

Cam-Clay モデルを用いた2層弾塑性体の分岐解析

Bifurcation Analysis in a Two-layer Cam-clay Model

志比利秀*・矢富盟祥**

Toshihide SHIBI and Chikayoshi YATOMI

*正会員 博工 島根大学助手 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 松江市西川津町 1060)

**正会員 Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920-8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

This paper examines the diffuse bifurcation mode of a two-layer specimen consisting of a non-coaxial Cam-clay model. The specimen undergoes a deformation by a prescribed velocity with no friction on the ends and a constant lateral hydrostatic pressure on the sides. We obtain several bifurcation loads and examine the effect of several material parameters on the bifurcation load. We finally investigate the sites where the slip planes first occur from the maximum shear strain point of view.

Key Words : bifurcation, two-layer, non-coaxial, Cam-clay model

1. はじめに

平面ひずみ状態を仮定した拡散分岐モードによる分岐解析は、大きなスケールでは地層の褶曲、活断層への遷移過程などの定性的かつ定量的な把握が期待できる。基本的な褶曲の形態にはたわみ (flexure) と押しつぶし (flattening, または thickening) の2つが考えられる。前者は、座屈や曲げにより各層がもとの厚さと層に沿う長さを保ったまま弓形、または波型にたわむ場合を表しており、形態的には平行褶曲となるものである。一方、後者は1方向からの

圧縮に対して、他の2方向もしくは1方向へ伸張することによって変形する場合である。このように、拡散分岐モードによる分岐解析は、座屈や押しつぶしによる褶曲のメカニズムや地盤の不均一変形による破壊過程を考察するための重要な研究である。

現在までに論文されている弾塑性体の分岐解析では、対象領域が一つの物質の場合のみである。しかし、実際の地盤は異なる性質の物質が幾重にも積み重なった多層体で構成されており、さらなる把握のためには対象領域を多層と捉え、物質間の相互干渉の影響を考慮した解析が必要となる。なお、弾性体の場合は Biot¹⁾ がいくつかの解析を行っている。

そこで、本論文では基礎的研究として、構成式に有限変形非共軸 Cam-clay 弾塑性モデル²⁾を用いて、厚さの等しい2層体を平面ひずみ状態のもとで圧縮した場合の均一な変形から非均一な変形への分岐荷重 (詳細な定義は後述する) の解析解を誘導し、分岐モードと物質パラメータの関係や最大せん断ひずみの分布図より、初期のすべり面 (大きなスケールでは断層面) の発生位置について考察を行った。

2. 試験条件

供試体は図-1 に示すように正規圧密された Cam-Clay モデルの物質特性の異なる2つの層 a, b からなるものとし、供試体内の各点で非排水条件を満足する平面ひずみ変形を考える。供試体の側面においては水圧一定とし、上下端面においては、変位制御で圧縮し、摩擦はないものとする。また、両層の界面においては、完全固着状態を考えている。本論文では、両層が同一な均一変形状態から、非均一変形状

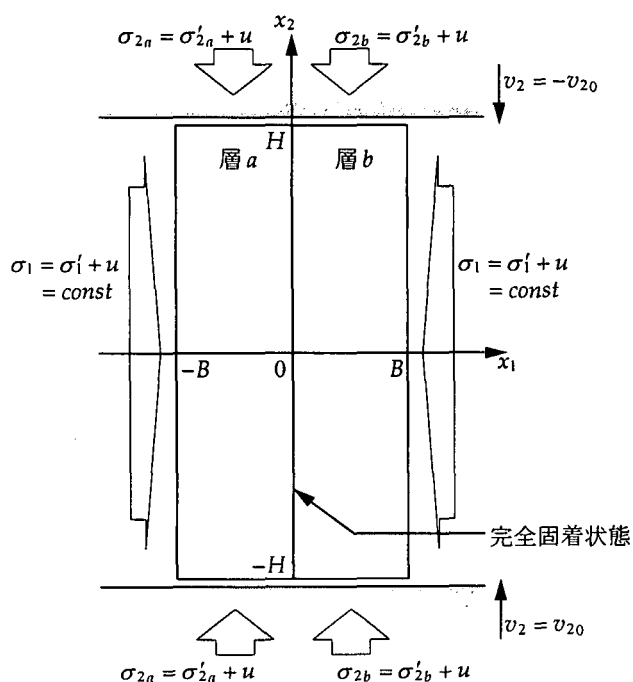


図-1 分岐直前の供試体概形図

態への分岐現象を考えており、分岐の生じる瞬間 $t=t$ で、図-1 のように各層がそれぞれ高さ $2H$ 、幅 B になったものとする。Cauchy 応力 T_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 等は引張を正、圧縮を負とするが、ギリシャ文字の全応力 σ_i ($i=1, 2, 3$)、間隙水圧 u 、体積ひずみ v は土質力学の慣例に従い圧縮を正とする。

まず、Cauchy 応力 T 、有効 Cauchy 応力 T' と間隙水圧 u の間に有効応力原理が次式で与えられる。

$$T' = T + uI \quad (1)$$

ここで、 I は単位テンソルである。また、前述したように、均一変形状態から不均一変形状態への分岐を対象とするため、分岐の生じる瞬間、時刻 $t=t$ までは両層とも同一な均一変形をしているが、有効応力および間隙水圧は各層で異なる均一な値となる。ゆえに、時刻 $t=t$ での全応力は、

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sigma'_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma'_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma'_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_i & 0 & 0 \\ 0 & -u_i & 0 \\ 0 & 0 & -u_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

となる。以下、添字 i ($i=a, b$) は、それぞれは層 a 、層 b の物理量および物質パラメータを表すものとする。ただし、各層を区別する添字 i ($i=a, b$) は、記号の煩雑化を避けるため、自明の箇所は添字を省略する。

また、 $\sigma'_{i3} = (\sigma'_{i2} + \sigma'_{i1})/2$ と仮定すると、平均有効応力 p'_i 、一般化された偏差応力 q_i は次のように定義される。

$$p'_i = -\frac{1}{3} \text{tr} T'_i = \frac{\sigma'_{i1} + \sigma'_{i2}}{2}, \quad q_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_i \cdot S_i} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma'_{i2} - \sigma'_{i1}| \quad (3)$$

ここに、 S は有効 Cauchy 応力 T' の偏差応力である。

なお、本論文では、分岐時における応力差 q と平均有効応力 p' の比 $q/p' (= \eta)$ をもって「分岐荷重」と呼ぶ。粘土や砂質土においては、平均有効応力が大きい程、せん断強度が大きいので、本論文のような均一多軸状態における分岐荷重は軸応力 σ_2 や応力差 $\bar{q} = |\sigma'_2 - \sigma'_1|$ ではなく、 q/p' が物理的には最も合理的な分岐荷重の定義であると考えられる。

3. 有限変形 Cam-clay モデル

等方圧密を考える。間隙比を e としてその微小増分を $\dot{e}$ と表わすと、 $\dot{e}$ は有効主応力増分との間に、 $\dot{e} = -\lambda \dot{p}'/p'$ という関係が成り立つ。ゆえに、等方圧密状態における体積ひずみ速度 $\dot{v}$ は、

$$\dot{v} = \frac{\lambda}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (4)$$

となる。ここで、 λ は自然対数表示による圧縮指数である。同様に等方膨潤を考えると次式を得る。

$$\dot{v}^e = \frac{\kappa}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (5)$$

ここで、 κ は自然対数表示による膨潤指数である。このとき、体積弾性係数 $\tilde{K}$ およびせん断弾性係数 $\tilde{G}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\tilde{K} = \tilde{K}_0 p', \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0 p',$$

ここで、 $\tilde{K}_0 = \frac{1+e}{\kappa}$ 、 $\tilde{G}_0 = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tilde{K}_0$ とおいた。また、

ν はポアソン比である。一方ダイレイタンシーによる体積ひずみ速度は、

$$\dot{v}^p = D \left(\frac{q}{p'} \right) \quad (6)$$

となる。ここで、 $(\dots)$ は $(\dots)$ の物質時間微分を表わす。また、 D はダイレイタンシー係数であり、限界状態パラメータ $M^{3)}$ との間に次の関係、

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1+e)}$$

が成り立つ⁴⁾。結局、塑性体積ひずみ速度は、式(4)、(5)、(6)より次式となる。

$$\dot{v}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} + D \left(\frac{q}{p'} \right)$$

微小変形における Cam-clay モデル³⁾ を真似て降伏汎関数を次のように与える。

$$f = \int_0^t \left\{ \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} + D \left(\frac{q}{p'} \right) \right\} dt - v^p \quad (7)$$

ここで、 $t=0$ のとき $v^p=0$ とする。一般に間隙比 e は負荷にともない変化するが、非排水状態を考えれば e は時間 t に関して一定となり、式(7)の第1項は簡単に積分できる。このとき、有限変形共軸 Cam-clay モデル²⁾ の構成式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T'_{ij} = & \left\{ \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{h}} \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{ij} - \tilde{K} \tilde{\beta} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{kl} - \tilde{K} \tilde{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\beta} = \beta/\sqrt{3}$ 、 $\tilde{\tau} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}/2}$ である。また、 $\dot{T}'_{ij}$

は有効 Cauchy 応力の Jaumann rate で,
 $\dot{T}' = \dot{T}' - WT' + T'W$ で定義される。また, D_{ij} は変形
 速度, W_{ij} はスピン, δ_{ij} は Kronecker の記号である。
 β は限界パラメータ M と応力比 q/p' を用いて,

$$\beta = M - q/p'$$

で与えられる。 $\tilde{h}$ は,

$$\tilde{h} = \tilde{K}\tilde{\beta}^2 + h$$

であり, h は硬化係数でダイレイタンシー係数 D を
 用いて,

$$h = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3}D} p' \quad (9)$$

で与えられる。

有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式は, h_1 を
 第2硬化係数とした時, 式(8)において物質パラメー
 タを次のように置き換えることによって与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\rightarrow \frac{h_1 \tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \\ \tilde{K} &\rightarrow \frac{(h_1 - h) \tilde{K}}{h_1 - h - \tilde{\beta}^2 \tilde{K}} \\ h &\rightarrow \frac{h_1 h}{h_1 - h} \\ \tilde{\beta} &\rightarrow \frac{h_1 \tilde{\beta}}{h_1 - h} \end{aligned}$$

ただし, 第2硬化係数 h_1 は式(9)の h と同様の形で次
 式のように仮定する。

$$h_1 = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3}A} p' \quad (>0)$$

ここで, A を非共軸パラメータと呼び, $A=0$ で共
 軸モデル, $A>0$ で非共軸モデルを表す。

現在まで, 非共軸性を詳細に検討した定量的実験
 は, ほとんど見られない。しかし, 中空円柱ねじり
 試験によるその存在, また, 存在の必要性を示した
 研究は, 最近精力的に行なわれている⁵⁾。なお, 本
 論文でも上記 h_1 は, 参考文献²⁾ の表現をそのまま
 用いるが, 後述の5, 6節で示す解析解には h_1 の具
 体形は不要である。

また, 各点非排水の条件は,

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (10)$$

となる。式(10)を考慮すると式(8)は次式となる。

$$\dot{T}'_{ij} = 2\tilde{G}D_{ij} - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{h}} \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{kl} D_{kl} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{ij} - \tilde{K}\tilde{\beta}\delta_{ij} \right) \quad (11)$$

本論文では, 平面ひずみ変形を仮定しているので
 式(11), (10)は次のように変形できる。

$$\dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} = 2\mu^* (D_{11} - D_{22}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} \\ D_{11} + D_{22} &= 0 \\ D_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, μ^* , μ はそれぞれ 45 度せん断におけるせ
 ん断係数, 単純せん断係数で, 次式で与えられる。

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{h_1 \tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \quad (14)$$

なお, μ^* は非共軸パラメータ A に無関係であり,
 μ は A の単調減少関数となっている。

結局, 均一変形から分岐瞬間時の有限変形 Cam-
 clay モデルの構成関係は式(12), (14)で与えられる。

4. 2層供試体における分岐荷重

初期に等方圧密された2層供試体を軸方向に一定
 速度で圧縮すると各層に働く軸圧に差が生じ, 分岐
 の生じる瞬間において各層の応力比 η は異なってい
 る。

各層において式(3)の物質時間微分をとり,
 $T'_{11} > T'_{22}$ を仮定して式(11), (13)を用いると次式が得
 られる。

$$\dot{p}' = -\frac{\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G} + \tilde{h}} (D_{11} - D_{22}), \quad \dot{q} = \sqrt{3} \frac{\tilde{G}\tilde{h}}{\tilde{G} + \tilde{h}} (D_{11} - D_{22})$$

上式を用いると応力比 η の物質時間微分は次式のよ
 うになる。

$$\dot{\eta} = -\frac{\sqrt{3}\tilde{h} + \eta\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G} + \tilde{h}} \tilde{G}_0 (D_{11} - D_{22})$$

$t=0$ において $q=0$, $p'=p'_0$ を考慮にいれ, $t=0$ から,
 $t=t$ まで上式を積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^t (D_{11} - D_{22}) dt = \\ \frac{\sqrt{3}}{(1 + D\tilde{M}\tilde{K}_0)\tilde{G}_0} \left\{ D\tilde{G}_0 \ln \frac{M - \eta}{M} - \frac{\eta}{3} + \frac{D\tilde{K}_0}{6} (\eta^2 - 2M\eta) \right\} \end{aligned}$$

となる。分岐の瞬間まで両層は同じ均一変形を続けているので、その間、前式左辺は両層で同一な値となる。したがって前式右辺を $g(\eta)$ とおくと、各層の応力比 η は次の条件を満足する必要がある。

$$[g(\eta)] = 0 \quad (15)$$

ここで、以後 [...] は層 a, b における ... の差を表わす。なお、式(15)の条件式は、非共軸パラメータ A に無関係であることに注意する。

層幅の等しい二層供試体全体としての分岐荷重を本論文では次式で定義する(Appendix)。

$$\frac{q}{p'} = \frac{q_a + q_b}{p'_a + p'_b} \quad (16)$$

ここで、各層の p' 、 q は各層の η より次のようにして求める。常に負荷を加えながら非排水状態にあることを考えると式(4)、(6)より、体積ひずみ速度は零であるから、

$$\dot{v} = \frac{\lambda}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} + D \left(\frac{q}{p'} \right) = 0$$

であり、 $t=0$ において $q=0$ 、 $p'=p'_0$ を考慮にいれ、 $t=0$ から、 $t=t$ まで上式を積分すると

$$p' = p'_0 \exp\left(-\frac{1+e}{\lambda} D \eta\right)$$

となり $q = \eta p'$ であることより、

$$q = \eta p'_0 \exp\left(-\frac{1+e}{\lambda} D \eta\right)$$

で与えられる。

5. 支配方程式

前述したように、異なる2つの層からなる長方形供試体は、分岐の生じる直前まで、軸方向変形の増大に対して均一に変形したとする。そのとき、次の軸方向変形の増大においても、均一変形は可能な解の一つである。ゆえに、分岐は、次の軸方向変形の増大において均一変形とは異なった解、つまり、非均一な変形を示す解が存在するときに生じると考える。

なお、分岐が実際に生じるためには、その時の均一解が不安定となる必要がある。弾性体では、解の唯一性がなくなる時、その均一解は不安定となるが、弾塑性体では、その場合でも均一解が依然安定であることもある⁶⁾。すなわち、弾塑性体の場合、この安定性を吟味するためには、負荷、除荷領域を考慮

したあらゆる仮想速度場を想定した増分解が必要となる。梁構造などのように、変形が比較的単純な場合は、そのような安定性を吟味することは可能であるが、本論文のような連続体の場合、仮想速度場を特殊なものに限定せず、除荷領域を含めた一般的な仮想速度場を想定した場合の安定性の吟味は非常に難しく、著者らの知る限り、それに関する論文は皆無である。

したがって、本論文での分岐解も、その分岐解へ移行する可能性の範囲内での議論である。しかしながら、現実の物質では、注意深く均一な供試体を作成しても、何らかの初期不整(試験機、偏心荷重や両端摩擦などの不整を含む)が存在するから、均一変形は、不安定的であり、初期不整の性質にもよるが、通常、最小分岐荷重で分岐すると考えることができる⁶⁾。

5.1 増分釣合式

準静的で物体力のない場合を考えると、増分釣合式は次式のようになる。

$$\text{div } \dot{S}_i = 0 \quad (17)$$

ここで、 $\dot{S}_i$ は全公称応力速度であり、Cauchy 応力 T 、速度勾配 L 、変形速度 D を用いて次式で定義される。

$$\dot{S}_i = \dot{T} + T(\text{tr} D) - TL^T$$

ここで、上式に式(1)の有効応力原理と、各点非排水の条件、式(10)を用いると、

$$\dot{S}_i = \dot{T}' - T' L^T - \dot{u} I + u L^T$$

となる。増分釣合式は上式を、 $\text{div } L^T = \text{grad}(\text{tr} D) = 0$ 、また有効応力が分岐の瞬間まで均一であることを考慮して、式(17)に代入すると次式となる。

$$\text{div } \dot{T}' - \text{grad } \dot{u} = 0 \quad (18)$$

結局、平面ひずみ変形を考慮に入れると、指標表示を用いて、増分釣合式(18)は、次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{1,1} + \dot{T}'_{2,2} - \dot{u}_{,1} &= 0, \\ \dot{T}'_{2,1} + \dot{T}'_{2,2} - \dot{u}_{,2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

5.2 境界条件

図-1 のように境界条件は、異なる2つの層からなる長方形供試体の側面($x_1 = \pm B$)では側方水圧一定条件とし、上下端部($x_2 = \pm H$)では、摩擦なしで、かつ

一定速度 $v_{20}(>0)$ による変位制御圧縮とする。また、界面 ($x_1=0$) では完全固着状態、したがって速度が連続であり、かつ力の釣合い条件より全公称表面力速度の連続性が要求される。以上より境界条件は次式で与えられる

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_1 &= \sigma_1 L_{11}, (\dot{s}_t)_2 = \sigma_1 L_{12}, \text{ on } x_1 = \pm B, \\ (\dot{s}_t)_1 &= 0, v_2 = \mp v_{20}, \text{ on } x_2 = \pm H, \\ [(\dot{s}_t)_1] &= 0, [(\dot{s}_t)_2] = 0, [v_1] = 0, [v_2] = 0, \text{ on } x_1 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで、 $\dot{s}_t$ ($(\dot{s}_t)_i, i=1,2$) は全公称表面力速度であり、全公称応力速度 $\dot{s}_t$ 、各々の面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて次式で定義される。

$$\dot{s}_t = \dot{S}_t \mathbf{n}$$

構成式(11)を増分釣合式(18)に代入したものは、速度勾配に関して線形になっているので、供試体の変形を均一変形と非均一変形から構成されるものと考え、増分境界値問題の解は次のように、均一境界条件（各点で均一な解となる境界条件）と非均一境界条件（非均一な解が得られる境界条件）の解の和となる。

a) 均一境界条件

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} &= 0, \dot{T}_{21} = 0, \text{ on } x_1 = \pm B, \\ \dot{T}_{12} &= 0, v_2 = \mp v_{20}, \text{ on } x_2 = \pm H, \\ [\dot{T}_{11}] &= 0, [\dot{T}_{21}] = 0, [v_1] = 0, [v_2] = 0, \text{ on } x_1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

b) 非均一境界条件（境界条件）

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} &= \dot{u}_a, \dot{T}_{21} = -\bar{q}_a L_{12}, \text{ on } x_1 = -B, \\ \dot{T}_{11} &= \dot{u}_b, \dot{T}_{21} = -\bar{q}_b L_{12}, \text{ on } x_1 = +B, \\ \dot{T}_{12} &= 0, v_2 = 0, \text{ on } x_2 = \pm H, \\ [\dot{T}_{11}] &= [\dot{u}], [\dot{T}_{21}] = -[\bar{q} L_{12}], [v_1] = 0, [v_2] = 0, \text{ on } x_1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

このとき、均一な変形 ($D_{11} = -D_{22} = v_{20}/H$, $D_{12} = W_{12} = 0$) は増分釣合式、境界条件を自動的に満足するため、求めるべき分岐条件式は増分釣合式(19)と非均一変形に寄与する境界条件式(22)より求められる。以下、非均一境界条件式(22)をもって境界条件と呼ぶ。

6. 特性方程式による支配方程式の分類

各層において式(13)を満足するように流れ関数 ψ_i ($i=a, b$) を用いて速度場を次のように与える。

$$v_{i1} = \psi_{i,2}, v_{i2} = -\psi_{i,1} \quad (23)$$

このとき、式(12)で表わされる構成式は流れ関数 ψ_i ($i=a, b$) を用いると、各層において、

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} - \dot{T}_{22} &= 4\mu_i^* \psi_{i,12} \\ 2\dot{T}_{12} &= (2\mu_i - \bar{q}_i) \psi_{i,22} - (2\mu_i + \bar{q}_i) \psi_{i,11} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。また、式(19)の増分釣合式から $\dot{u}$ の項を消去して式(24)を用いると、流れ関数を用いた増分釣合式は次式のように得られる。

$$a_i \psi_{i,1111} - 2b_i \psi_{i,1122} + c_i \psi_{i,2222} = 0 \quad (25)$$

ここで a_i , b_i , および c_i は次式である。

$$a_i = 2\mu_i + \bar{q}_i, b_i = -(4\mu_i^* - 2\mu_i), c_i = 2\mu_i - \bar{q}_i \quad (26)$$

また、流れ関数を用いた境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} a_a \psi_{a,111} - (2b_a - a_a) \psi_{a,122} &= 0 & \text{on } x_1 = -B, \\ a_b \psi_{b,111} - (2b_b - a_b) \psi_{b,122} &= 0 & \text{on } x_1 = +B, \\ \psi_{a,11} - \psi_{a,22} = 0, (a_a \neq 0) & & \text{on } x_1 = -B, \\ \psi_{b,11} - \psi_{b,22} = 0, (a_b \neq 0) & & \text{on } x_1 = +B, \\ \psi_{i,1} = 0 & (i=a, b) & \text{on } x_2 = \pm H, \\ \psi_{i,22} = 0, (c_i \neq 0) & (i=a, b) & \text{on } x_2 = \pm H, \\ [a \psi_{,111} - (2b - a) \psi_{,122}] = 0 & & \text{on } x_1 = 0, \\ [\psi_{,11} - \psi_{,22}] = 0, (a \neq 0) & & \text{on } x_1 = 0, \\ [\psi_{,2}] = 0 & & \text{on } x_1 = 0, \\ [\psi_{,1}] = 0 & & \text{on } x_1 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

上下端 ($x_2 = \pm H$) の境界条件から、流れ関数 ψ_i を次のようにおく。

$$\psi_i = V_i(x_1) \cos(k_m x_2) \quad (28)$$

ここで、 $k_m = m\pi/2H$, $m=0,1,2,\dots$ である。ただし、変形モードを示す整数 m が偶数のとき、上下面の境界条件を満足するために x_2 座標の原点を H/m だけ移動させる必要がある。また、 $V_i(x_1)$ は未知関数である。式(25)に式(28)を用いると、各層の $V_i(x_1)$ 支配方程式は次式ようになる。

$$(a_i D^4 + 2b_i k_m^2 D^2 + c_i k_m^4) V_i(x_1) = 0, \quad (29)$$

ここで、 D^k は x_1 に関する微分演算子であり、 k はその微分の回数を表わしている。式(27)に式(28)を用いると側面の境界条件は、

$$\begin{aligned} a_a V_{a,111} + (2b_a - a_a) k_m^2 V_{a,1} &= 0 & \text{on } x_1 = -B, \\ a_b V_{b,111} + (2b_b - a_b) k_m^2 V_{b,1} &= 0 & \text{on } x_1 = +B, \\ V_{a,11} + k_m^2 V_a = 0, (a_a \neq 0) & & \text{on } x_1 = -B, \\ V_{b,11} + k_m^2 V_b = 0, (a_b \neq 0) & & \text{on } x_1 = +B, \end{aligned} \quad (30)$$

となり、界面の境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} [aV_{,11} + (2b-a)k_m^2 V_{,1}] &= 0 & \text{on } x_1 = 0, \\ [V_{,11} + k_m^2 V] &= 0, (a_i \neq 0) & \text{on } x_1 = 0, \\ [V] &= 0 & \text{on } x_1 = 0, \\ [V_{,1}] &= 0 & \text{on } x_1 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

また、支配方程式(29)は次のように変形できる。

$$(D^2 + k_m^2 \rho_i^2)(D^2 + k_m^2 \bar{\rho}_i^2)V(x_1) = 0, \quad (32)$$

ここで、 $\rho_i, \bar{\rho}_i$ は次式で与えられる。

$$\rho_i^2, \bar{\rho}_i^2 = \frac{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - a_i c_i}}{a_i} \quad (33)$$

これは次式のような4次方程式の根である。

$$a_i \rho_i^4 - 2b_i \rho_i^2 + c_i = 0 \quad (34)$$

ここで a_i, b_i , および c_i は式(26)と同様である。

a_i, b_i , および c_i は応力の関数であり、ゆえに供試体内の応力状態の変化にともない式(34)の実数解の存在個数が異なり、実数解の存在個数が0, 2および4個に対応して支配方程式(25)はそれぞれ楕円型(E), 放物型(P)および双曲型(H)に分類される。E領域は解の形により更に2つの領域に分類でき4つの複素数解の場合を(EC)領域、4つの虚数解の場合を(EI)領域と分類する。なお、それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} b_i^2 - a_i c_i > 0, b_i/a_i < 0, 2\mu_i > |\bar{q}_i| & \text{EI 領域} \\ b_i^2 - a_i c_i < 0 & \text{EC 領域} \\ b_i^2 - a_i c_i > 0, b_i/a_i > 0, 2\mu_i > |\bar{q}_i| & \text{H 領域} \\ 2\mu_i < |\bar{q}_i| & \text{P 領域} \end{aligned}$$

また、支配方程式の分類に基づき、式(32)から $V_i(x_1)$ の一般解は次式のようにになる。

$$V_i(x_1) = \sum_{j=1}^4 c_{ij} \exp(i\rho_{ij} x_1), \quad (35)$$

ここで、 $c_{ij} (j=1,2,\dots,4)$ は未定定数である。

6. 分岐条件式

分岐条件式は側面 ($x_1 = \pm B$) および界面 ($x_1 = 0$) の境界条件式において、 $c_{ij} (i=a,b) (j=1,2,\dots,4)$ の非自明な解が存在する条件として得られる。なお、最小の分岐荷重はほとんどの場合 EC 領域で生じるので、本論文では EC 領域のみを考察した。

EC 領域の分岐条件式

式(34)で与えられる4つの複素数解 $\rho, \bar{\rho}$ は共役な複素数であり、 $\rho_i, \bar{\rho}_i = R_i \pm iQ_i (R_i > 0, Q_i > 0)$ とおくと R_i と Q_i の間には次の関係式が得られる。

$$R_i^2 + Q_i^2 = \sqrt{c_i/a_i}, R_i^2 - Q_i^2 = b_i/a_i \quad (36)$$

また、式(35)の $V_i(x_1)$ は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} V_a(x_1) &= \Re[C_1 \sin(\rho_a k_m x_1) + C_2 \cos(\rho_a k_m x_1)] \\ V_b(x_1) &= \Re[C_3 \sin(\rho_b k_m x_1) + C_4 \cos(\rho_b k_m x_1)] \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 $\Re[\dots]$ で $[\dots]$ の実数部分を表わす。また、 $C_i (i=1,\dots,4)$ は複素数であり、それぞれ、

$$\begin{aligned} C_1 &= \chi_1 + i\chi_2, \quad C_2 = \chi_3 + i\chi_4, \\ C_3 &= \chi_5 + i\chi_6, \quad C_4 = \chi_7 + i\chi_8. \end{aligned}$$

と表わす。

側面 ($x_1 = \pm B$) の境界条件式(30)および界面 ($x_1 = 0$) の境界条件式(31)に速度場の一般解、つまり式(37)を代入することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} A_{11}\chi_1 + A_{12}\chi_2 + A_{13}\chi_3 + A_{14}\chi_4 &= 0 \\ A_{25}\chi_5 + A_{26}\chi_6 + A_{27}\chi_7 + A_{28}\chi_8 &= 0 \\ A_{31}\chi_1 + A_{32}\chi_2 + A_{33}\chi_3 + A_{34}\chi_4 &= 0 \\ A_{45}\chi_5 + A_{46}\chi_6 + A_{47}\chi_7 + A_{48}\chi_8 &= 0 \\ A_{51}\chi_1 + A_{52}\chi_2 + A_{55}\chi_5 + A_{56}\chi_6 &= 0 \\ A_{63}\chi_3 + A_{64}\chi_4 + A_{67}\chi_7 + A_{68}\chi_8 &= 0 \\ A_{73}\chi_3 + A_{77}\chi_7 &= 0 \\ A_{81}\chi_1 + A_{82}\chi_2 + A_{85}\chi_5 + A_{86}\chi_6 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、式(38)の係数は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{\xi P \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) + \zeta Q \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_a \\ A_{12} &= \{\xi P \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) - \zeta Q \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_a \\ A_{13} &= \{\xi P \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) - \zeta Q \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_a \\ A_{14} &= \{-\xi P \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) - \zeta Q \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_a \\ A_{25} &= \{\xi P \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) + \zeta Q \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_b \\ A_{26} &= \{\xi P \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) - \zeta Q \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_b \\ A_{27} &= \{-\xi P \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) + \zeta Q \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_b \\ A_{28} &= \{\xi P \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) + \zeta Q \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_b \\ A_{31} &= \{-(a-b) \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) \\ &\quad - \sqrt{ac-b^2} \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_a \\ A_{32} &= \{(a-b) \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \\ &\quad - \sqrt{ac-b^2} \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_a \\ A_{33} &= \{(a-b) \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) \\ &\quad - \sqrt{ac-b^2} \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}_a \\ A_{34} &= \{(a-b) \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \\ &\quad + \sqrt{ac-b^2} \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{45} &= \{(a-b)\sin(Pk_m B)\cosh(Qk_m B) \\
&\quad + \sqrt{ac-b^2}\cos(Pk_m B)\sinh(Qk_m B)\}_b \\
A_{46} &= \{-(a-b)\cos(Pk_m B)\sinh(Qk_m B) \\
&\quad + \sqrt{ac-b^2}\sin(Pk_m B)\cosh(Qk_m B)\}_b \\
A_{47} &= \{(a-b)\cos(Pk_m B)\cosh(Qk_m B) \\
&\quad - \sqrt{ac-b^2}\sin(Pk_m B)\sinh(Qk_m B)\}_b \\
A_{48} &= \{(a-b)\sin(Pk_m B)\sinh(Qk_m B) \\
&\quad + \sqrt{ac-b^2}\cos(Pk_m B)\cosh(Qk_m B)\}_b \\
A_{51} &= \{\xi P\}_a, \quad A_{52} = \{-\zeta Q\}_a, \quad A_{55} = \{-\xi P\}_b, \quad A_{56} = \{\zeta Q\}_b \\
A_{63} &= \{a-b\}_a, \quad A_{64} = \{\sqrt{ac-b^2}\}_a, \quad A_{67} = \{a-b\}_b, \\
A_{68} &= \{\sqrt{ac-b^2}\}_b, \quad A_{73} = 1, \quad A_{77} = -1 \\
A_{81} &= \{P\}_a, \quad A_{82} = \{-Q\}_a, \quad A_{85} = \{-P\}_b, \quad A_{86} = \{Q\}_b
\end{aligned}$$

ここで、 $\{...\}_i (i=a, b)$ は $\{...\}$ の中で i 層の土質パラメータを用いることを表わす。また、 $\xi = -a + \sqrt{ac}$ 、 $\zeta = -a - \sqrt{ac}$ である。

式(37)において、 $\chi_i (i=1, 2, \dots, 8)$ の係数行列の行列を $A_{ij} (i, j=1, 2, \dots, 8)$ と表わす時、分岐は $\chi_i (i=1, 2, \dots, 8)$ の非自明な解が存在するとき生じるので、分岐条件式は、

$$\det(A_{ij}) = 0 \quad (39)$$

となる。

7. 分岐荷重の解析結果および考察

本論文においては、梅田層粘土の物質パラメータの値 $\nu = 0.333$, $\lambda = 0.231$, $\kappa = 0.042$, $e = 1.5$, $M = 1.43$ を基準として用い⁷⁾、非共軸パラメータ A の値に関しては参考文献¹⁾の考察にならい $A = 0.01$ を基準として用いる。したがって、 $A = 0.01$ を基準とする本論文は、試行的なものであるが、いずれにしても非共軸項がない共軸モデルでは、実際現象を説明できない実例が多々あることが分かってきている。2層供試体を考えるときには基準の値を層 a に用い、層 b には層 a のパラメータのうち膨潤指数 κ 、あるいは圧縮指数 λ を 0.8, 0.9, 1.1, 1.2 倍したもの、または非共軸パラメータ A を 0.75, 0.5 倍したものをを用いた 2 層供試体を考える。

分岐条件式は各層の分岐荷重 $\eta = q/p'$ 、分岐時の供試体寸法比 B/H 、変形モード m の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、分岐条件式(39)と式(15), (16)から、供試体全体としての「分岐荷重」と分岐時の「供試体寸法比」の関係を得ることができる。ただし、得られた関係は各供試体寸法比に対して、最も低い分岐荷重を採用している。

各層のパラメータを変える前に両層が同一の物質パラメータの場合に、特定のパラメータが分岐荷重

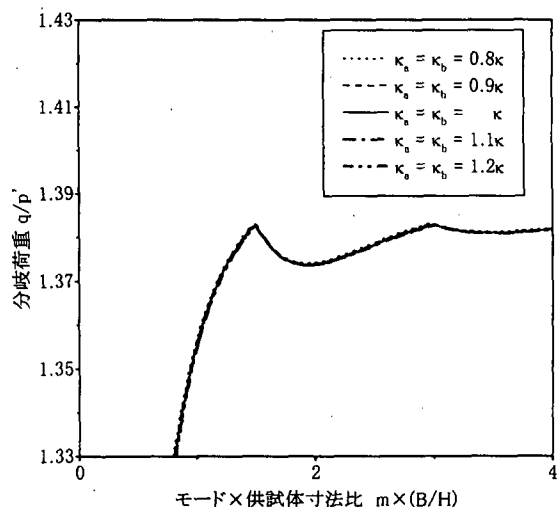


図-2 膨潤指数 κ の変化が分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係に与える影響

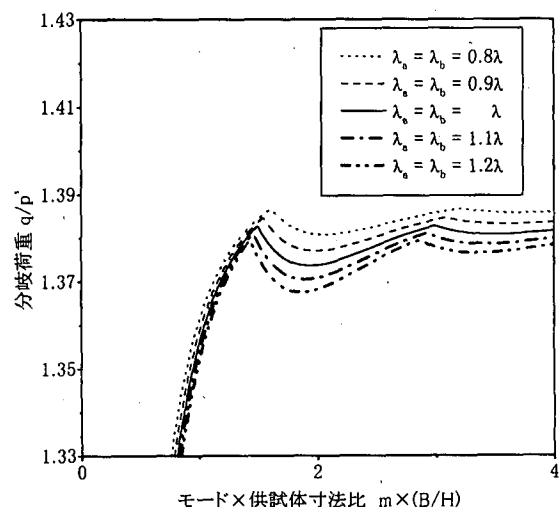


図-3 圧縮指数 λ の変化が分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係に与える影響

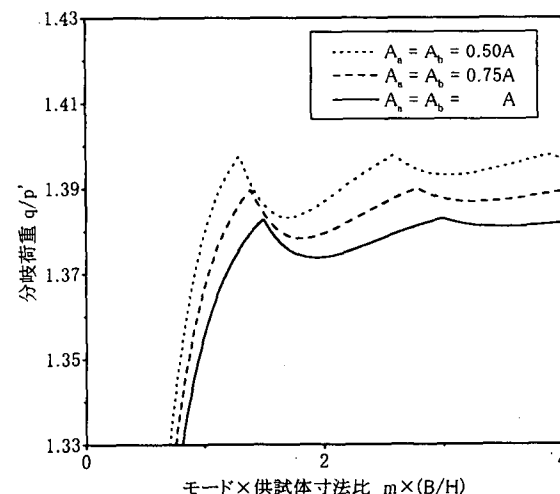


図-4 非共軸パラメータ A の変化が分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係に与える影響

に与える影響を考察する。図-2 には膨潤指数 κ を変化させた場合、図-3 には圧縮指数 λ を変化させた場合、図-4 には非共軸パラメータ A を変化させた場合の分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比の関係を示す。

図-2 を見ると膨潤指数 κ の変化は分岐荷重にほとんど影響を与えないことがわかる。図-2 を詳しく調べると、 κ が大きくなると分岐荷重は下がる傾向がある。一方、図-3 を見ると圧縮指数 λ の変化は分岐荷重に大きな影響を与え、 λ が大きくなると分岐荷重が下がる傾向がある。図-4 を見ると非共軸パラメータ A の変化も分岐荷重に大きな影響を与え、 A が大きくなると分岐荷重が下がる傾向がある。

図-5 に層 a と層 b の膨潤指数 κ が異なる場合の分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係を示す。図-2 に示した両層の膨潤指数 κ が等しい場合とは異なり、両層の κ が異なる場合は、両層の κ の差が大きいほど分岐荷重が下がる傾向がある。これは、図-2 において示したように膨潤指数 κ が分岐荷重にほとんど影響を与えないことから、両層の相互干渉の影響と考えられる。

図-6 に層 a と層 b の圧縮指数 λ が異なる場合の分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係を示す。図-3 に示した両層の圧縮指数 λ が等しい場合と同様、 λ が大きくなると分岐荷重が下がる傾向がある。したがって膨潤指数 κ の場合と異なり、両層の相互干渉の影響はみられない。

図-7 に層 a と層 b の非共軸パラメータ A が異なる場合の分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係を示す。図-4 に示した両層の非共軸パラメータ A が等しい場合と同様、 A が大きくなると分岐荷重が下がる傾向があり、両層の相互干渉の影響はみられない。

8. 最大せん断ひずみ

初期において長さ ℓ_0 の部分が分岐直前には ℓ になり分岐直後には $\ell + \Delta\ell$ になったとする。

分岐後の主対数ひずみは、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \ln \frac{\ell + \Delta\ell}{\ell_0} \\ &= \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \ln \left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell} \right) \end{aligned}$$

となる。上式は、 $x \ll 1$ なら $\ln(1+x) \approx x$ であるから、 $\Delta\ell/\ell \ll 1$ のとき、 ε は次式で近似できるので、

$$\varepsilon \approx \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{40}$$

となる。式(40)より、分岐直前の一様ひずみ $(\varepsilon)_\ell$ と

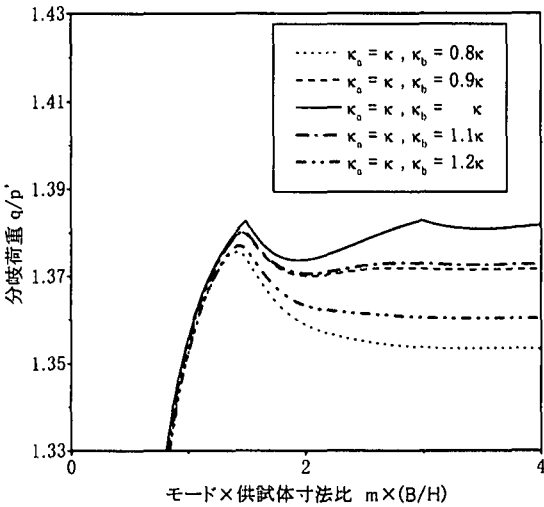


図- 5 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係 (層 a, b において膨潤指数 κ が異なる場合)

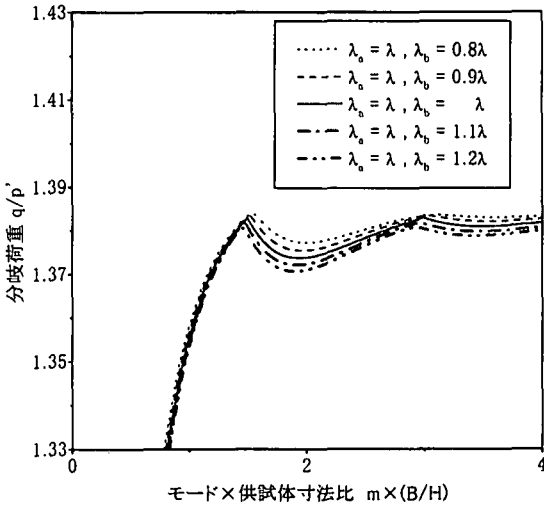


図- 6 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係 (層 a, b において圧縮指数 λ が異なる場合)

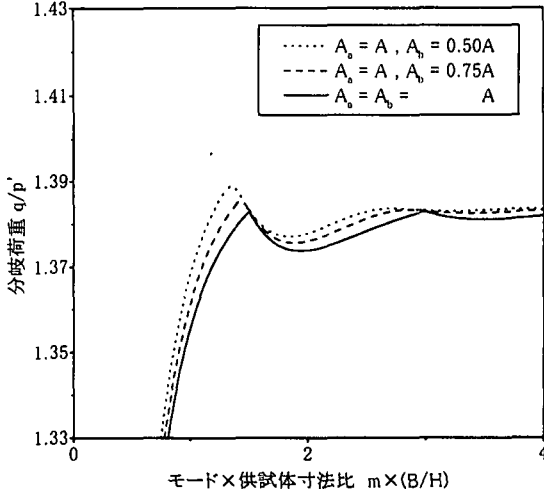


図- 7 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係 (層 a, b において非共軸パラメータ A が異なる場合)

変形速度を用いて表すと,

$$\varepsilon_{ij} \approx (\varepsilon_{ij})_t + D_{ij} \Delta t \quad (i: \text{no sum}) \quad (41)$$

また, 分岐直前のせん断ひずみ $((\varepsilon_{ij})_t, (i \neq j))$ が零であることより,

$$\varepsilon_{ij} \approx D_{ij} \Delta t \quad (i \neq j) \quad (42)$$

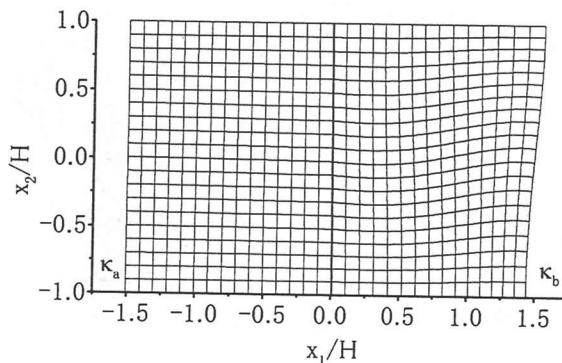
となる. 式(41), 式(42)で表わされる ε_{ij} の主値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) とおき, 最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ を次式のように定義する.

$$\Gamma_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \quad (43)$$

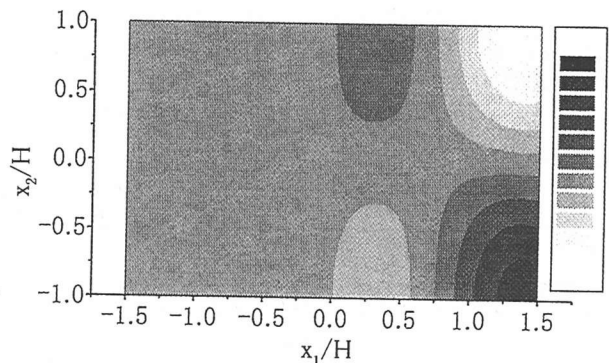
9. 最大せん断ひずみの解析結果および考察

非共軸 Cam-clay モデルを用いた 2 層供試体の分岐時の最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布を式(43)より求め, 各変形モードにおけるすべり面 (大きなスケールでは断層) の発生位置について考察する. 通常, 粘土のすべり面は, 破壊力学の用語で言えばモード II 型またはモード III 型 (せん断型) の進行性破壊であるので, ここでは, 上記の「最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置」と仮定して議論する. 図-8 から図-13 は, 横軸に x_1 方向 ($-B \leq x_1 \leq B$), 縦軸に供試体高さ x_2 方向 ($-H \leq x_2 \leq H$) をとる. また, 各々の供試体は $H=1$ とした. (a) は分岐時の変形図である. (b) は最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布図で, 色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく, 薄い部分で小さいことを示している. なお変形図は分岐時の非均一解による変形のみを表しており, 実際の変形図は, すべての領域で負荷となる自明な均一解の変形を非均一解に加える必要がある.

図-8,9 では, 各層の膨潤指数 κ を変化させた場合



(a)



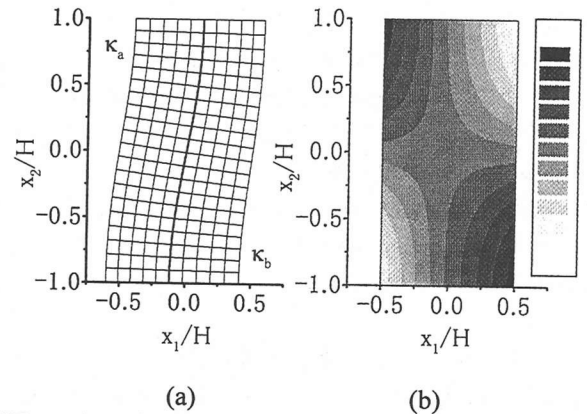
(b)

図-9 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図 $\kappa_a = \kappa, \kappa_b = 0.8\kappa, m=1, B/H=1.5$

を, 図-10,11 では圧縮指数 λ を変化させた場合を, 図-12,13 では非共軸パラメータ A を変化させた場合を示している.

図-8 は $\kappa_a = \kappa, \kappa_b = 0.8\kappa, m=1, B/H=0.5$ の場合である. なお, 分岐時には各層の 45° せん断剛性は $\mu_a^* \approx 2.682, \mu_b^* \approx 1.329$ となり, 単純せん断剛性は $\mu_a \approx 6.312, \mu_b \approx 4.118$ となっている. 変形モード概形は図-8(a)に示すように各層の変形は同じ挙動をとっており差は見られない. 図-8(b)からわかるように, 最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は膨潤指数 κ が小さい層 b の表面右下端近傍となっていることがわかる. このことから, すべり面は表面右下端近傍から発生しやすいものと考えられる.

図-9 は $\kappa_a = \kappa, \kappa_b = 0.8\kappa, m=1, B/H=1.5$ の場合である. なお, 分岐時には各層の 45° せん断剛性は $\mu_a^* \approx 0.603, \mu_b^* \approx 0.217$ となり, 単純せん断剛性は $\mu_a \approx 2.350, \mu_b \approx 1.028$ となっている. 変形モード概形は図-9(a)に示すように膨潤指数 κ が大きい層 a では変形があまり現れておらず, 膨潤指数 κ が小さい層 b で大きな変形が生じている. 図-9(b)より, 図-8(b)と同様に最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は膨潤指数 κ が小さい層 b の表面右下端近傍であることがわかる. このことから, すべり面は表面右下端



(a)

(b)

図-8 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図 $\kappa_a = \kappa, \kappa_b = 0.8\kappa, m=1, B/H=0.5$

近傍から発生しやすいものと考えられる。

応力比 η が等しいとき、膨潤指数 κ が小さくなると、式(14)で与えられる 45° せん断剛性 μ^* は大きくなるので、一定のひずみに対して応力が大きくなる。ゆえに膨潤指数 κ が小さい層 b が早く分岐荷重に達すると考えられる。

しかし、分岐時には、膨潤指数 κ が小さい層 b のほうが、 45° せん断剛性 μ^* および単純せん断剛性 μ が小さくなっているため分岐を促進し、分岐が生じた際、変形が大きくなると考えられる。

図-10 は $\lambda_a = \lambda, \lambda_b = 0.8\lambda, m = 1, B/H = 0.5$ の場合である。なお、分岐時には各層の 45° せん断剛性は $\mu_a^* \approx 1.867, \mu_b^* \approx 2.029$ となり、単純せん断剛性は $\mu_a \approx 5.111, \mu_b \approx 4.844$ となっている。変形モード概形は図-10(a)に示すように各層の変形に同じ挙動をとっており差は見られない。図-10(b)を詳しくみると、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は圧縮指数 λ が大きい層 a の表面左上端近傍となることがわかる。このことから、すべり面は表面左上端近傍から発生しやすいものと考えられる。

図-11 は $\lambda_a = \lambda, \lambda_b = 0.8\lambda, m = 1, B/H = 1.5$ の場合である。なお、分岐時には各層の 45° せん断剛性は $\mu_a^* \approx 0.359, \mu_b^* \approx 0.391$ となり、単純せん断剛性は $\mu_a \approx 1.550, \mu_b \approx 1.354$ となっている。変形モード概形は図-11(a)に示すように圧縮指数 λ が大きい層 a では、変形はそれほど大きくないが膨潤指数 κ を変えた場合に比べると変形は大きい。圧縮指数 λ が小さい層 b では大きな変形が生じている。図-11(b)より、図-10(b)と異なり最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は圧縮指数 λ が小さい層 b の表面右下端近傍であることがわかる。このことから、すべり面は表面右下端近傍から発生しやすいものと考えられる。

応力比 η が等しいとき、圧縮指数 λ が小さくなると、式(14)で与えられる 45° せん断剛性 μ^* は大きくなるので、一定のひずみに対して応力が大きくなる。

ゆえに圧縮指数 λ が小さい層 b が早く分岐荷重に達すると考えられる。

分岐時においても、圧縮指数 λ が小さい層 b の 45° せん断剛性 μ^* は大きい。一方、単純せん断剛性 μ は小さくなっているため、分岐が生じた際、変形が大きくなると考えられる。 $B/H = 0.5$ の場合は層幅が薄かったため、層 b が分岐した際、単純せん断剛性の大きい層 a に拘束され十分に変形できなかったものと考えられる。 $B/H = 1.5$ の場合は、層 b の方が単純せん断剛性 μ が小さく変形しやすく、かつ層 b の最大せん断ひずみの卓越する点に変形を支配する層 a から離れているため、変形が拘束されず十分変形できたためであると考えられる。

図-12 は $A_a = A, A_b = 0.5A, m = 1, B/H = 0.5$ の場合である。なお、分岐時には各層の 45° せん断剛性は $\mu_a^* \approx 1.782, \mu_b^* \approx 1.782$ となり、単純せん断剛性は $\mu_a \approx 4.966, \mu_b \approx 8.124$ となっている。変形モード概形は図-12(a)に示すように各層の変形は同じ挙動をとっており差は見られない。図-12(b)を詳しくみると、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は非共軸パラメータ A が小さい層 b の表面右下端近傍となることがわかる。このことから、すべり面

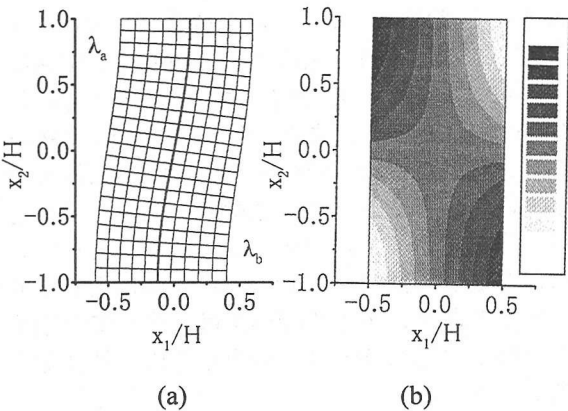


図-10 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図 $\lambda_a = \lambda, \lambda_b = 0.8\lambda, m = 1, B/H = 0.5$

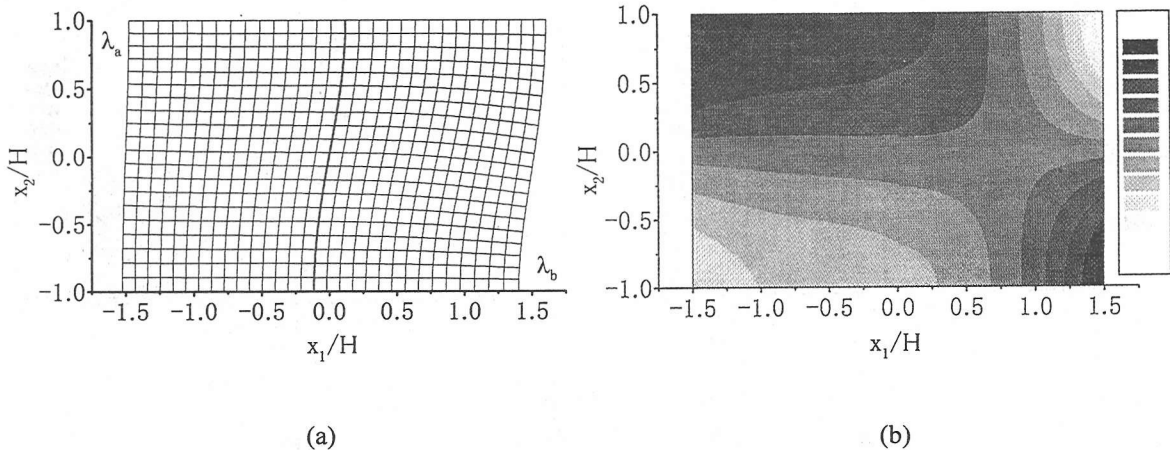


図-11 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図 $\lambda_a = \lambda, \lambda_b = 0.8\lambda, m = 1, B/H = 1.5$

は表面右下端近傍から発生しやすいものと考えられる。

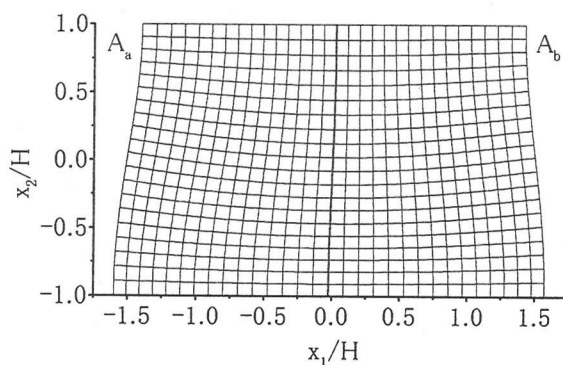
図-13 は $A_a = A, A_b = 0.5A, m = 1, B/H = 1.5$ の場合である。なお、分岐時には各層の 45° セン断剛性は $\mu_a^* \approx 0.334, \mu_b^* \approx 0.334$ となり、単純せん断剛性は $\mu_a \approx 1.459, \mu_b \approx 2.739$ となっている。変形モード概形は図-13(a)に示すように両層とも下端が膨らむ挙動をとっている。図-13(b)より、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大となる位置は供試体中央部下部であり、詳しく調べると非共軸パラメータ A が小さい層 b の側であることがわかる。このことから、すべり面は中央下端近傍から発生しやすいものと考えられる。

非共軸パラメータ A は、式(14)の 45° セン断剛性 μ^* には影響を与えないが、 A が小さくなると単純せん断剛性 μ は大きくなる。

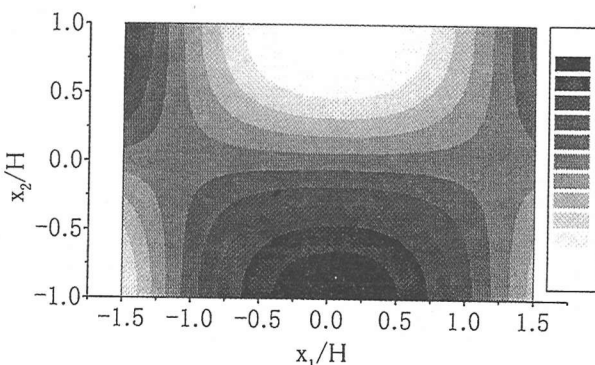
分岐時においても、両層で μ^* は等しく、非共軸パラメータ A の小さい層 b のほうが μ は大きい。図-12,13 どちらの場合も層 a の方が変形しやすいが最大せん断ひずみの卓越する点が変形を支配する層 b の影響を受けているため層 b の側に最大せん断ひずみの最大の位置が現われたものと考えられる。

以上は、はじめに述べたように、すべり面は、仮に初期に「拡散分岐モード (Diffuse bifurcation mode)」の出現した場合、速度勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使って、初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである。

なお、すべり面発生の考察として、双曲型または放物型における速度勾配の不連続面で定義される「せん断帯モード (Shear band mode)」発生の必要条件に基づいた議論も、数多く行なわれているが、その条件では、せん断帯モードとしてのすべり面の発生する応力状態やその方向は議論できるが、境界条件に無関係な局所的な理論であるため、本分岐解のように、特定の供試体形状におけるすべり面の発生位置までは議論できない。



(a)



(b)

図-13 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図 $A_a = A, A_b = 0.5A, m = 1, B/H = 1.5$

10. おわりに

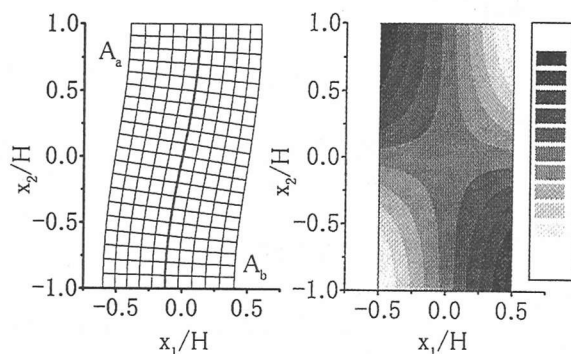
本論文では、有限変形非共軸 Cam-clay モデルを用いた2層供試体の分岐解析を行うことにより、まず、分岐条件式を求め、分岐荷重と変形モードとの関係を議論した。次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。本論文で得られた結論を以下に列記する。

- (1) 2層供試体の分岐荷重の理論解を得た。
- (2) 2層の圧縮指数 λ あるいは非共軸パラメータ A の相違は分岐荷重に大きな影響を与えない。
- (3) 2層の膨潤指数 κ の相違は分岐荷重に大きな影響を与え、2層の膨潤指数の差が大きいほど分岐荷重は下がる傾向にある。
- (4) いくつかの2層供試体の変形モードに対して最大せん断ひずみの分布を求め、初期すべり面の発生しやすい位置を求めた。

なお、本論文では、高次の変形モードは紙面の都合上、割愛した。

Appendix

分岐の瞬間までは、均一状態を保つから、式(2)より、 x_2 方向の平均の有効応力は、各層の層幅が B_a, B_b とすると



(a)

(b)

図-12 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図

$A_a = A, A_b = 0.5A, m = 1, B/H = 0.5$

$$\sigma'_2 = \frac{B_a \sigma'_{a2} + B_b \sigma'_{b2}}{B_a + B_b}$$

となる。一方、間隙水圧が両層で等しい場合は、 x_1 向の有効応力は、

$$\sigma'_1 = \sigma'_{a1} = \sigma'_{b1}$$

となる。よって 2 層体としての平均有効主応力 p' と一般化された偏差応力 q は次式のようになる。

$$\begin{aligned} p' &= \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2} = \frac{B_a \sigma'_{a2} + B_b \sigma'_{b2} + (B_a + B_b) \sigma'_1}{2(B_a + B_b)} \\ &= \frac{\sigma'_{a2} + \sigma'_1}{2} \frac{B_a}{B_a + B_b} + \frac{\sigma'_{b2} + \sigma'_1}{2} \frac{B_b}{B_a + B_b} \\ &= p'_a \frac{B_a}{B_a + B_b} + p'_b \frac{B_b}{B_a + B_b} \\ q &= \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma'_2 - \sigma'_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{B_a \sigma'_{a2} + B_b \sigma'_{b2} - (B_a + B_b) \sigma'_1}{B_a + B_b} \right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left| (\sigma'_{a2} - \sigma'_1) \frac{B_a}{B_a + B_b} + (\sigma'_{b2} - \sigma'_1) \frac{B_b}{B_a + B_b} \right| \\ &= q_a \frac{B_a}{B_a + B_b} + q_b \frac{B_b}{B_a + B_b} \end{aligned}$$

ゆえに 2 層系全体としての場合の分岐荷重は、

$$\frac{q}{p'} = \frac{B_a q_a + B_b q_b}{B_a p'_a + B_b p'_b}$$

となり、層幅の等しい場合は、

$$\frac{q}{p'} = \frac{q_a + q_b}{p'_a + p'_b} \quad (16 : \text{再掲})$$

となる。ゆえに、両層分岐時の間隙水圧が等しい場合の層幅の等しい 2 層供試体の分岐荷重は式(16)で定義できる。2 層供試体の分岐荷重には様々な定義が考えられるが上記のような例もあるので、本論文では、式(16)を分岐荷重として定義する。

参考文献

- 1) Biot, M. A. : *Mechanics of the Incremental Deformation*, Wiley, New York, 1965.
- 2) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 3) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol. 13, pp. 211-240, 1963.
- 4) Ohta, H. : Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
- 5) 例えば、志比利秀，矢富盟祥：有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析，*応用力学論文集*，Vol.1，pp. 537-546，1998.
- 6) 伊藤耿一：塑性不安定と分岐の理論，*塑性と加工*，Vol.22-249, pp. 1009-1015, 1981.
- 7) Sekiguchi, H. : Rheological characteristics of clays, *Proc. 9th ICSFME*, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.

(1999 年 4 月 23 日受付)