

均質化法による複合材料の変形強度特性評価について

On Evaluation of the Mechanical Property of Composite Material
by the Homogenization Method

京谷孝史*, 寺田賢二郎**, 欧陽立珠***, 西岡英俊****

Takashi KYOYA, Kenjiro TERADA, Lizhu OYANG and Hidetoshi NISHIOKA

*正会員 工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

**正会員 Ph.D. 東北大学講師 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (同 上)

***学生員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

****学生員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

A numerical scheme to evaluate the elastic stiffness and strength of heterogeneous material, which have been proposed by authors based on the theory of homogenization, is applied to fiber reinforced composites, and its validity for evaluating their mechanical properties is examined. Results show that the numerical scheme can give fairly good predictions as for the elastic stiffness, but it can only predicts value of strength near to the experimental data since the numerical scheme does not take the existence of initial defects in the composites into account. However, it can conclude that our proposed method can use for evaluation of mechanical property of composite material at some first stage of design since the method needs only the mechanical properties of each materials of which the composite consists and a graphical data representing the geometric feature of the composite structure.

Key Words : Homogenization theory, fiber reinforced composite, stiffness, strength

1. はじめに

本研究で用いる均質化法 (homogenization method) は, 特異摂動法における2変数展開法を応用して, 微視的周期構造を有する材料の平均物性を求める手法であり, 1970年代から発展した応用数学における理論体系の一つである. その工学分野への応用は, Kellerが漸近展開法についてマルチスケール法を用いたときの考え方を1973年にPapanicolaouらに紹介し複合材料の力学の分野への応用を示唆したことに端を発しているとされ, その後, 80年代から現在に至るまで, 米国を中心としてこれを具体的に適用するための数値解析法が積極的に研究されている¹⁻³⁾.

複合材料のような人工材料はもとより, 自然地盤や岩盤など, 土木工学が対象とする材料の多くは非均質である. そして, それら非均質材料のモデル化においては, その内部構造の取り扱いが常に問題となっている. こうした非均質材料に対して, 著者らは既に岩盤を主たる対象として, 均質化法によって変形特性のみならず巨視的な強度特性までも推定し, さらに極限支持力解析法と連結させて構造物の安定性を予測評価する数値解析手法を提案した⁴⁾⁵⁾.

一方, 人工の非均質材料である複合材料については, 後述するように, 変形特性は半経験的理論式に

よって推定し, 強度特性については強度試験を通して経験的に決定することが行われている⁷⁻⁹⁾.

もし, それら複合材料についても, 著者らが提案している手法によって変形特性と強度特性が予測評価できるのであれば, 現在行われている材料試験と併用することによって, より確かな理論的根拠のもとで複合材料の変形強度特性評価が可能となり, その工学的意義は小さくないと考える.

そこで, 本研究では, 試験データが豊富な繊維強化複合材料を取り上げ, その変形強度特性を著者らが既に提案している数値解析手法を用いて予測評価し, 実際の試験結果および既存手法との比較を通して, 提案手法の複合材料への適用性, 適用限界等を検討するものである.

2. 均質化法による非均質材料の平均変形強度特性の評価

2.1 非均質材料の平均弾性係数の評価

図-1のような微視的周期構造を有する非均質材料に対し, その単位構造をユニットセルと呼ぶ. 均質化法によれば, この非均質材料の巨視的な変形特性である均質化弾性係数は次式で与えられる.

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}(\mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right) dY \quad (1)$$

式(1)中、 $E_{ijkl}(\mathbf{y})$ はで示されるユニットセルの領域 Y における弾性係数の分布、 $|Y|$ はその体積を表す。

また、 $\chi_p^{kl}(\mathbf{y})$ は特性変位関数と呼ばれ、ユニットセルに関する次の方程式を周期境界条件のもとで解くことによって得られる。

$$\int_Y E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall v_i \quad (2)$$

この均質化弾性係数はユニットセルを無限に含む、あるいは同じことであるが、ユニットセルが材料に比べて無限小であるような理想的材料の平均弾性係数を表すものである。したがって、無数の繊維を含む複合材料の平均弾性係数として設計に用いるのに合理的な評価値であると考えられる。

2.2 非均質材料の強度特性の評価

この非均質材料で構成された巨視的構造体について、上に与えられる均質化弾性係数を用いて所与の境界条件のもとでのつり合い式を解けば、この物体中に作用する巨視的弾性応力分布 Σ_{mn} が得られる。そして、この Σ_{mn} が作用するときユニットセル内部に分布する微視的応力 $\sigma_{ij}^0(\mathbf{y})$ が次の線形変換によって求められる。

$$\sigma_{ij}^0(\mathbf{y}) = \left[\left(E_{ijkl}(\mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) (E^H)^{-1}_{klmn} \right] \Sigma_{mn} \quad (3)$$

図-1に示すように、この微視的応力 $\sigma_{ij}^0(\mathbf{y})$ は、構造体内部のある巨視的一点に存在するユニットセルに作用する巨視的応力が Σ_{mn} であるときに、ユニットセル内部の構成材料に直接に作用する応力を表す。

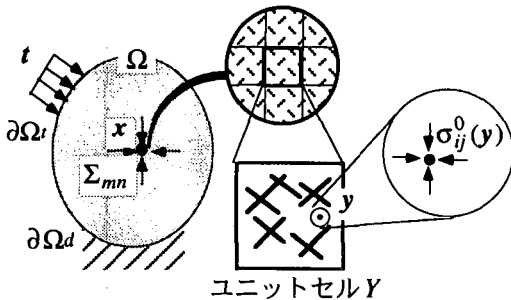


図-1 非均質材料のユニットセルと微視的応力

式(3)左辺の微視的応力がユニットセル内部において構成材料の降伏基準に達すればユニットセルの降伏が始まると考えることができる。各種の材料実験から構成材料の降伏基準が Von-Mises 型として特定

されているとすれば、ユニットセル内部の各点での降伏を規定する微視的応力に対する条件は

$$f(\sigma_{ij}^0) = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0} - K = 0 \quad (4)$$

である。ここに、 s_{ij}^0 は微視的応力の偏差応力、 K は材料定数である。求めるべき「巨視的破壊基準」は平均応力に対する基準 $F(\Sigma_{ij}) = 0$ である。これは、通常の塑性論で知られているような破壊基準のように、応力不変量で表されるようなものではなく、材料の非均質な配置を表現するために、空間座標に依存した応力の6成分をそのまま用いた形で表現する必要がある。

この「巨視的降伏基準」は次のような数値実験によって決定することができる。

6次元空間に単位球を考え、そこに均等に分布する単位大きさの巨視的単位応力 $\bar{\Sigma}_{mn}$ を準備する(図-2参照)。

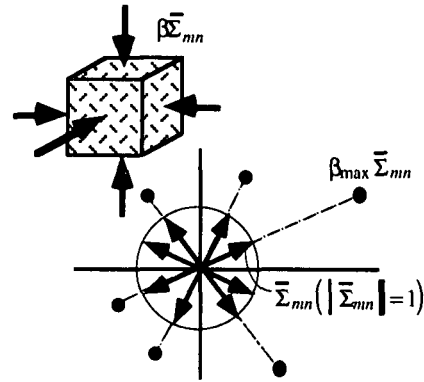


図-2 ユニットセルに対する数値強度試験

そして、この $\bar{\Sigma}_{mn}$ に対して発生するユニットセル内の局所応力が至る所で、構成材料の破壊基準を越えないように、単位応力 $\bar{\Sigma}_{mn}$ を何倍まで大きくできるか、すなわち、

$$\beta_{\max} = \max \left\{ \beta > 0 \mid f(\beta \sigma_{ij}^0(\mathbf{y})) \leq 0, \forall \mathbf{y} \in Y \right\} \quad (5)$$

ここに

$$\sigma_{ij}^0(\mathbf{y}) = \left[\left(E_{ijkl}(\mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) (E^H)^{-1}_{klmn} \right] \bar{\Sigma}_{mn} \quad (6)$$

なる係数 $\beta_{\max}$ を求める。与えた $\bar{\Sigma}_{mn}$ を $\beta_{\max}$ 倍した $\Sigma_{ij} = \beta_{\max} \bar{\Sigma}_{ij}$ が非均質材料の岩盤要素の破壊応力になる。

こうして得られた破壊応力点について、これらの点を通る6次元二次曲面

$$F(\{\Sigma\}) = \{\Sigma\}' [A] \{\Sigma\} + \{b\}' \{\Sigma\} - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\{\Sigma\} = \{\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_z \quad \Sigma_{yz} \quad \Sigma_{zx} \quad \Sigma_{xy}\}'$$

を最小二乗法によって定めることにより巨視的破壊

このようにして得られた巨視的降伏基準は，上に求めた均質化弾性係数と同様，周期構造が無限に連続する理想的な材料の降伏基準を表し，境界条件の影響を受けない評価値であることが特徴である．

弾完全塑性体に対して荷重を比例載荷する問題は、降伏関数を有限個の接平面で近似し、有限要素法による離散化を行うことによって「与えられた節点単位荷重ベクトル $\mathbf{F}$ とそれに対応する弾性応力分布ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e$ ($\mathbf{B}^t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{F}$) に対して線形制約条件

$$\begin{cases} N^t(\alpha\tilde{\sigma}^e + \tilde{\sigma}^r) - R \leq 0 \\ B^t\tilde{\sigma}^r = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式(1)に与えられた均質化弾性係数を用いて、この非均質材料で構成された構造体に対して、所与の境界条件のもとで単位荷重 F に対するつり合い式を解けば弾性応力分布 $\tilde{\sigma}^e$ が求められる。そして、これと併せて、式(7)に得られた巨視的破壊基準を接平面で近似して式(8)に用いれば、所与の境界条件のもとでのその構造体が発揮する強度（最大荷重）が推定できることになる。

本研究で用いる数値解析手法では、画像データを利用して、以下のような手順でユニットセルの有限要素モデルを作成する（図-3参照）。

手順1) 解析対象の写真(あるいはスケッチ)をイメージスキャナによって画像データとして取り込む。取り込んだユニットセルの画像データは自動的に各画素の色値が0~255の整数で表現され、画素の配列そのままの数値データとして格納される。

手順2) 画素の色値配列データをもとに、一つの画素に対して一つの3次元直方体有限要素が対応するような有限要素モデルの節点座標データと要素連結節点データが自動的に生成される。各要素の材料特性は0 (白) ~ 255 (黒) の色値データに対応して付与される。

成した非均質材料のユニットセル有限要素モデルを用いて式(1)~(6)の均質化解析を行う。

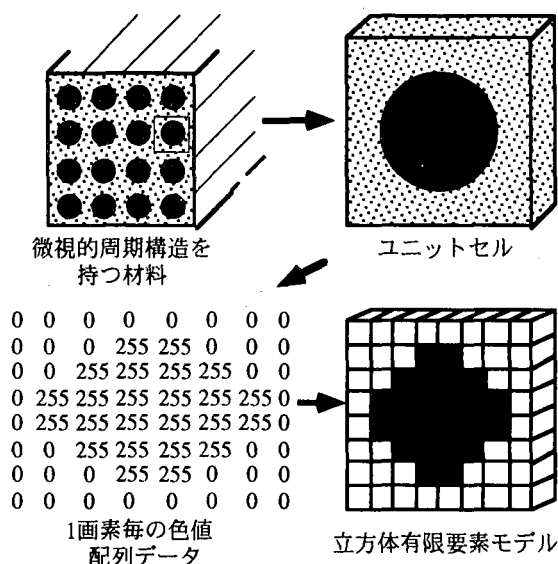


図-3 画像データからのユニットセル有限要素
モデル作成の手順

一方向に繊維をランダムに配置した繊維強化複合材料の変形強度特性評価は、現状では以下に述べるように、平均弾性係数については半経験的理論式によって評価し、強度特性については強度試験に基づいて決定することが行われている¹⁰⁻¹⁴⁾

以下では、繊維強化複合材料に対して、座標軸を図-4に示すように設定しているとしてそれら従来手法を概説する。

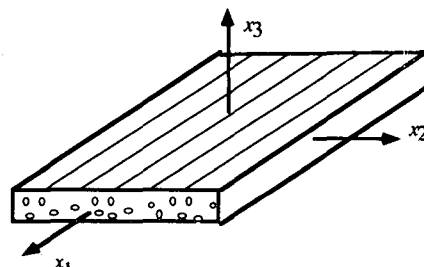


図-4 繊維強化複合材料の材料主軸方向の定義

図-4に示すようなような一方方向繊維強化複合材料では、 x_1 方向と x_2 方向が異方性の主軸となることは明らかである。また、ランダムに配置された繊維に垂直な x_2 方向と x_3 方向については性質は同じであると仮定される。したがって、問題はそれぞれの主軸方向を参照した時の軸方向のヤング率 E_1 、 $E_2(=E_3)$ 、せん断弾性係数 $G_{12}(=G_{31})$ 、ポアソン比 $\nu_{12}(=\nu_{13})$ 、 $\nu_{21}(=\nu_{31})$ を定めることに帰着し、 $\nu_{12}/E_1=\nu_{21}/E_2$ であるので、結局、定めねばなら

ない独立な弾性係数は4個となる。

これら4つの弾性係数は以下のように推定評価されている。

まず、繊維方向のヤング率 E_1 は微視力学的に並列モデルとして取り扱われ、体積平均をとることにより、

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (9)$$

のように評価されるのが一般的である。ここで、添字 f , m はそれぞれ繊維、マトリックスを表し、 E_f , E_m はそれぞれ繊維単体とマトリックス単体のヤング率、 V_f は繊維の体積含有率である。

繊維に直角な方向のヤング率 $E_2 (= E_3)$ 、せん断弾性係数 $G_{12} (= G_{31})$ およびポアソン比 $\nu_{12} (= \nu_{13})$ の評価については種々のモデルが提案されているが、繊維のランダムな配置を考慮しているモデルとしては、Tsaiの式とHalpin-Tsaiの式^{7,9)}が良く用いられている。

Tsaiの式では、ランダムに配置された繊維同士の接近率 C (C は経験的に0.2程度に選ばれることが多い) なるパラメーターを導入して、次のように残りの弾性係数を評価する。

$$E_2 = 2 \left[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m) V_m \right] \times \left\{ (1 - C) \times \frac{K_f (2K_m + G_m) - G_m (K_f - K_m) V_m}{(2K_m + G_f) + 2(K_f - K_m) V_m} + C \times \frac{K_f (2K_m + G_f) + G_f (K_m - K_f) V_m}{(2K_m + G_m) - 2(K_m - K_f) V_m} \right\} \quad (10)$$

$$G_{12} = (1 - C) G_m \times \frac{2G_f - (G_f - G_m) V_m}{2G_m + (G_f - G_m) V_m} + C G_f \times \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m) V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m) V_m} \quad (11)$$

$$\nu_{12} = (1 - C) \times \frac{K_f \nu_f (2K_m + G_m) V_f + K_m \nu_m (2K_f + G_m) V_m}{K_f (2K_m + G_f) - G_m (K_f - K_m) V_m} + C \times \frac{K_m \nu_m (2K_f + G_f) V_m + K_f \nu_f (2K_m + G_f) V_f}{K_f (2K_m + G_f) + G_f (K_m - K_f) V_m} \quad (12)$$

ここで、

$$K_f = \frac{E_f}{2(1 - \nu_f)}, \quad K_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m)}$$

とされている。また、 G_f , G_m はそれぞれ繊維と

マトリックスのせん断弾性係数、 ν_f , ν_m はそれぞれ繊維とマトリックスのポアソン比を表す。

Halpin-Tsaiの式では、繊維直角方向のヤング率 E_2 もしくはせん断弾性係数 G_{12} は、 M をそれら評価すべき E_2 もしくは G_{12} 、 M_m と M_f をそれぞれ繊維と母材の対応する弾性係数として、

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (13)$$

のように評価する。ここに、

$$\eta = \frac{M_f / M_m - 1}{M_f / M_m + \xi} \quad (14)$$

であり、パラメーター ξ は M が E_2 を表すときには $\xi = 2$ 、 G_{12} を表すときには $\xi = 1$ を選ぶことになっている。また、ポアソン比 ν_{12} については、直列モデルを用いて、

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (15)$$

により評価する。

3.2 強度特性の評価

複合材料の強度を表すための応力基準、土木工学の分野でいういわゆる破壊基準 (降伏基準) は、複合材料においては破損則と呼ばれているが、ここでは以下、破壊基準と呼ぶことにする。複合材料の破壊 (破損) については、様々な考え方に基づく破壊基準が提案されている。よく用いられているのが二次関数を用いるTsai-Wu則である^{12,14)}。Tsai-Wu則は、平面応力状態を例に取れば、3次元応力空間における二次曲面を表す

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = 1 \quad (16)$$

のような二次関数によって破壊基準を与えるものである。ここで、直交異方性体の強度がせん断応力の正負によらないことから τ_{12} に関する係数は初めから0と仮定されている。

上式中の定数は、図-5に示すような材料試験によって定められる。すなわち、 x_1 軸と x_2 軸それぞれの方向について試験片が示す一軸圧縮強度を X_1^c , X_2^c 、一軸引張強度を X_1^t , X_2^t 、せん断強度を S_{12} として、式(16)で与えられる曲面がそれらの強度を表すための条件から各係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/X_1^t X_1^c, & b_1 &= 1/X_1^t - 1/X_1^c \\ a_{22} &= 1/X_2^t X_2^c, & b_2 &= 1/X_2^t - 1/X_2^c \\ a_{66} &= 1/(S_{12})^2 \end{aligned} \quad (17)$$

残りの係数 a_{12} は、二軸試験を行わなければ定まらない。しかし、二軸試験は容易ではないことから、Tsaiらは式(16)が塑性論におけるMisesの基準式の一般化であるとの理解から、

$$a_{12} = -\sqrt{a_{11}a_{22}}/2 \tag{18}$$

によって推定することを提案している。

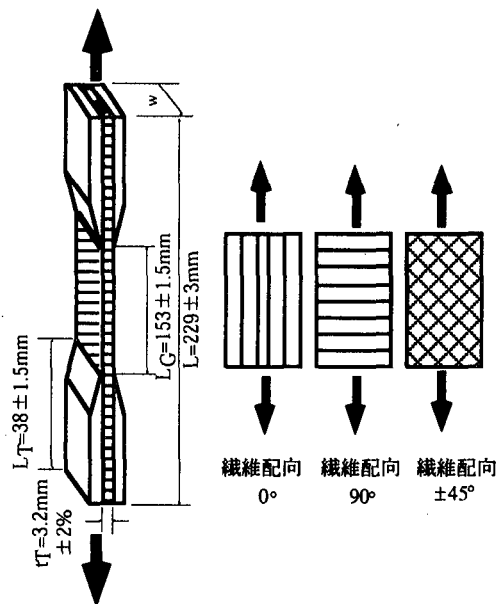


図-5 一方向繊維強化材料の引張試験

4. 一方向繊維強化材料の変形強度特性評価

2節に述べた均質化法に基づく方法によって一方向繊維強化複合材料の変形強度特性を予測評価し、3節に述べた従来法および実測データとの比較を通して、均質化法に基づく変形強度特性評価法の複合材料への適用性を検討する。

4.1 画像データによる繊維強化複合材料のユニットセル有限要素モデルの作成

ここでは、均質化法を繊維強化複合材料に適用するに先立ち、まず、複合材料のユニットセルのモデル化についての検討を行う。

2節に述べた均質化法に基づく提案手法では、入力情報としてユニットセルの構造を与える画像と構成材料の特性値のみから非均質材料の変形強度特性が評価される。均質化理論が微視構造の周期性を前提としたものであることから、理想的な周期構造を有しない実材料に対しては、ユニットセルを表す画像情報を、それが代表的な微視構造を表すように適切に選ぶ必要がある。

繊維強化複合材料では、図-6のように、繊維の配置が現れる材料断面をそのまま奥行き方向に続く微視構造としてユニットセルに選ばば良い。しかし、

その際に、ある程度の広がりを持つ領域を選んで十分な数の繊維が含まれるようにしないと、繊維がランダムに配置されているという材料の代表的な微視構造を表すことができない。

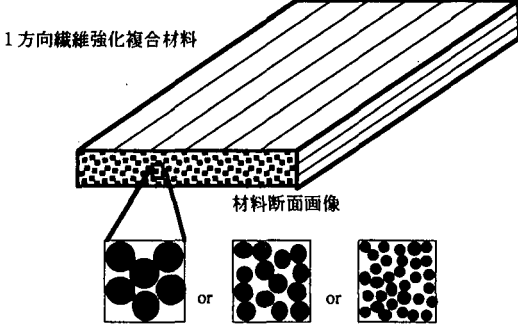


図-6 繊維強化複合材料とユニットセル

また、十分な大きさの領域をユニットセルとして選んでも、その有限要素モデルを作成する際に十分な数の要素分割を行わなければ、数値解析的な誤差の問題はもちろん、繊維の断面形状がうまく表現できず、実際には接触してない繊維同士が有限要素モデル上では接触したりする等、モデル化に付随した誤差の影響を考慮する必要がある。

表-1 繊維強化複合材料の諸元

複合材料	材料名	Glass-Epoxy	Boron-Epoxy	Kevlar-Epoxy
	型式	スコッチブライト1002	B(4) / 5505	Kevlar49 / Epoxy
	繊維体積含有率	0.45	0.5	0.6
強化繊維	繊維名	Glass繊維	Boron繊維	Kevlar49繊維
	ヤング率 (GPa)	72	410	120
	ポアソン比	0.22	0.2	0.35
	繊維直径 (μm)	16	100	12
	一軸強度 (GPa)	3.45	3.45	3.62
マトリックス (Epoxy)	型式名	HM	IMHS	3630
	ヤング率 (GPa)	5.2	3.4	3.5
	ポアソン比	0.35	0.35	0.38
	一軸強度 (GPa)	0.14	0.1	0.1

ここでは、表-1に示す3種類の繊維強化複合材料のうち、繊維とマトリックスの弾性係数の差が最も大きく、数値誤差等のモデル化で生じる問題が顕著に現れると考えられることから、Boron-Epoxy複合材料を用いて、この2点すなわち、

- 1) ユニットセルとしてどの程度の領域を選べば、ランダムな繊維の配置を表現できるのか

2) ユニットセルに対する有限要素分割数をどの程度にすれば安定した数値解が得られるのかについての検討を行う。

まず、1) のユニットセルとしてどの程度の領域を選べば良いかという問題について検討を行う。

ユニットセルの大きさは全体構造に対する相対的なものであり、その大きさを変えるということは、ユニットセル中に含まれる繊維の本数を変えることを意味する。したがって、図-6に示すように、ユニットセル中の繊維本数を変化させ、その配置を乱数によって定めた多数の画像データを作成して均質化解析を行い、繊維本数に対する解の収束性を調べた。その際、モデルの有限要素分割数については、あらかじめ実施した予備解析の結果から安定した解を与えると判断されたので、ユニットセル中の繊維1本あたりに900要素程度が配置されるような要素分割を行うこととした。

解析から得られた繊維直角方向の弾性係数とせん断弾性係数の値を図-7、図-8に示す。繊維本数が少ない時は、配置される繊維の位置関係の違いによる影響が強く現れるため、モデル間での弾性係数の評

価値は大きくばらつく。繊維本数が多くなるにつれてその影響は小さくなり、ユニットセル中に25本以上の繊維が含まれると、ばらつきは平均値に対して10%以下となっている。なお、繊維方向の弾性係数はこれらに比べて変動は小さく、また、ポアソン比は同様にばらつくが、繊維本数の増加に伴い同じ収束傾向が見られたのでここには示していない。

以上のことから、繊維強化複合材料に均質化法に基づく評価手法を適用する場合、材料断面の画像から繊維が25本程度含まれている領域をユニットセルとして選べば良いことが判った。

次に、ユニットセルをモデル化する場合の有限要素分割数の影響について検討する。先に得られた知見に基づいてユニットセル領域を繊維が25本入るようを選び、繊維1本あたりの有限要素分割数を変化させて解析を行った。

結果を図-9、図-10に示す。図を見ると繊維1本あたりの要素数が増加するにつれて繊維直角方向の弾性係数、せん断弾性係数のいずれもが、繊維1本あたりの要素数が1000要素以上でほぼ一定となり、その程度の要素分割を行えば安定した数値解が得られ

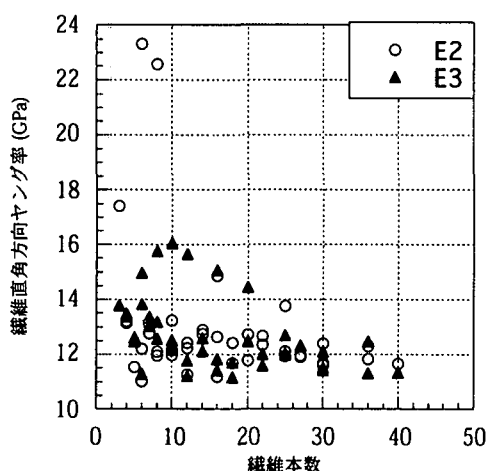


図-7 繊維本数と繊維直角方向弾性係数

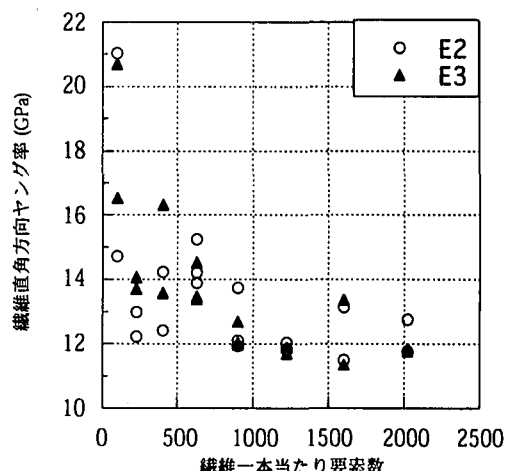


図-9 繊維本数と繊維直角方向弾性係数

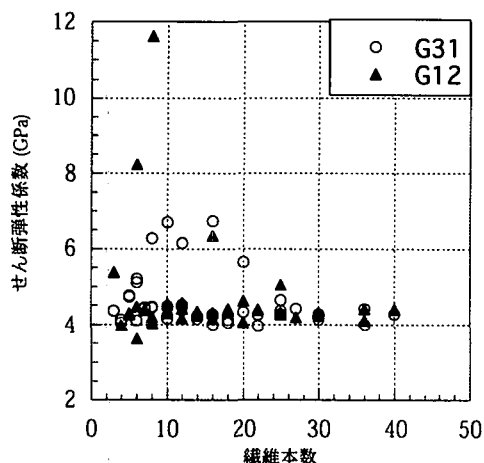


図-8 繊維本数とせん断弾性係数

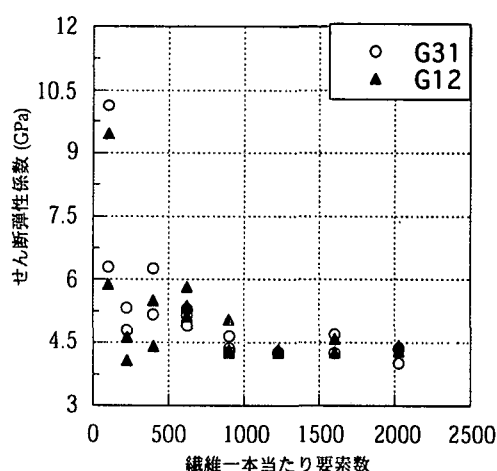


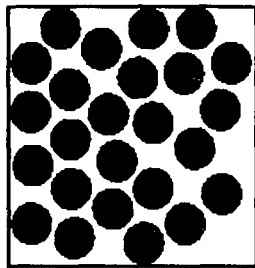
図-10 繊維一本当たり要素数とせん断弾性係数

ることが判る。

なお、ここに示していない繊維方向の弾性係数はこれらに比べて変動は小さく、また、ポアソン比は同様の収束傾向を示した。このことから繊維強化複合材料のユニットセルを有限要素分割する際には、繊維1本当たり1000要素程度が割り当てられるような要素分割を行えば十分な精度の解析結果が得られることが判った。

4.2 均質化法に基づく繊維強化複合材料の変形強度特性の評価

表-1に示した3種類の繊維強化複合材料⁷⁻⁹⁾に対し、先に得られた知見を元に図-11に示すような繊維数25本、繊維1本当たり1000要素の有限要素モデルになるようなユニットセル画像データを用いて解析を行う。



Boron-Epoxy 複合材料
 $V_f = 0.50010$

図-11 入力したユニットセル画像データ

(1) 変形特性の評価

表-1に示した繊維およびマトリックスの弾性係数を、ユニットセル画像データの画素の色値（今の場合は、0がマトリックス部分、256が繊維部分）に応じて対応する有限要素の要素材料特性として与え、均質化法によって均質化弾性係数を計算した。例として、Boron-Epoxy複合材料に対して得られた均質化弾性係数を以下に示す。

$$[E^H] = \begin{bmatrix} 16.094 & 5.800 & 5.608 & 0 & 0 & 0 \\ & 14.879 & 5.367 & 0 & 0 & 0 \\ & & 209.720 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4.656 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & & 5.053 & 0 \\ & & & & & 4.004 \end{bmatrix}$$

(単位：GPa)

予測結果を実験値および従来手法による評価値と比較するため、上のように得られた弾性係数からコンプライアンスを求め、さらに適当な座標変換を施して、次式により繊維方向、繊維直角方向の弾性係数、せん断弾性係数、ポアソン比を計算した。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

表-1に示した3種類の繊維強化複合材料に対する変形特性評価結果を従来手法による結果および実験値と共に表-2に示す。

表中、繊維方向ヤング率 E_1 を見ると、均質化法、従来手法ともに実験値に非常に近い値が得られており、繊維強化複合材料の繊維方向の弾性係数については十分妥当な評価をし得ることが判った。若干の違いは画像データ作成の際に生じた繊維含有率 V_f の誤差による。

繊維直角方向のヤング率 E_2 、 E_3 、ポアソン比 ν_{12} 、 ν_{13} 、せん断弾性係数 G_{12} 、 G_{31} を見ると、均質化法による評価値は、従来手法による評価値に非常に近い値であり、実験値とは一致してはいないものの十分近い評価結果が得られている。

表-2 変形特性に対する予測評価の結果

材料 Glass-Epoxy								
評価法	V_f	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{31} (GPa)	ν_{12}	ν_{13}
均質化法	0.44916	35.241	13.228	12.697	4.608	4.906	0.279	0.285
実験値	0.45	38.6	8.27	—	4.14	—	0.26	—
Tsai式	0.4	35.26	11.864	—	5.611	—	0.279	—
Halpin-Tsai式	0.45	35.26	14.159	—	4.439	—	0.292	—
材料 Boron-Epoxy								
均質化法	0.50010	206.610	11.930	12.037	4.362	4.261	0.261	0.260
実験値	0.5	204	18.50	—	5.59	—	0.23	—
Tsai式	0.5	206.7	22.532	—	14.576	—	0.255	—
Halpin-Tsai式	0.5	206.7	13.113	—	3.705	—	0.275	—
材料 Kevlar-Epoxy								
均質化法	0.59996	73.394	17.800	15.629	5.596	6.556	0.358	0.360
実験値	0.6	76	5.50	—	2.30	—	0.34	—
Tsai式	0.6	73.4	14.069	—	7.682	—	0.359	—
Halpin-Tsai式	0.6	73.4	16.354	—	4.585	—	0.362	—

均質化法、Tsai式、Halpin-Tsai式のいずれもが繊維とマトリックスの間の完全付着を仮定している。これらの予測手法による評価値と実験値が異なった原因としては、入力値として用いている単体材料の特性値のばらつき、予測手法では実際の材料中の繊維-マトリックス間の界面剥離やマトリックス中の空隙などの初期欠陥の影響を考慮していないこと、などが関係していると思われる。特に、材料中の初期欠陥は偶然性が大きく、さらに入力値として用い

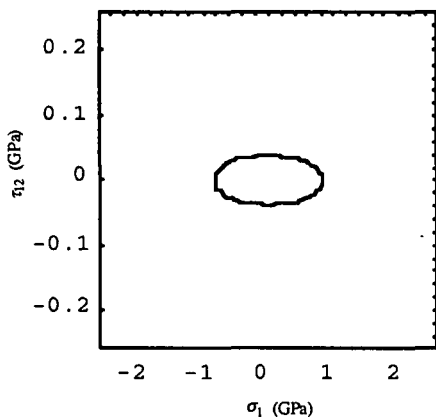
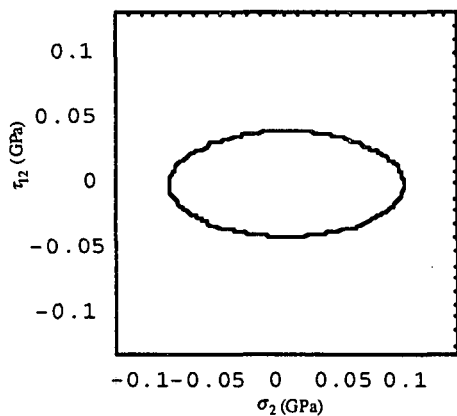
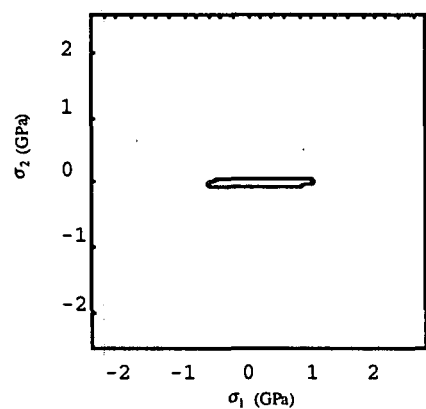
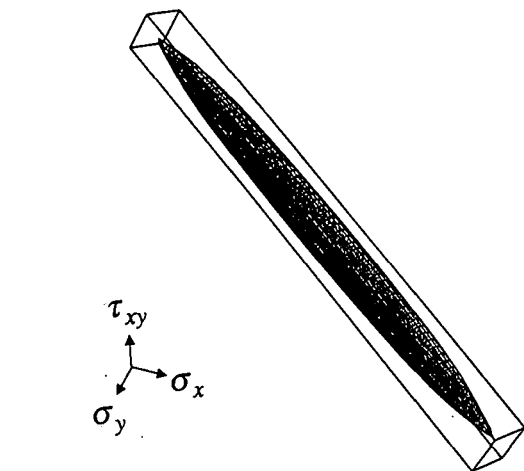


図-12 均質化法による得られた破壊基準面
(二次曲面と原点を通る断面)

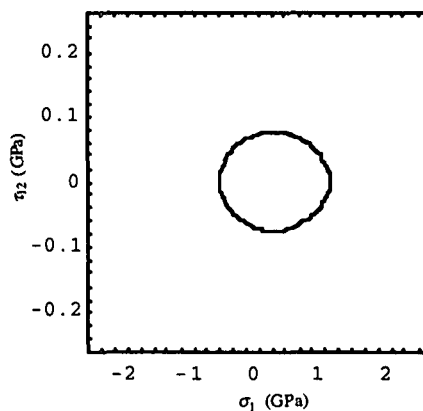
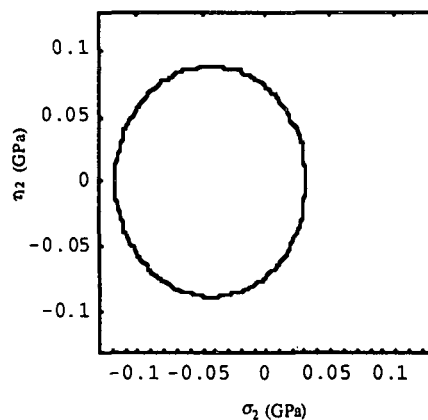
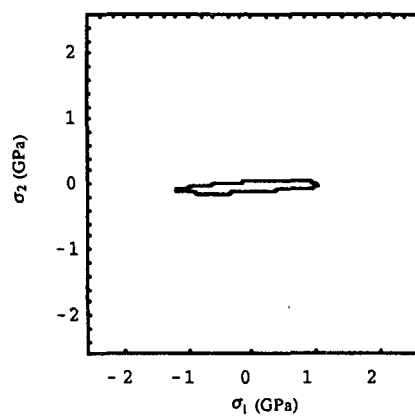
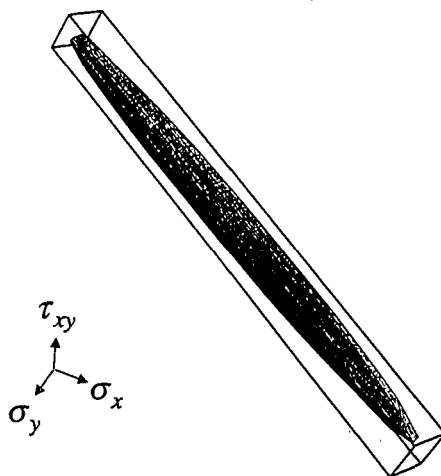


図-13 Tsai-Wu則による破壊基準面
(二次曲面と原点を通る断面)

る単体材料の特性値のばらつきとの兼ね合いまでを考慮すると、これらの影響は予測値に対する割引率（あるいは割増率）として扱わざるを得ない。そうしたことを視野に入れて考えれば、均質化法は、適切な画像データさえ与えれば信頼し得る従来法と同等の精度の評価値を与えることから、繊維強化複合材料の変形特性評価に十分適用可能であるといえる。

(2) 強度特性の評価

表-1中の3種類の複合材料について、繊維およびマトリックスをVon-Mises材料として、それぞれの一軸引張強度から式(4)中の定数 K を定めて破壊基準として与え、2.2節に述べた方法に従って728通りの6次元単位応力 $\bar{\Sigma}_{mn}$ を与えて複合材料に対する破壊基準を表す6次元二次曲面

$$\phi(\Sigma) = \{\Sigma\}'[A]\{\Sigma\} + \{\Sigma\}'\{b\} - 1 = 0$$

を定めた。さらに、実測値との比較のために、平面応力条件のもとで6次元応力空間から3次元応力空間への変換を行った。Glass-Epoxy複合材料について、均質化法によって得られた破壊基準二次曲面と原点を通る座標面での断面形状を図-12に、また、実験結果から3.2節に述べたTsai-Wu則によって得られた同様の破壊基準面と断面を図-13に示す。

図に見るように、破壊基準二次曲面が細長い楕円体になっており、繊維軸方向に強い強度を発揮する繊維強化複合材料の異方性を合理的に表している。

実験結果から定められたTsai-Wu則による破壊基準二次曲面は中心が原点からずれているが、それは圧縮強度と引張強度の実験値が異なることによる。

これに対し、均質化法に基づく数値解析では、繊維およびマトリックスはともにVon-Mises材料とし、

圧縮、引張ともに理想的な一軸平均応力状態が実現したとして強度が計算される。そのため圧縮強度と引張強度は絶対値が等しいものと評価されて得られた楕円体の中心は原点に一致する。この曲面と応力軸との交点を材料強度と見なしたときの値は、次に述べる極限支持力解析の結果および実験値と共に表-3に示している。

(3) 極限荷重解析による強度試験のシミュレーション

均質化法に基づいて上に得られた破壊基準楕円体は、均質化弾性係数と同様、複合材料の内部構造とその各構成材料の単体としての特性だけから計算されたものである。それは、実際の試験における供試体の形状や寸法、および供試体に付与される境界条件などの影響とは無縁の特性として評価されており、その意味では複合材料の「本来の材料特性」と呼ぶべき性質のものと言える。

したがって、実験値との比較によってその妥当性を検証するためには、上に得られた均質化弾性係数と破壊基準を用いて、強度試験のシミュレーション行なって供試体が発揮するであろう強度を予測し、それを比較の対象とする必要がある。

そこで、図-14に示すように、実際の強度試験供試体の4分の1の有限要素モデルを作成し、二次元平面応力条件のもとで極限荷重解析を行って供試体の破壊強度を予測した。得られた繊維方向の引張破壊強度 X_1' 、繊維直角方向の引張破壊強度 X_2' 、面内せん断破壊強度 S_{12} を表-3に示している。

解析値と実験値の引張強度を比較すると、解析は実験値をよく予測しているとはいえない。しかし、同程度のオーダーの結果は得られている。

表-3 強度特性評価結果

		Kevlar -Epoxy	Boron -Epoxy	Glass- Epoxy
極限荷重解析 による材料試験 のシミュレー ション解析 結果	繊維方向 強度(GPa)	0.761	1.692	0.671
	繊維直角方 向強度(GPa)	0.060	0.055	0.102
	せん断 強度(GPa)	0.044	0.027	0.071
材料試験 実測値	繊維方向 強度(GPa)	1.4000	1.260	1.0620
	繊維直角方 向強度(GPa)	0.0120	0.061	0.0310
	せん断 強度(GPa)	0.034	0.067	0.072
均質化法で求 めた破壊基準 に基づく強度 評価値	繊維方向 強度(GPa)	2.036	1.732	0.822
	繊維直角方 向強度(GPa)	0.053	0.044	0.089
	せん断 強度(GPa)	0.025	0.015	0.039

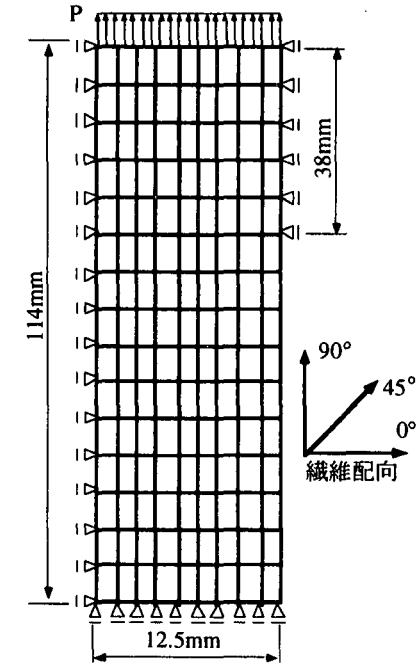


図-14 材料試験の有限要素解析モデル

この解析の結果は、均質化法に基づいて材料特性と内部構造を合理的に解析モデルに反映させれば、複雑な逐次破壊現象を完全塑性流動として理想化しても同程度のオーダーの強度評価ができるということを示している。

5. おわりに

本研究では、試験データが豊富な繊維強化複合材料を取り上げ、均質化法に基づいた数値解析手法を用いてその変形強度特性を予測評価し、実際の試験結果および既存手法との比較を通して、手法の複合材料への適用性、適用限界等を検討した。

まず、均質化法を適用する際の画像データを利用したユニットセルのモデル化について、繊維を一方向にランダムに配置した繊維強化複合材料については、その内部構造を的確に表すためにユニットセル内に25本以上の繊維を含むようにし、有限要素分割数は繊維1本当たり1000要素以上の分割を行えば解析誤差は十分に小さくなることが確認できた。

そして、実際に3種類の繊維強化複合材料の変形強度特性を予測評価した結果、繊維強化方向の弾性係数は従来法と同様に実験値と良い一致を示し、繊維直角方向の弾性係数ならびにせん断弾性係数については、繊維とマトリックスの境界面における初期剥離や初期欠陥を考慮していないことから大きめの値を予測する結果となった。

従来、供試体試験によって定められている変形強度特性は、供試体の形状や境界条件に強く依存したある実現値である。そのため試験では再現できない条件下で用いることへの信頼性に問題があることは否めない。これに対し、均質化法に基づく本提案手法は、複合材料の内部構造とそれを構成する単体材料の特性のみから変形強度特性を予測評価するもので、得られた変形強度特性は、複合材料に与えられる形や境界条件に依らないという点で「本来の材料特性」といった意味合いを持ち、あらゆる境界条件下で発揮されるであろう特性を評価する。この意味で、本研究で示した均質化法に基づく評価手法は大いに魅力あるものといえる。

しかしながら、提案手法による評価では、強度特性については、実際の繊維強化材料の強度が、繊維とマトリックスの段階的な剥離から繊維の破断およびマトリックスの破壊に至る複雑な逐次現象の帰結点であるのに対し、提案手法ではそれらの複雑なメカニズムを完全塑性流動に置き換えて扱うために、極限荷重解析によって実験をシミュレーションした結果は、実験値とオーダーが合うといった程度の精度であった。

我々が必要な「強度」は材料の用途に依存する。繊維強化複合材料では最終破断強度とそれに至る変形特性が問題となる。ここで検討した均質化法に基

づく評価手法は、そのままでは、繊維強化複合材料の平均弾性係数の評価には適用可能であるが、強度評価に適用するには、予測値の性質をよく踏まえた上で、事前の粗い予測に使うか、あるいは、手法における破壊の考え方を複合材の用途を踏まえた破壊に合うように修正する必要があると言える。「強度」をどのような考え方に基づいて取り扱うかについてはまだまだ研究すべき点が多い。

謝辞

本研究を遂行するにあたって、大阪大学大学院工学研究科生産科学専攻の高野直樹助教授には、論文や資料を提供していただくとともに貴重なアドバイスをいただいた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Guedes, J. M. and Kikuchi, N. : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, 83, 143-198, 1991.
- 2) 寺田賢二郎, 菊池昇: 複合材の均質化解析のためのデジタル・イメージを利用した微視構造モデリング手法, 日本機械学会論文集, A-64, 170-177, 1995.
- 3) Terada, K. and Kikuchi, N. : Nonlinear homogenization method for practical applications, *Computational Methods in Micromechanics*, S. Ghosh and M. Ostoja-Starzewski eds., AMSE AMD 212, 1-16, 1995.
- 4) Kyoya, T., Terada K., and Kishino, Y., : Limit load analysis of rock mass structures combined with a homogenization method, *Proc. IS-Nagoya 97', Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Pergamon, 407-412, 1997.
- 5) 京谷孝史, 寺田賢二郎, 岸野佑次: 均質化法による亀裂性岩盤の変形強度特性評価と極限支持力解析, 第42回地盤工学シンポジウム論文集, 87-92, 1998.
- 6) Grierson, D. E. : Collapse load Analysis, M. Z. Cohn and G. Maier (eds): *Engineering plasticity by mathematical programming*, *Proc. NATO ASI*, Pergamon Press, 93-105, 1977
- 7) 福田博, 横田力男, 塩田一路 著, 複合材料基礎工学, 日刊工業新聞社, 1994.
- 8) S. W. Tsai and H.T. Hahn 著, 藤井太一監訳: 複合材料の強度解析と設計入門, 日刊工業新聞社, 1986.
- 9) L. A. Carlsson and R. B. Pipes 著, 福田博, 高雄善裕, 影山和郎訳: 高性能複合材料の実験的評価, 古今書院, 1990.
- 10) 上辻靖智: 繊維強化複合材料の損傷形態のモデル化とそれを用いたAEシミュレーション, 大阪大学博士学位論文, 1998.

(1999年4月23日 受付)