

粒状要素解析による地盤材料損傷モデルの定式化

Formulation of Damage Model for Geomaterials with Granular Element Analysis

金子賢治*, 岸野佑次**, 林 直宏***, 京谷孝史****

Kenji KANEKO, Yuji KISHINO, Naohiro HAYASHI and Takashi KYOYA

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

***正会員 工修 国際航業(株) 東北事業本部 (〒983-0852 仙台市宮城野区榴岡5-1-23 仙台Kビル)

****正会員 工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

The loss of interparticle bonding causes mechanical damage to cohesive geomaterials. The damage model is a constitutive model to obtain a relationship between stress and strain which changes with the degree of damage. The authors developed a simulation model to evaluate the degree of damage in terms of the Granular Element Method. In this model the periodic boundary is adopted to perform element tests with the minimum influence of boundary condition. By a tentative application, it was found that the stress-strain relationship was predicted fairly well even with a simple damage model.

Key Words : damage model, geomaterials, periodic boundary control, Granular Element Method

1. はじめに

材料中に無数に分布する微視的き裂や空隙などの構造欠陥は、強度や剛性の低下といった材料損傷の原因となり、最終的には材料の破断をもたらす。損傷力学は、このような材料内部に分布している構造欠陥の力学的効果に着目し、これを連続的な変数場として記述することにより、材料中の構造欠陥とこれを含む材料の力学的挙動を連続体力学の枠内で扱おうとするものである。損傷力学は、脆性の破壊クリープ時間を算定することを目的にKachanov¹⁾によって初めて提案されて以来、主に金属材料を対象として発展してきた。Kachanovは、材料損傷を支配する要因は微視的空隙の発達による有効断面積の減少であると考え、これを損傷パラメータとして用いた。その後、金属材料のクリープ現象はもとより延性・塑性損傷や疲労損傷にも拡張されている^{2)~6)}。

土木工学の分野において、損傷力学はコンクリートや岩石^{7), 8)}などの脆性材料に対して適用されている。特に岩石は地盤材料の内でも最も脆性的な材料であり、微視的き裂や空隙の発生・発展がその変形に大きく影響を及ぼすと考えられている。このため、岩石内部の微視的き裂や空隙を損傷パラメータで表し、これを内部変数とする損傷力学に基づいた構成則が頻繁に用いられる。

一方、粘着力を有する地盤材料の非弾性変形メカニズムは、個々の粒子間の結合が失われることに起因すると考えられる。このような粒子間の結合の喪失を材料内部の構造欠陥の発展ととらえ、このことを損傷力学における損傷パラメータの変化として表

すことにより、材料内部の微視的変形機構を反映した合理的な構成則の定式化を行うことを可能とするであろう。しかし、コンクリートや岩石などの脆性材料においては、AE試験などにより材料内部の微視的損傷の発展を測定することが行われているが、粘着性の地盤材料に対して実際の実験などによって材料内部の微視的損傷の発生・発展を測定することは非常に困難である。したがって、地盤材料の巨視的な挙動のみではなく、その微視的な変形メカニズムを解明するためには、離散的な粒状体モデルによる載荷シミュレーション試験が一つの有効な手段であると考えられる。地盤材料に対する離散的解析手法^{9), 10)}の一つである粒状要素法¹⁰⁾は、粒子の接触状態より定まる剛性行列を考慮した準静的な解析手法であり、材料の変化に伴う微視的情報を得るための有効な手法である。また、地盤材料の載荷シミュレーション試験を行うにあたっては、境界条件に左右されない材料本来の力学特性を抽出する必要がある。境界条件の影響を受けにくい制御法として周期境界制御があるが、比較的少ない粒子数で地盤材料モデルの載荷シミュレーション試験を行うのに適した制御法である。

本文においては、地盤材料を粘着力により粒子が結合した粒状体としてモデル化し、この結合が失われる過程を損傷と捉えた構成モデルの提示を行った。特に、損傷度を具体的に求めるために新たに開発した周期境界制御粒状要素法を用いた載荷シミュレーション試験を実施し、この結果をもとに構成モデルの妥当性について考察を行った。

2. 地盤材料の粒状要素モデル

粒状要素法^{10), 11)}の剛体粒子や粒子間バネなどを用いる点に関しては、地盤材料の離散解析に広く用いられている個別要素法⁹⁾と同様である。両者の主な相違点は、個別要素法が差分法により粒子の運動を追跡するのに対して、粒状要素法は各粒子の接触状態から定まる全体剛性行列を考慮し、つり合い条件を満足しながら増分計算を行う点である。また、粒状要素法がより精度の高い制御を可能とすることやより明確に地盤材料の力学特性を抽出できることが示されている¹¹⁾。ここでは、粒状要素法を一般的な地盤材料の要素試験に応用するために、粒子間粘着力と周期境界制御を導入する方法について示す。

周期境界とは、単位の粒子集合体を上下左右に繰り返して得られる無限の粒子集合を取り扱う境界制御法であり、その解析結果は、周期的な特性をもつが無限に広がる材料本来の力学特性に近い性質を得ることができる。周期境界制御は、境界条件の影響をなるべく排除し、材料本来の力学特性の把握を目的としており、信頼度の高い微視的情報に基づく構成則の検証に適した手法である。

また、粒子間接触点に粘着力を導入する理由は、粒状要素法をより一般的な地盤材料への適用を可能とするためである。粘着力を0とすることにより従来の粒状要素法と同様に砂を対象とすることもでき、粘着力を非常に強くすれば軟岩なども解析の対象とすることができよう。また、粘土については両者の中間の粘着力を持たせることにより解析を可能とする。粒子間の粘着力には、一般にサクション力も含まれるが、本論文では、砂岩のように圧縮力を受けて粒子同士が互いに結合したような地盤材料を対象とする。したがって、ここでは初期状態における結合力を粘着力と考え、この粘着力が失われた後の力学的相互作用は摩擦力のみと考えてモデル化を行った。

2.1 粒子のモデル化と損傷テンソルの算定

粒子間接触点のモデル化は、接触点に粘着力が作用し粒子同士が結合している場合と粘着力が作用せず粒子同士の結合が解消された場合とに分ける必要がある。

粒子間に粘着力が作用している場合、粒子間に図-1に示すような仮定を設ける。砂や土粒子を表す2次元剛体円形粒子とその接触点にバネ要素、テンションカットオフ要素、摩擦性要素を仮定する。テンションカットオフ要素を設けることにより、粒子間に想定したバネ要素はある程度の引張り力（負の符号とする）にも抵抗することとなる。さらに、粒子間に働く引張り力が仮定した粒子間粘着力を超えたときに粒子間の結合が解消されるものとする。ま

た、接線方向成分に対してはCoulombの摩擦則を考慮する。以上の粒子間結合条件は、次式のように表される。

$$\begin{cases} \sqrt{p_n^2 + p_t^2} \leq c & \text{if } p_n < 0 \\ |p_t| \leq p_n \tan \phi + c & \text{if } p_n \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

ここに、

- p_n : 接触点における接触力の法線方向成分
- p_t : 接触点における接触力の接線方向成分
- ϕ : 粒子間摩擦角
- c : 粒子間粘着力

である。ここでは、前述のように粒子間の粘着力が水などの影響によるものではなく粒子同士が粘着力により結合した地盤材料を対象としているため、式(1)の条件を満たし粒子同士が結合している場合には粒子間にすべりは生じないものとし、載荷途中に新たに生成した接触点には粘着力は生じないものと仮定する。

初期状態における全ての接触点は結合しているものとし、載荷が進み粒子間の結合が解消された接触点においては図-1に示すテンションカットオフ要素がノーテンション要素のように働き、引張りに対して抵抗しないこととなる。この後、以下のすべり発生条件を満たすと粒子間接触点においてすべりが生ずることとする。

$$|p_t| \geq p_n \tan \phi \quad (2)$$

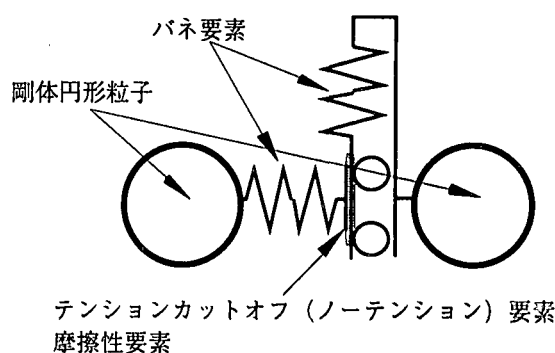


図-1 粒子間力学特性モデル

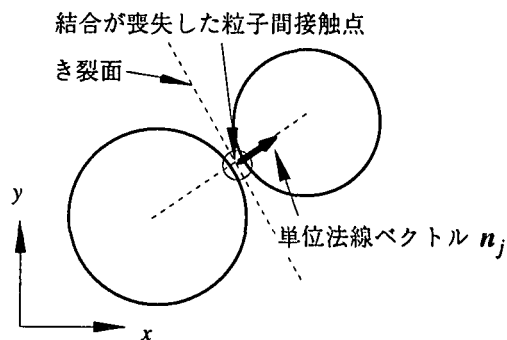


図-2 き裂面の単位法線ベクトル

粘着力を考慮した粒状要素法による載荷シミュレーション試験を行うと、粒子間接触点の状態から構造欠陥の分布を観察することができ、これらの構造欠陥の分布情報から材料の損傷を定量的に評価することが可能となる。損傷パラメータについては様々な定義が考えられるが、ここでは、欠陥の方向とその大きさの情報を表すことのできる2階の損傷テンソルを例示する。

粘着力により結合していた粒子Aと粒子Bの接触力が式(1)の結合条件を超えて、粒子Aと粒子Bが剥離するとする。粒子Aと粒子Bの間に発生するき裂面は、それぞれの粒子の中心を結ぶ線に対し垂直であり、このき裂面をその単位法線ベクトルで表すことができる。対象領域中の j 番目のき裂の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_j$ (図-2)，初期状態で結合していた総接触点数を N とし、損傷テンソル $\mathbf{D}$ を次式で定義することとする。

$$\mathbf{D} = \sum_j \frac{1}{N} \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j \quad (3)$$

式(3)はKachanov¹⁾の損傷パラメータに対応したものである。

粘着力を考慮した粒状要素モデルの解析アルゴリズムは、従来のアルゴリズム¹¹⁾において粒子間の力学特性を変更する点が異なるのみである。

2.2 周期境界制御法

材料の構成則の検証を実際に要素試験で行う場合に問題となるのは、供試体の境界の影響である。これは、現実の試験においても共通したことであるが、例えば、端面拘束の影響が供試体内部の応力分布の不均一性を生じさせるなど、本来材料試験として望ましくない要因をなるべく避けることが重要である。従来の粒状体載荷シミュレーション試験においても内部粒子は外部粒子あるいは外壁によって制御されるため、多かれ少なかれ境界の影響を受けることになる。そこで、周期境界制御法を用いることにより、周期性という制約はあるが解析対象モデルを無限に広がった領域とみなすことができ、比較的少ない粒子数でも理想に近い状態を実現することができる。ただし、例えば変形局所化の研究のような、境界条件に依存する変形解析には馴染まないことに留意する必要がある。ここでは、材料自身のも

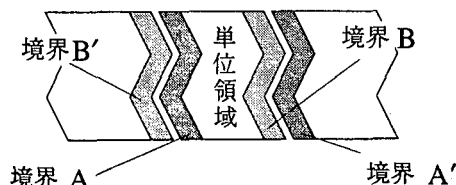


図-3 1次元周期境界の概念

つ力学特性を解明するために開発した粒状要素法の周期境界制御法について述べる。粒状要素法の周期境界制御においては、後述する周期長、せん断長の変化を剛性関係に基づいて制御することが特徴である。

(1) 周期境界の考え方

図-3において境界A、Bを単位領域の左右方向に付をなす境界とする。各々の境界の外側にこの単位領域が繰り返して配置されているとすると、左右方向に無限に続く領域を想定することができる。同様に、上下方向に展開すれば、単位領域が二次元的に無限に続く領域を想定することができる。周期境界制御を用いると、単位領域を解析することにより、無限に続く領域の解が得られ、境界条件に支配されない材料本来の力学特性を解明することができる。

ここで、周期境界上の境界粒子の取り扱いについて述べる。図-3のような周期境界を実現するために図-4に示すように、周期境界において境界外側にダミー粒子を配置する。同図のように粒子 n と粒子 m はそれぞれ x 方向に付をなす境界に接している。粒子 n に接触している粒子 m のダミー粒子を m' 、粒子 m に接触している粒子 n のダミー粒子を n' とし、各粒子の中心座標をそれぞれ (x_n, y_n) 、 (x_m, y_m) とする($x_n < x_m$)。また、図-5に示すように、変形後の周期境界の x 、 y 方向長さ(これを周期長と称する)を s_x 、 s_y 、せん断によるずれ(これをせん断長と称する)を t_{xy} 、 t_{yx} とすれば、粒子 m' の中心座標は $(x_{m'}, y_{m'}) = (x_m - s_x, y_m - t_{xy})$ 、粒子 n' の中心

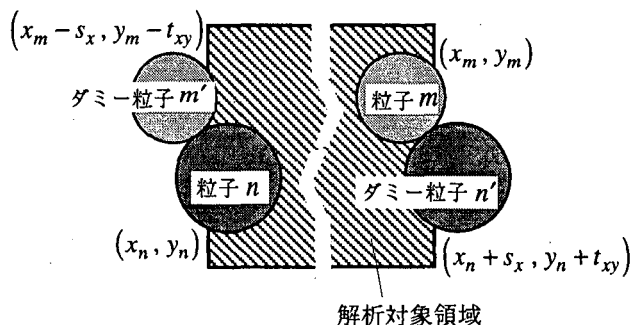


図-4 境界粒子とダミー粒子

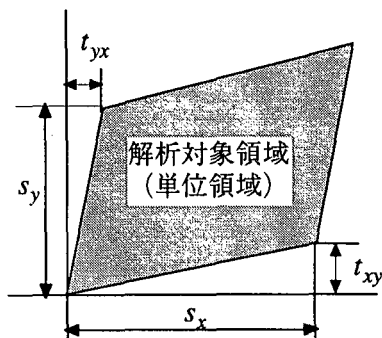


図-5 周期長とせん断長さ

表-1 載荷シミュレーション試験に用いた諸

粒子数	475 (個)
粒径	0.05 ~ 0.15 (cm)
バネ定数法線方向成分	1000 (kgf/cm)
バネ定数接線方向成分	700 (kgf/cm)
粒子間摩擦角	45°
粒子間粘着力平均値	5.0 (kgf)
初期拘束圧	10.0 (kgf/cm ²)

座標は $(x_n', y_n') = (x_n + s_x, y_n + t_{xy})$ となる。これらの中心座標から粒子 n と粒子 m' 、粒子 m と粒子 n' の接触力と接触関係を求めることにより、従来の粒状要素法^{(10), (11)}と同様のアルゴリズムにより解析を行うことができる。

(2) 応力、ひずみの算定法と制御法

境界粒子がダミー粒子から受ける力は解析対象領域の境界が外部から受ける力であるとみなすことができる。第1 Piola-Kirchhoff応力を用いることとすれば、各境界粒子の初期座標 $(X_0, Y_0)_B$ 、各境界粒子が各ダミー粒子から受ける力の合力 $(f_x, f_y)_B$ 、対象領域の初期面積 A_0 より、応力は次式で与えることができる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} f_x X_0 & f_y X_0 \\ f_x Y_0 & f_y Y_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

σ_x , σ_y は垂直応力, τ_{xy} はせん断応力であり、添字Bは境界粒子を意味する。

また、初期状態の周期長を x 方向、 y 方向それぞれ s_{0x} , s_{0y} とするとひずみは次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s_x}{s_{0x}} & \frac{1}{2} \left(\frac{t_{xy}}{s_{0x}} + \frac{t_{yx}}{s_{0y}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t_{xy}}{s_{0x}} + \frac{t_{yx}}{s_{0y}} \right) & 1 - \frac{s_y}{s_{0y}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ε_x , ε_y は伸縮ひずみ, γ_{xy} はせん断ひずみである。

解析対象領域をひずみで制御する場合、ひずみの目標値を式(5)の左辺に代入し、周期長、せん断長を求め、それらを固定して収束するまで逐次計算する。応力で制御する場合は、現応力値と目標応力値の差を解消するように、逐次計算途中で周期長、せん断長を変化させる必要がある。現応力値と目標応力値の差を $\Delta\sigma_x, \Delta\tau_{xy}, \Delta\tau_{yx}, \Delta\sigma_y$ とすると、応力が目標値に達するために境界に加わるべき力の増分 $\Delta F_x, \Delta F_{xy}, \Delta F_{yx}, \Delta F_y$ は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \Delta F_x & \Delta F_{xy} \\ \Delta F_{yx} & \Delta F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{0x} & 0 \\ 0 & s_{0y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x & \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yx} & \Delta\sigma_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

x 方向、 y 方向それぞれの境界粒子とダミー粒子の接触点の合計を K_x , K_y とすると、周期長とせん断長の変化量 $\Delta s_x, \Delta t_{xy}, \Delta t_{yx}, \Delta s_y$ は次式により求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \Delta s_x \\ \Delta t_{xy} \\ \Delta t_{yx} \\ \Delta s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ K_x c_n & K_x c_t & K_y c_t & K_y c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_{xy} \\ \Delta F_{yx} \\ \Delta F_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 c_n , c_t は接触点における法線および接線方

向のバネ定数である。このように、周期境界制御では応力制御、ひずみ制御に関わらず、間接的に周期長とせん断長で制御されていることになる。

3. 地盤材料の載荷シミュレーション試験

本章では、前章で示した地盤材料の粒状要素モデルを用いて行った載荷シミュレーション試験の例を示す。

3.1 載荷シミュレーション試験の概要

単位領域の初期形状は一辺5.0cmの正方形領域とする。解析に用いた粒子数やバネ定数などの諸定数を表-1に示す。周期境界の初期周期長 s_{0x} , s_{0y} は、解析領域が初期に受ける拘束圧による補正長 a を差し引いた $5.0 - a$ cmとし、初期せん断長は0とする。この状態から出発し、粘着力を0として等方圧が10.0 kgf/cm²になるまで等方応力を加え、この時点で接触している粒子間接触点に粘着力を与える。この過程は、砂粒子同士がある拘束圧の下で結合し砂岩を形成する過程に類似している。なお、載荷シミュレーション試験の途中で新たに発生した接触点は粘着力をもたないものとする。粘着力の大きさは、実材料に応じて定めるべきではあるが、本研究では平均値が5.0 kgfとなるようにランダムに与えることとし、このようにして求めた初期状態を図-6に示す。同図には、周期境界制御の様子を表すため、対象領域の外側の粒子も示した。同図の白色の粒子が単位領域を形成する粒子である。

以下に示す例は、ひずみ増分を $d\varepsilon_1 = -0.007071\%$, $d\varepsilon_2 = 0.007071\%$ とする周期境界ひずみ制御二軸せん断試験であり、ひずみのノルム

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$$

が3.0%に達するまで載荷した後、ひずみ増分を反転させ初期状態まで除荷する。

3.2 載荷シミュレーション試験結果と考察

載荷シミュレーション試験では、載荷途中や載荷後の材料内部の粒子の移動やすべり、粒子間接触力の状態、粘着力を喪失した点の分布などを観察する

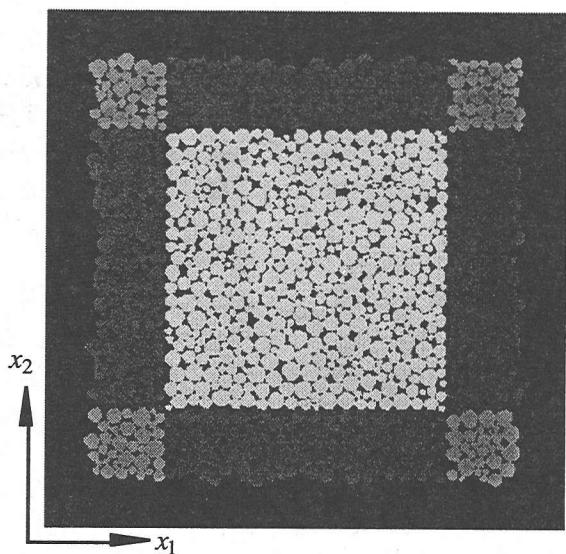
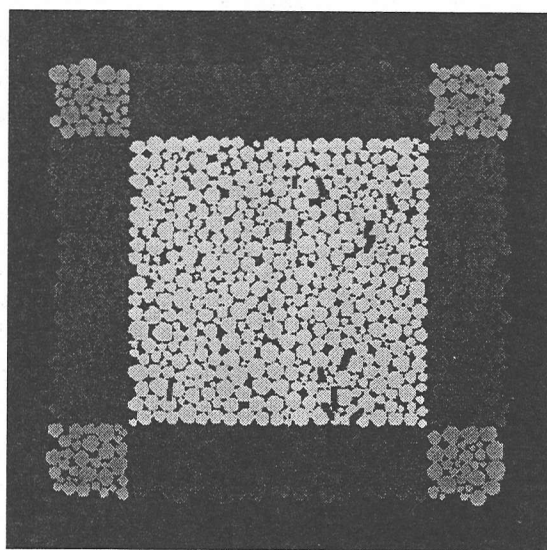
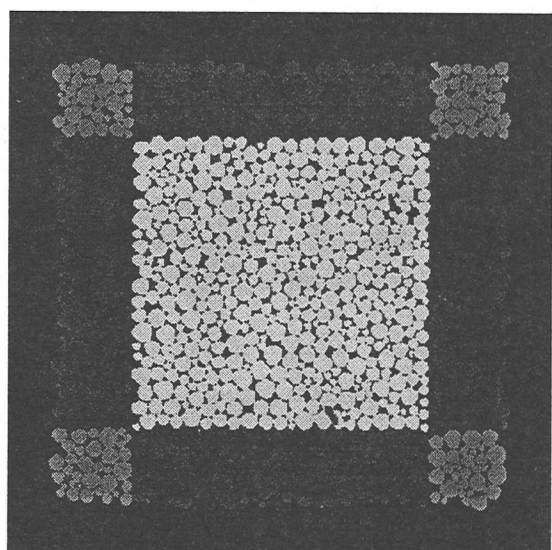


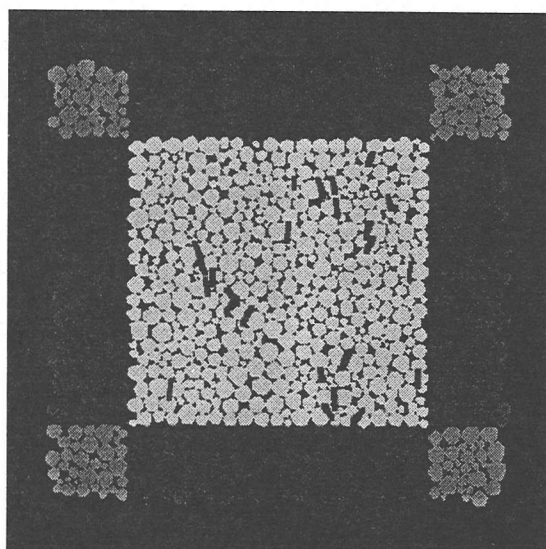
図-6 地盤材料解析モデルの初期状態



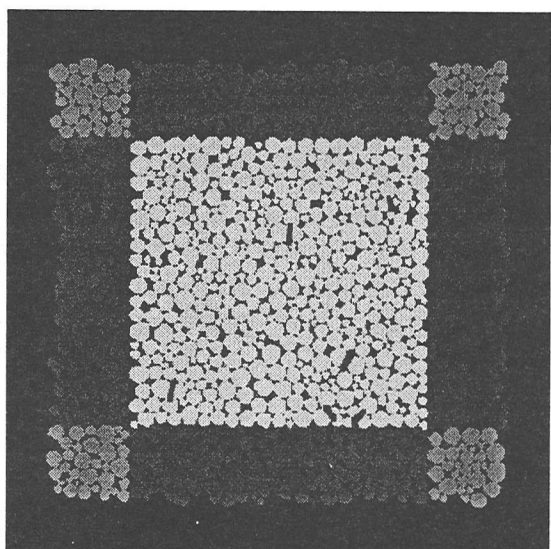
(c) $\|\epsilon\| = 2.0\%$



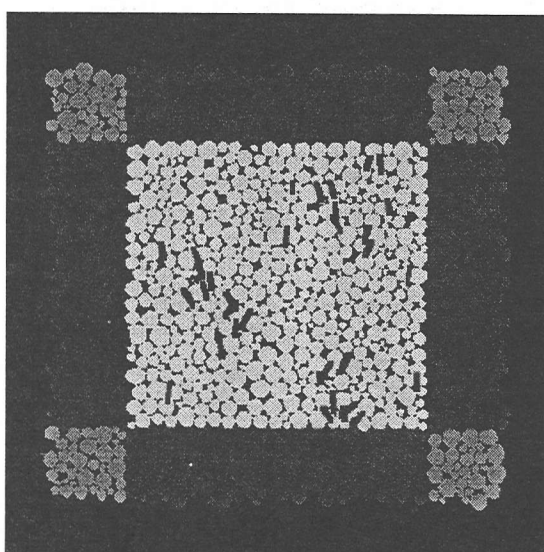
(a) $\|\epsilon\| = 0.8\%$



(d) $\|\epsilon\| = 2.6\%$



(b) $\|\epsilon\| = 1.4\%$



(e) $\|\epsilon\| = 3.0\%$

図-7 き裂分布の変化

ことができる。粒子の移動と粒子間のき裂分布の変化の様子を図-7に示すが、き裂面を灰色の線で示した。図-7より、載荷が進むにつれてき裂の数が増加することが観察される。また、特に変形局所化などは見られない。

式(3)に示した2階の損傷テンソルと $\|\epsilon\|$ の関係を図-8に示す。図-8と図-7を比較することにより実際に生じているき裂とそれを定量的に評価する損傷テンソルの変化を観察することができる。図-7、図-8ともに $\|\epsilon\|$ が2%を越えると損傷が急激に増加することが観察される。さらに、図-7よりき裂面が x_2 方向に多く発生していることがわかり、それに対応して図-8より、き裂面の単位法線ベクトルにより定義した損傷テンソルの11成分が卓越していることがわかる。したがって、解析対象モデルの微視的なき裂が引張りに対してより多く発生し、損傷は異方的に生じるといえるであろう。

また、図-8より、ひずみの増加に伴う損傷テンソル各成分の変化の様子が見えるが、非対角成分は常にほぼ0であり損傷テンソルの主軸がひずみの主軸とほぼ一致していることがわかる。また、除荷時にはほとんど損傷の増加は見られない。Kachanov¹⁾以来、損傷パラメータは微視欠陥を代表する物理的・力学的に意味をもつ量と考えられてきたが、これを具体的に構成則に導入する段階においては理論式の係数をカーブフィッティング的に求める際の変量パ

ラメータとして位置づけられているに過ぎない。したがって、損傷パラメータの値が実際に材料内部の損傷の様子を具体的に表現しているという保証はない。これに対して、図-7、8のように、粒状要素法による載荷シミュレーション試験を用いれば、粒子間の結合が解消された接触点（き裂）により定義された損傷パラメータにより、材料内部の損傷の変化の様子を具体的に把握することが可能となる。

図-9に、載荷シミュレーション試験により得られた応力ひずみ曲線を示す。図中の σ_{11} 、 σ_{22} は、応力テンソルの11成分、22成分を表すが、主軸の回転が少ないものとし、本文ではこれらを主応力とみなすこととする。図-9と図-8を比較すれば、損傷テンソルの変化と応力ひずみ曲線の変化との相関関係がわかる。 $\|\epsilon\|$ が約2%で応力ひずみ曲線は急激に傾き始めるが、損傷テンソルの各成分も同様に急激に増加している。 σ_{11} が σ_{22} に比べ傾きが激しいが、損傷テンソルの11成分が22成分に比べ大きいことから納得できる結果である。本解析においては、1方向に引張りひずみを与え、2方向に圧縮ひずみを与えているが、損傷の発生は引張りモードにより生ずるものが大半であるので、粒子間の結合が解消された接触点情報より定められる損傷テンソルの11成分は22成分より卓越している。したがって、巨視的にも1方向により大きな非弾性変形が生じるものと考えられる。

以上より、本研究で開発した粒状要素モデルの周期境界制御法は、地盤材料自身の変形挙動の解析を可能にするとともに、境界条件に依存しない微視的な変形機構の解明や材料内部の損傷の観察を行う上で有効な解析手法であるといえるであろう。

4. 損傷モデルの定式化とその検証

ここでは、前章の載荷シミュレーション試験結果に基づき粘着力を有する地盤材料の損傷モデルを定式化し、その検証を行う。粘着力を有する地盤材料の非弾性変形のメカニズムは、粒子間接触点の結合の解消とその後の粒子間の摩擦を伴うすべりに支配されると考えられる。そこで、本文で用いる損傷モデルは損傷パラメータと塑性ひずみを組み合わせたモデルとし、接触点の結合の解消を損傷パラメータで表し、粒子間のすべりを塑性ひずみで表すこととする。

4.1 熱力学に基づく損傷モデル¹²⁾

(1) 一般理論

Kachanov¹⁾により初めて提案された損傷パラメータは、微視き裂や微視的空隙の発生・発展によって内力を伝達する面積が減少し、弾性係数が低下することを表す内部パラメータである。損傷パラメータ

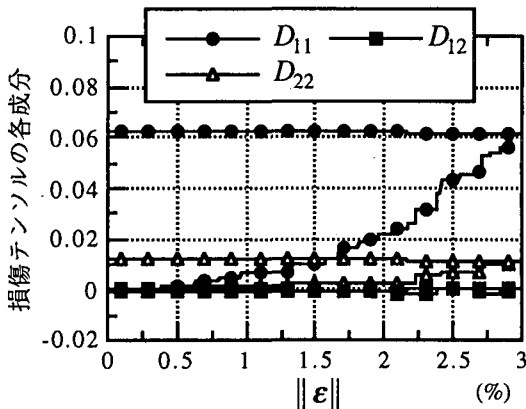


図-8 損傷テンソルの変化

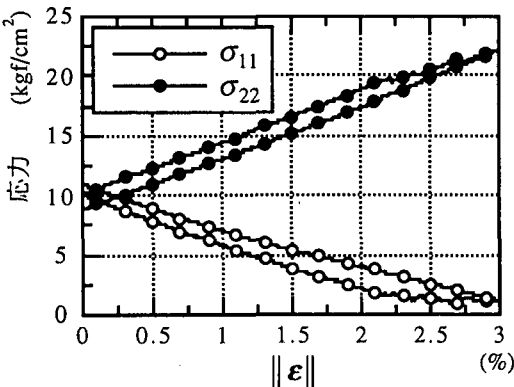


図-9 応力ひずみ曲線

のテンソル特性に関しては、表すべき物理量に関連してスカラー^{3), 4), 5)}, 2 階のテンソル^{7), 8)}, 4 階のテンソル¹³⁾などが用いられる。ここでは、なるべく簡単なモデルとするために、式(3)で定義される損傷テンソル D_{ij} の大きさ $\sqrt{D_{ij}D_{ij}}$ を損傷パラメータ d として用いることとした。損傷パラメータ d は、初期状態で結合していた接触点数に対する載荷途中に結合が解消された接触点数の比を表しており、損傷を考慮する上で第1に重要な量であるといえる。 ΔS を損傷を受けた材料内部の任意の面とすれば、内力を受ける真の面積（有効断面）は $(1-d)\Delta S$ となる。したがって、 $0 \leq d \leq 1$ であり、 $d=0$ は損傷を受けていない初期状態を表し、 $d=1$ は完全に損傷した状態を表す。また、有効断面 $(1-d)\Delta S$ に働く応力を実質応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ と呼び、応力テンソル σ_{ij} と損傷パラメータ d を用いて次式のように定義する。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1-d) \quad (8)$$

損傷パラメータ d がスカラー量であるので、損傷は等方的に起こると仮定することになる。以下、スカラー損傷パラメータと塑性ひずみを組み合わせた損傷モデルの一般理論を示す。

まず、自由エネルギー関数 W を弾性ひずみ ϵ_{ij}^e 、損傷パラメータ d 、硬化パラメータ β の関数として次式のように書く。

$$W = W(\epsilon_{ij}^e, d, \beta)$$

弾性ひずみに関して自由エネルギー関数 W と熱力学的に対をなす Gibbs の自由エネルギー関数 G を Legendre 変換を用いて次式のように定義する。

$$G = G(\sigma_{ij}, d, \beta) = -W + \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^e \quad (9)$$

弾性的な変数と非弾性的な変数に分離可能ならば、式(9)は次式のように書くことができる。

$$G = G_e(\sigma_{ij}, d) + G_p(\beta)$$

したがって、状態方程式は以下ようになる。

$$\epsilon_{ij}^e = \partial G_e / \partial \sigma_{ij}, \quad Y = -\partial G_e / \partial d, \quad B = -\partial G_p / \partial \beta \quad (10)$$

ここで、 Y および B は、運動学的変数である損傷パラメータ d および硬化パラメータ β に対する一般化力である、特に、 Y は一般にエネルギー解放率と呼ばれる。

また、散逸ポテンシャル φ を降伏関数 f と損傷関数 φ_{dam} を用いて、

$$\varphi(\sigma_{ij}, B, Y, d) = f(\sigma_{ij}, \beta, d) + \varphi_{\text{dam}}(Y, d) \geq 0$$

と仮定する。載荷が進んで降伏基準

$$f(\sigma_{ij}, B, d) = 0$$

に達すると、損傷と塑性ひずみが同時に発生することとする。実際には、粒子間のすべりは粒子間の結合が解消された後に発生すると考えられるが、ここではその差はわずかであるとし、同時にすべりが発生するとした。

垂直性の条件より塑性ひずみ、硬化パラメータ、損傷パラメータの各発展式は次式のように書くことができる¹²⁾。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11)$$

$$\dot{\beta} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial B} = \lambda \frac{\partial f}{\partial B} \quad (12)$$

$$\dot{d} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\text{dam}}}{\partial Y} \quad (13)$$

さらに、塑性乗数 λ は、適応の条件

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial f}{\partial d} \dot{d} = 0$$

と式(10)₃および式(11)~(13)より、次式のように求められる。

$$\lambda = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} / \left(\left(\frac{\partial f}{\partial B} \right)^2 \frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial \varphi_{\text{dam}}}{\partial Y} \right) \quad (14)$$

以上より、Gibbs の自由エネルギー関数 G 、降伏関数 f 、損傷関数 φ_{dam} を仮定すれば、構成則が確定する。

(2) 地盤材料の損傷モデル

ここでは、上述した損傷モデルの一般理論に具体的な関数を与えて、図-6で示した地盤材料解析モデルに適用する。

まず、Gibbs の自由エネルギー関数 G の弾性的な変数に関する部分 G_e を E 、 ν をヤング率とポアソン比として次式のように仮定する。

$$G_e(\sigma_{ij}, d) = \frac{1}{2(1-d)} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{kl} \sigma_{kl} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk})^2 \right] \quad (15)$$

これは、弾性ひずみ ϵ_{ij}^e と式(8)で定義した実質応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ の関係が等方線形弾性体の構成則と一致するように定めた。つまり、式(10)₁を用いれば、

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (16)$$

となる。また、

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{1-d} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

と書き直せば、損傷を受けることにより材料の弾性係数が減少しているとみなすこともできる。同様に式(10)₂より、エネルギー解放率は、

$$Y = -\frac{1}{2(1-d)^2} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{kl} \sigma_{kl} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk})^2 \right] \quad (17)$$

となる。

また、Gibbs の自由エネルギー関数 G の非弾性的な変数に関する部分 G_p を C_1 、 C_2 を係数として次式のように表す。

$$G_p(\beta) = -\left(\frac{1}{2} C_1 \beta^2 + \frac{1}{3} C_2 \beta^3 \right) \quad (18)$$

式(10)₃を用いれば、

$$B = -\frac{\partial W_p}{\partial \beta} = C_1\beta + C_2\beta^2 \quad (19)$$

となる。

次に、損傷を考慮したDrucker-Prager型の降伏関数を次式のように仮定する。

$$f(\sigma_{ij}, B, d) = (\sigma_Y + C_3\sigma_{kk} + B)/(1-d) + C_4 \quad (20)$$

ここに、

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d}$$

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad : \text{偏差応力}$$

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{kk} \quad : \text{2次元の平均応力}$$

$$C_3, C_4 \quad : \text{係数}$$

である。初期の降伏基準は損傷 d がまだ0であるので一般のDrucker-Prager型の降伏基準と一致する。

最後に、損傷の発展を支配する関数である損傷関数 φ_{dam} を定める。 φ_{dam} の関数形の合理的な定め方が見当たらないので、ここでは C_5 、 C_6 を係数として以下のように仮定する。

$$\varphi_{\text{dam}}(Y, d) = \frac{C_5}{C_6 + 1} \left(\frac{Y}{C_5} \right)^{C_6 + 1} \left(\frac{1}{1-d} \right) \quad (21)$$

以上より、塑性乗数 $\dot{\lambda}$ は、式(14)とここで定めた各関数により

$$\dot{\lambda} = -\frac{(1-d)}{\left(C_1 + 2C_2\beta - C_4(Y/C_5)^{C_6} \right)} \left(\frac{\sigma_{ij}^d}{\sigma_Y} + C_3\delta_{ij} \right) \dot{\sigma}_{ij} \quad (22)$$

となる。式(20)と発展式(11)、(12)より塑性ひずみ速度と硬化パラメータ速度は、

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \left(\frac{\sigma_{ij}^d}{\sigma_Y} + C_3\delta_{ij} \right) \quad (23)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial B} = \frac{\dot{\lambda}}{1-d} = \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{1 + 2C_4^2}} \quad (24)$$

となる。また、損傷速度 $\dot{d}$ は式(21)および式(13)より次式のように書くことができる。

$$\dot{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_{\text{dam}}}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \left(\frac{Y}{C_5} \right)^{C_6} \quad (25)$$

ここで定式化した損傷モデルは、ヤング率 E とポアソン比 ν の2つの弾性係数、 $C_1 \sim C_6$ の6つの係数を定めることにより確定するが、これらの定数をどのように合理的に定めるかが問題となる。

4.2 係数の同定と結果の比較

ここでは、前節で定式化した損傷モデルの各係数の同定法について述べるが、3.で示した図-6の地盤材料解析モデルの2軸せん断断荷シミュレーション試験を対象とする。

まず、ヤング率とポアソン比は、応力ひずみ曲線の初期状態の傾きから求めることができる。

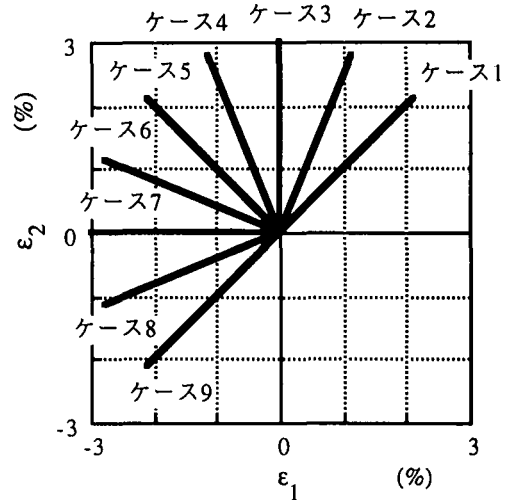


図-10 主ひずみ空間における載荷経路

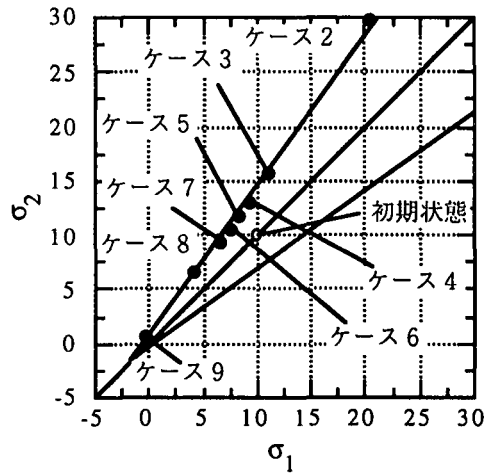


図-11 主応力空間上の初期降伏曲線

次に、降伏関数 f の係数 C_3 、 C_4 は、対象としている地盤材料解析モデルに対して様々な方向に載荷・除荷試験を行うことで求めることができる。ここでは、図-10に示す9通りの載荷経路で載荷シミュレーション試験を行った。前章で示した2軸せん断断荷シミュレーション試験は、図-10におけるケース5の載荷経路に相当する。載荷シミュレーション試験により得られた各載荷経路の初期損傷が発生した時の応力を主応力空間上にプロットすると図-11のようになる。同図より、これらの点が主応力空間上にほぼ直線に並ぶことから、Drucker-Prager型の降伏関数がほぼ妥当であることが示され、さらに、この直線の傾きから係数 C_3 、 C_4 を定めることができる。

損傷関数 φ_{dam} に関する係数 C_5 、 C_6 に関しては、載荷シミュレーション試験より得られる損傷パラメータとひずみの関係および除荷した際の弾性変形の2つの情報を基に定められる。従来の実験などでは、材料内部の構造欠陥の様子を定量的に評価することができないため、多くの損傷モデルでは応力ひずみ曲線をカーブフィッティングして係数を決め、

損傷パラメータの変化はそれに従属して得られるものでしかない。しかし、载荷シミュレーション試験を行うことにより、内部の構造欠陥が図-7のように視覚的にとらえられるだけでなく、具体的に損傷パラメータを定義すれば図-8のようにその変化の様子を示すこともできる。また、同一のモデルに関して载荷途中の様々な点から除荷試験を行うこともでき、構造欠陥の発生・発展に伴う弾性係数の変化を観察することができる。したがって、損傷関数に関する係数を直接的に決定することが可能となる。

3. で述べた载荷シミュレーション試験とここで示した損傷モデルの各々の損傷パラメータの変化の様子を図-12に示す。これより、損傷の発展がほぼ载荷シミュレーション試験と合致していることがわかる。また、初期損傷の発生点もほぼ一致し、降伏基準が正確に表現されていることも伺える。

最後に、Gibbsの自由エネルギー関数 G の非弾性部分に関する係数 C_1 、 C_2 は、塑性ひずみの発展に関する係数であるが、ここでは上述のような方法で他の6つの係数を決定した後、図-9の応力ひずみ曲線に最も合致するような値を見出すことにより定めた。

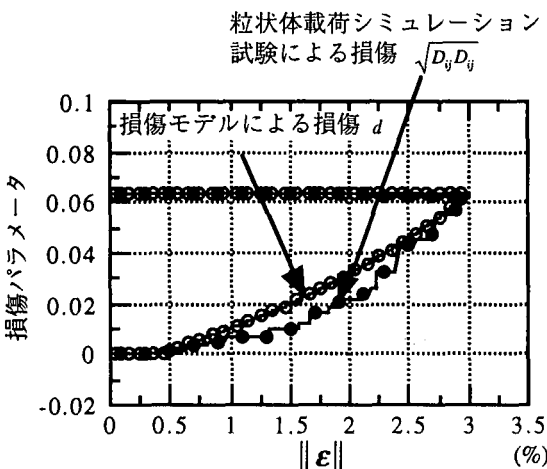


図-12 損傷パラメータの比較 (ケース5)

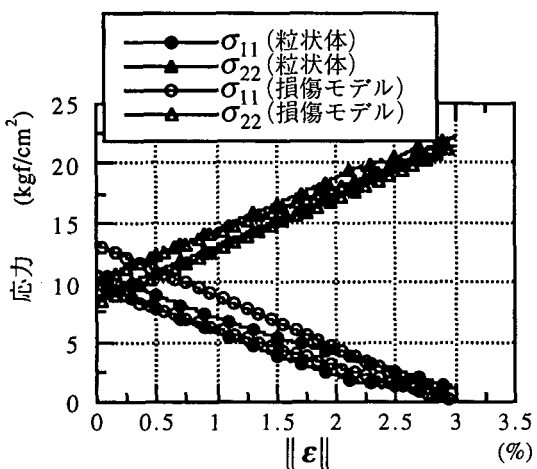


図-13 応力ひずみ曲線の比較 (ケース5)

表-2 損傷モデルの各係数値

ヤング率	ポアソン比	C_1	C_2
795	0.2	-2400	85000
C_3	C_4	C_5	C_6
-0.223	-0.119	-0.001	0.4273

ここで求めた各係数の値を表-2に示し、応力ひずみ曲線を図-13に示す。図-13より応力ひずみ曲線は、かなり正確に载荷シミュレーション試験結果を表していることがわかる。

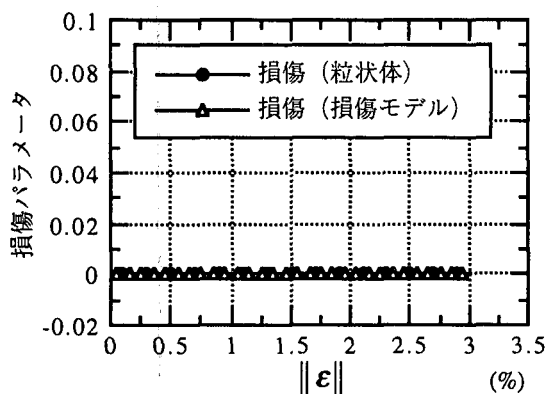
以上のように、スカラー損傷パラメータを用いた簡単な損傷モデルでもケース5の载荷経路に関して係数が適切に定められ、载荷シミュレーション試験が精度良く表現されている。次節では、このように定めた係数を用いて、図-10に示す他の载荷経路に対して载荷シミュレーション試験結果と損傷モデルによる計算結果を比較し、定式化した損傷モデルおよびその定数に関する検証を行う。

4.3 損傷モデルの検証

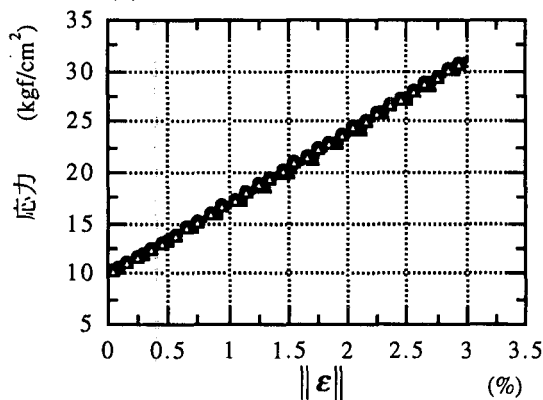
ここでは、ケース1、ケース3、ケース7、ケース9について損傷パラメータひずみ曲線および応力ひずみ曲線を比較する(図-14～図-17)。なお、応力ひずみ曲線の凡例は、図-13の凡例と全て同じである。

図-14には、ケース1の载荷経路についての結果を示したが、等方2軸圧縮経路であるので損傷、塑性ひずみ共に発生せず、 x_1 、 x_2 方向とも同じように変形する。損傷モデルにおいても損傷、塑性ひずみは発生しておらず応力ひずみ曲線は線形になる。損傷モデルは、弾性係数のみに依存することとなるが、前節で定めた弾性係数が、地盤材料解析モデルの弾性係数を正確に表していることがわかる。

図-15～図-17の(a)は、各ケースの損傷パラメータの変化の様子を比較しているが、全てのケースにおいて、最初に損傷の発生する点は载荷シミュレーション試験と損傷モデルとがほぼ一致している。したがって、ここで定めた損傷モデルの初期降伏基準は、地盤材料解析モデルの初期降伏基準を精度良く表しているといえる。また、全てのケースにおいて $||ε||$ が1.5%付近までは損傷の発展の様子をほぼ正確に表している。しかし、その後の損傷の発展に関しては、かなり異なる結果となっている。ここで、ケース2～ケース9の载荷シミュレーション試験と損傷モデルの損傷パラメータの最大値を比較し、図-18に示す。载荷シミュレーション試験の結果では、ケース6が損傷パラメータが最も大きくなる载荷経路であり、ケース5よりもケース7の方が大きくなることがわかる。微視的に見れば、粒子間の結合の

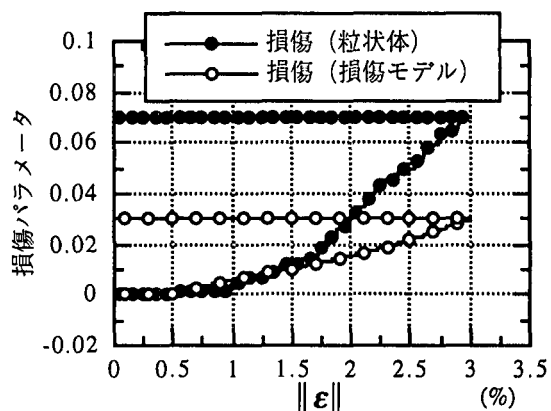


(a) 損傷パラメータの比較

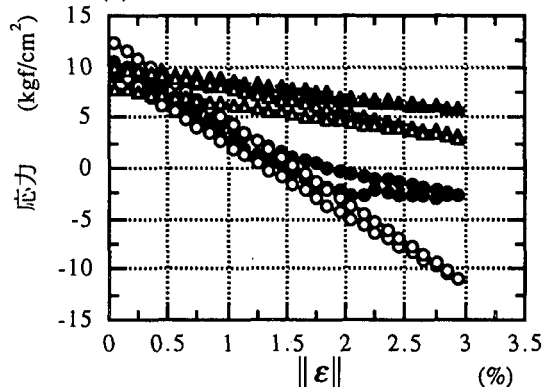


(b) 応力ひずみ曲線の比較

図-14 粒子シミュレーション試験と損傷モデルの比較 (ケース1)

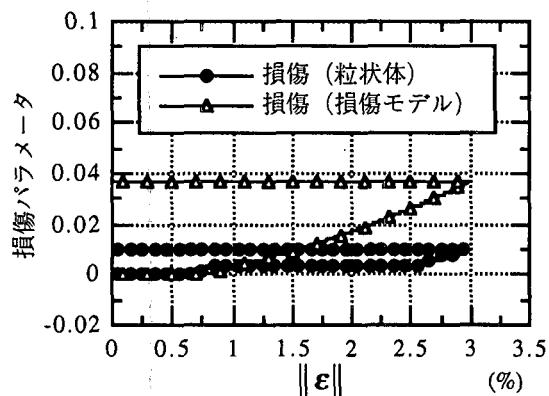


(a) 損傷パラメータの比較

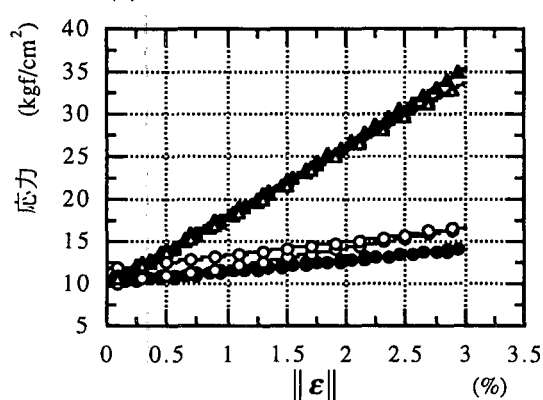


(b) 応力ひずみ曲線の比較

図-16 粒子シミュレーション試験と損傷モデルの比較 (ケース7)

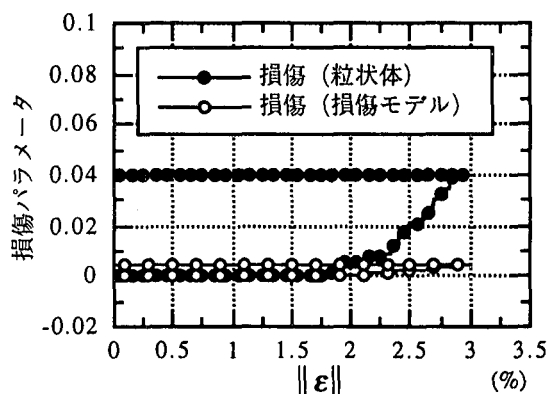


(a) 損傷パラメータの比較

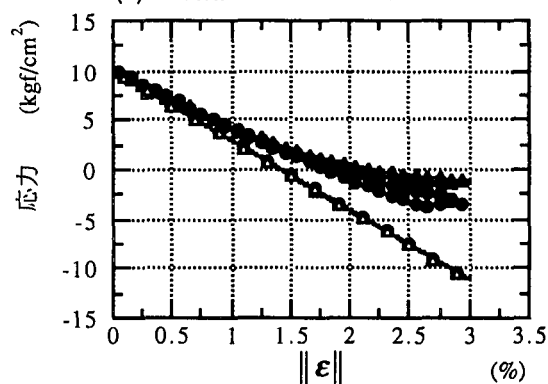


(b) 応力ひずみ曲線の比較

図-15 粒子シミュレーション試験と損傷モデルの比較 (ケース3)



(a) 損傷パラメータの比較



(b) 応力ひずみ曲線の比較

図-17 粒子シミュレーション試験と損傷モデルの比較 (ケース9)

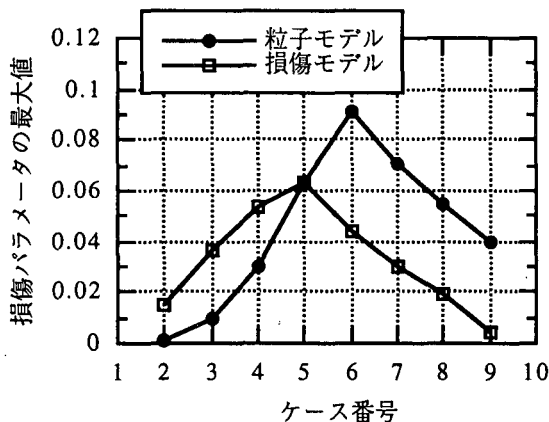


図-18 各ケースの損傷パラメータ最大値の比較

解消が圧縮では生ぜず引張りに対して発生するため、ケース6、7の巨視的に引張りモードが卓越する載荷経路において最大の損傷が発生する。ケース9においては、両方向に引張りであり損傷の増加は急激であるものの、損傷が最初に発生する点がケース6、7よりも遅いため最大値は小さくなる。損傷モデルの損傷パラメータは、式(21)で示した損傷関数に依存するが、ここで定めた関数形およびケース5を基準として定めた定数では、上述したような全ての載荷経路に関して適切に材料内部の損傷を表すことはできない。特に、最大の損傷を生ずる載荷経路がケース5であり、ケース6よりもケース4の方が大きな損傷が発生するのは、非現実的であると思われる。損傷関数に関しても、載荷シミュレーション試験から得られる微視的な情報をより反映して定める方法を工夫する必要があるであろう。

図-15(b)は、ケース3の応力ひずみ曲線の比較を示している。損傷モデルを初期状態まで除荷した場合に、 σ_{11} が初期状態より大きくなることからわかる。これは、塑性ひずみの大きさに対して損傷パラメータの大きさが非常に大きいことを意味し、損傷パラメータが、載荷シミュレーション試験よりも大きく評価されているためである。また、 σ_{22} に関してはかなり適合しているが、 σ_{11} は多少のズレが生じている。このことは、損傷パラメータをスカラーとして定義している影響であり、材料内部の損傷の大きさだけでなくその方向が巨視的な変形機構に影響を及ぼすため、スカラー量の損傷パラメータによる損傷モデルではその挙動を完全に表現することには無理があるであろう。しかし、本文においては、実際の試験では求めることのできない損傷を求め、少なくとも指定した載荷経路においては理論に適合した応力ひずみ曲線を求めることができ、また、他の載荷経路に対してもある程度応力ひずみ曲線を予測し得ることを示した。このことは損傷テンソルを用いた適切な定式化により、より精度の高い構成則を誘導することが可能であることを示唆している。

図-16のケース7、図-17のケース9の応力ひずみ曲線においてもケース3の場合と類似した結果が示されているが、特に応力が負の値(引張り)となった場合にそのズレは顕著になる。一般に地盤材料は圧縮下において用いられる材料であり、応力が引張りになる場合には工学的な意味をもたない。したがって、応力が正值(圧縮)である部分に関しては本損傷モデルが有効であり、載荷シミュレーション試験結果との適合性も高い。しかし、引張り応力が生じる部分については非現実的な適用であることに注意する必要がある。

以上より、本研究で定式化した損傷モデルは、損傷関数の定め方や損傷パラメータの選定などに改良の余地があるが、粘着力を有する地盤材料に対して有用な基本的モデルとなり得ることを示すことができた。

5. おわりに

本論文において、まず、粘着力を有する地盤材料の微視的変形機構の解明のために従来の粒状要素法に粘着力を導入し、境界条件に依存しない地盤材料固有の力学特性を調べるための周期境界制御粒状要素法を開発した。次に、応用例により本解析手法が一般的な地盤材料の微視的変形機構の解明に有用であることを示すとともに、地盤材料内部の粒子間の結合が解消される過程を損傷パラメータにより定量的に評価可能であることを示した。さらに、損傷パラメータを内部パラメータにもつ数理的構成則として一つの損傷モデルの定式化を行い、載荷シミュレーション試験結果に照らしてその適用性についての検証を行った。ここで定式化した損傷モデルは、スカラー損傷パラメータと塑性ひずみの2つの内部変数を用いた最も単純なモデルであるが、本モデルが材料内部の損傷メカニズムを一定のレベルまで反映するものとなっている。したがって、損傷パラメータにテンソル量を導入することなどにより、粘着力を有する地盤材料の一つの理想的な構成モデルの誘導が可能になるのではないかと考えられる。

参考文献

- 1) Kachanov, L. M. : The theory of creep, English translation (by A. J. Kennedy). Nat. Lending Lib. Boston, 1958.
- 2) Murakami, S. and Sanomura, Y. : Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress, Plasticity Today : Modeling, Methods and Applications, Elsevier, London, pp.535-551, 1985.
- 3) Lemaitre, J. : A continuous damage mechanics model for ductile fracture, J. Eng. Materials and Technology, 107, pp.83-89, 1985.

- 4) Chaboche, J. L. : Continuum damage mechanics-I : General Concepts, Trans. ASME J. Applied Mechanics, 55, pp.59-64, 1988.
- 5) Chaboche, J. L. : Continuum damage mechanics-II : Damage growth, crack initiation, and crack growth, Trans. ASME J. Applied Mechanics, 55, pp.65-72, 1988.
- 6) Krajcinovic, D. : Damage mechanics, Mechanics of Materials, 8, 97-117, 1989.
- 7) 京谷孝史 : 不連続性岩盤の力学特性評価における損傷力学の適用に関する基礎的研究, 名古屋大学博士学位論文, 1989.
- 8) Dragon, A., Cormery, F., Desoyer T. and Halm, D. : Localized failure analysis using damage models, Localisation and Bifurcation Theory for Soils Rocks, (eds, Chambon, Derues, Vardoulakis), Beikema, Rotterdam, pp.127-140, 1994.
- 9) Cundall, P. A. and Stack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, Vol.1, No.2, pp.293-298, 1973.
- 10) 岸野佑次 : 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, Vol. 406/III-11, pp.97-106, 1989.
- 11) 武建勲, 岸野佑次, 京谷孝史 : 改良粒状要素法による粒状体の断塑性挙動の研究, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp.403-412, 1997.
- 12) Maugin, G. A. : The Thermomechanics of Plasticity and Fracture, Cambridge University Press, 1992.
- 13) Cauvin, A. and Testa, R. B. : Elastoplastic material with isotropic damage, Int. J. Solids and Structure, Vol.36, pp.727-746, 1999.

(1999 年 4 月 23 日受付)