpha_2}}} e^{+\frac{\pi}{4}i} \eta^{\frac{3}{2}} + o(\eta^{\frac{3}{2}})$$

$$E - \nu_2(B_1) \quad (\text{A.5})$$

$$= E - \sqrt{2k_{\alpha_2}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \eta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2k_{\alpha_2}}} e^{+\frac{\pi}{4}i} \eta^{\frac{3}{2}} - o(\eta^{\frac{3}{2}})$$

したがって、

$$\frac{1}{E + \nu_2(B_1)} - \frac{1}{E - \nu_2(B_2)} \simeq \frac{-2\nu_2(B_1)}{E^2} \quad (\text{A.6})$$

と近似できる。ここに、 η^1 以上のオーダーになる項については切り捨てた。このことは、(A.4),(A.5)式より容易に理解できる。さて、(A.6)式の関係を用いると、 $E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z')$ は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') &= \frac{-2\eta_1 \sin \nu z}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\ &\{\cos \nu(H - z') \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z')\} \cdot \nu_2(B_1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

2° ($z' \leq z \leq H$ の時)

この時は、1° において z と z' を入れ替えた形となるから、

$$\begin{aligned} E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') &= \frac{-2\eta_1 \sin \nu z'}{\nu^2 \cos^2 \nu H} \times \\ &\{\cos \nu(H - z) \sin \nu H - \cos \nu H \sin \nu(H - z)\} \cdot \nu_2(B_1) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

3° ($H \leq z$ の時)

$$\begin{aligned} E_{k_j}(z, z') &= \frac{\eta_1 \sinh(i\nu z') \exp\{-\nu_2(B_j)(z - H)\}}{i\nu \cosh(i\nu H) + \eta_1 \nu_2(B_j) \sinh(i\nu H)} \\ &= \frac{l \exp\{-\nu_2(B_j)(z - H)\}}{m + n\nu_2(B_j)} \quad (j = 1, 2) \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

ここに、 l, m, n は次のようである。

$$l = \eta_1 \sin(\nu z') \quad (\text{A.10})$$

$$m = \nu \cos(\nu H) \quad (\text{A.11})$$

$$n = \eta_1 \sin(\nu H) \quad (\text{A.12})$$

ここで、(A.9)式で求めた E_{k_j} の展開を用いて、 $E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z')$ を計算する。

$$\begin{aligned} E_{k_1}(z, z') - E_{k_2}(z, z') &= \frac{l e^{-\nu_2(B_1)(z-H)}}{m + n\nu_2(B_1)} - \frac{l e^{-\nu_2(B_2)(z-H)}}{m + n\nu_2(B_2)} \\ &\simeq_{\eta \rightarrow 0} \frac{-2l}{m} \left\{ \nu_2(B_1)(z - H) + \frac{1}{6} \nu_2^3(B_1)(z - H)^3 + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{-2ln\nu_2(B_1)}{m^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \nu_2^2(B_1)(z - H)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\simeq \frac{-2l}{m^2} \{m(z-H) + n\} \nu_{2(B_1)} \quad (\text{A.13})$$

但し, (A.13) 式では $\nu_{2(B_1)}$ の1乗のオーダーでまとめ上げられる項のみを取り挙げた.

Appendix-B 和と積の漸近展開について^{*5)}

関数 $f(z)$ と $g(z)$ の漸近展開が

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad g(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (\text{B.1})$$

で与えられたとき, 和と積の漸近展開は次式で与えられる.

$$f(z) + g(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{z^n} \quad (\text{B.2})$$

$$f(z)g(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \quad c_n = \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} \quad (\text{B.3})$$

Appendix-C Watson の補助定理^{*5)}

Laplace 変換型の積分

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} q(t) dt \quad (\text{C.1})$$

において, 任意の $k (> 0)$ に対し

$$\int_k^{\infty} |e^{-zt} q(t)| dt < M_k \quad (\text{C.2})$$

が成立する M_k を選ぶことができ, $q(\eta)$ が漸近展開

$$q(t) \underset{t \rightarrow 0}{\approx} \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (\text{Re}(\lambda) > 0, \mu > 0) \quad (\text{C.3})$$

を持つとき, δ を任意の正数として, 積分は

$$I(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \sum_{s=0}^{\infty} a_s \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{z^{(s+\lambda)/\mu}} \quad \left(|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\right) \quad (\text{C.4})$$

と漸近展開される. ここに, Γ はGamma関数を表す.

参考文献

- 1) Lamb, H: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **203**, pp. 1-42, 1904.
- 2) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.
- 3) 東平光生: 離散固有値および連続固有値を用いた Green 関数のスペクトル分解表示について, 土木学会論文集, No. 577/I-41, pp.245-256, 1997
- 4) 中川英則, 佐伯昌之, 東平光生: 連続スペクトルで表現される半無限均質媒体の Green 関数, 第10回日本地震工学シンポジウム論文集, 第1分冊, C6-6 pp.1117-1122, 1998
- 5) 今村勤: 物理と関数論, 岩波書店
- 6) 東平光生: 内部点源を有する二次元半無限弾性体の周波数応答特性について, 技術研究所報 No.13, 佐藤工業(株), 1986

(1999 年 4 月 23 日 受付)