

砂の主偏差ひずみ増分比と主偏差応力増分比の関係

Relationship between Principal Deviatoric Strain Increment Ratio
and Principal Deviatoric Stress Increment Ratio of Sand

鈴木輝一*・柳澤栄司**・菅野高弘***

Kiichi SUZUKI, Eiji YANAGISAWA and Takahiro SUGANO

*正会員 博(工) 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (〒338-8570 埼玉県浦和市下大久保255)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉)

***正会員 工博 運輸省港湾技術研究所室長 構造部構造振動研究室 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

So far, many researchers have mainly studied the relationship between the principal stress ratio and the principal strain increment ratio of sand. However, it's not uniquely obtained for various stress conditions like b -value yet. The purpose of this paper is to reveal the fundamental stress-strain relationship of sand with inherent transverse isotropy, taking the effect of b -value and non-coaxiality into consideration. Towards this end, the monotonic loading tests with fixed principal stress axes were carried out at the range of b -value from 0.0 to 1.0 using a large hollow cylindrical apparatus. Through the analysis of the experimental results, it is clarified that the relationship between the principal deviatoric stress increment and the principal deviatoric strain increment is more essential for sand even in the case that b -value is changed.

Key Words : sand, inherent transverse isotropy, principal deviatoric strain increment, dilatancy

1. まえがき

砂のような粒状体の主応力比と主ひずみ増分比の関係については、Rowe¹⁾が、平面ひずみ圧縮試験において拘束圧の大きさや砂の密度によらず、ストレス・ダイレイタンス式 $\sigma_1/\sigma_3 = K(-d\epsilon_3/d\epsilon_1)$ が成り立つことを示している。また、Tatsuoka etc.²⁾も簡便三軸圧縮試験において、Roweの式とは異なる定数 K の値を用いて、同様な式 $\sigma_1/\sigma_3 = K(-2d\epsilon_3/d\epsilon_1)$ が成り立つことを示している。しかしながら、これらの関係式は、試験装置に依存しており、各々の試験装置での限られた b 値 $\{b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)\}$ の範囲を対象としているため、一般的な応力状態に対するものではない。

一方、Lade and Duncan³⁾は、主応力軸が固定されている立方三軸試験装置を用いて、最小主応力一定の条件下での中間主応力の影響を検討し、任意の b 値における主ひずみ比の非線形な関係を示している。更に、宮森⁴⁾も立方三軸試験を用いて平均応力一定下での同様な試験を行い、平均応力値が一定である π 面上において、任意の b 値すなわち任意の主偏差応力ベクトルの方向（あるいは主偏差応力比）に対する主偏差ひずみ増分ベクトルの方向（あるいは主偏差ひずみ増分比）を重ねて表示し、主偏差ひずみ増分比は、偏差応力が小さい時には主偏差応力比に等しく、偏差応力の増大とともに徐々にある特定の向

きにずれが生じることを示している。

このような特性は砂に限らず、松岡他⁵⁾はセメント混合砂に対しても同様な結果を得ており、また、Yong and McKyes⁶⁾はセル型三主応力制御試験装置を用いた非排水条件下での粘土についても、ある偏差応力の範囲内では主偏差応力比と主偏差ひずみ増分比が一致するが、偏差応力が大きくなると主偏差ひずみ増分比は主偏差応力比に無関係に一定の値を持つとしている。このように、載荷条件として b 値が一定（ π 面上での放射状応力経路）か、あるいは比較的 b 値の変化が小さい条件のもとでは、主応力比と主ひずみ増分比の関係あるいは主偏差応力比と主ひずみ増分比の関係で表される。

しかしながら、孫、松岡⁷⁾は b 値が変化する場合（ π 面上での折れ線状応力経路）の実験結果から、主ひずみ増分比に応力経路依存性があることを示し、一般的には主応力比のみならず主応力増分比も考慮する必要があることを述べている。また、これらの既往の研究¹⁾⁻⁷⁾では、応力とひずみの共軸性の場合のみを対象としており、かつ、地盤の基本的な特質である初期構造異方性に対する考察がなされていない。

一方、砂の初期構造異方性に着目した研究⁸⁾⁻¹³⁾では、非共軸性を考慮するために、主に中空ねじり試験装置が用いられている。これらの研究では、構成則構築のための重要かつ基礎的なデータを与えているが、主偏差応力増分比と主偏差ひずみ増分比の関係については、著者等¹¹⁾が3種類の限られた範囲の

b 値について述べている以外はほとんど検討されていない。

このようなことから、本研究の目的は、非共軸性の影響を考慮し、かつ初期構造異方性の典型である初期横等方性を有する砂を対象として、広い範囲の b 値における主応力増分比と主ひずみ増分比の一般的な関係について明らかにすることである。

2. 実験方法

b 値が 0.25, 0.5, 0.75 の 3 種類の場合の結果については既示している¹¹⁾が、本研究では b 値が 0.0 から 1.0 までの範囲を包括できるように、7 種類の b 値 (0.0, 0.125, 0.375, 0.5, 0.625, 0.875, 1.0) について新たに実験を行った。ただし、 b 値が 1.0 の場合については、精度の良い結果が得られず除外した。

既報¹¹⁾と同様に外径 25cm、内径 20cm、高さ 25cm の大型中空ねじりせん断試験装置を用いて実験を行った。試料は豊浦砂 (比重 $G_s = 2.64$, 最大・最小間隙比 $e_{\max} = 0.966$, $e_{\min} = 0.614$) を用い、多重ふるい落下法によって強い初期横等方性を持つ供試体を作成し、圧密終了時 ($\sigma_c = 98kPa$) で相対密度 $D_r = 70 \pm 2.5\%$ としている。実験は半径方向応力 σ_r が常に中間主応力 σ_2 に等しいという条件下で、平均応力 $98kPa$ 一定とし、図-1 に示すような最大主応力方向と鉛直方向 (堆積面の法線方向) のなす角度 β が 45° 一定の主応力軸固定試験について行った。

3. 実験結果および考察

各 b 値に対する応力比 q/p と相当ひずみ (相当ひずみ増分の累積量) e の関係、および応力比 q/p と体積ひずみ ε_{vol} の関係を、それぞれ図-2(a), (b) に示す。ここに、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})(\sigma_{ij} - p \delta_{ij})} \\ e &= \sum de, \quad de = \sqrt{\frac{2}{3} \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} d\varepsilon_{vol} \delta_{ij} \right) \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} d\varepsilon_{vol} \delta_{ij} \right)} \end{aligned} \quad (1)$$

図-2 に示されるように、応力比に対する相当ひずみおよび体積ひずみの挙動は b 値によって異なっている。これについては、既に破壊応力比を b 値の関数で正規化して統一的に表すことを提案¹¹⁾している。ここでは、主偏差応力増分と主偏差ひずみ増分との関係について焦点を絞ることとする。最初に等方弾性材料における主偏差応力増分と主偏差ひずみ増分の関係について整理し、次いで、本実験結果である初期横等方性材料における関係について述べる。

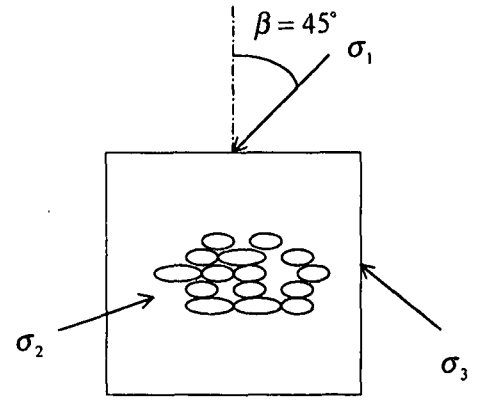


図-1 主応力軸固定試験

3.1 等方弾性材料における主偏差応力増分と主偏差ひずみ増分との関係

土の挙動は、一般に偏差応力成分と平均応力成分、あるいは偏差ひずみ成分と体積ひずみ成分に分けて影響を捉えることが多い。ここでは偏差成分のみに着目して、最初に等方弾性材料における主偏差応力増分と主偏差ひずみ増分との関係について整理してみる。

主偏差応力増分 ds_i ($i = 1 \sim 3$) については次の関係がある。

$$ds_1 + ds_2 + ds_3 = 0 \quad (1)$$

また、中間主応力増分の相対的大きさを示す b_{ds} を次式で表わすものとする¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} b_{ds} &= \frac{d\sigma_2 - d\sigma_3}{d\sigma_1 - d\sigma_3} \\ &= \frac{ds_2 - ds_3}{ds_1 - ds_3} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)から中間主偏差応力増分は、次のように表される。

$$ds_2 = b_{ds} ds_1 + (1 - b_{ds}) ds_3 \quad (3)$$

式(3)を式(1)に代入すると、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} (1 + b_{ds}) ds_1 + (2 - b_{ds}) ds_3 &= 0 \\ \therefore \frac{ds_3}{ds_1} &= \frac{b_{ds} + 1}{b_{ds} - 2} \end{aligned} \quad (4)$$

一方、式(1)と同様に主偏差ひずみ増分 de_i ($i = 1 \sim 3$) についても次式の関係がある。

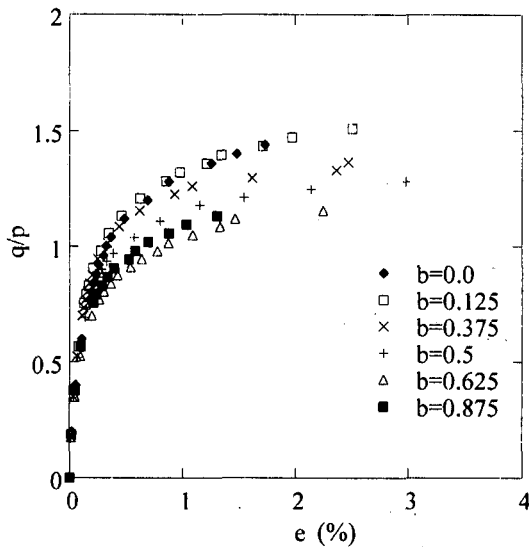
$$de_1 + de_2 + de_3 = 0 \quad (5)$$

また、等方弾性材料においては主偏差ひずみ増分と主偏差応力増分との関係は次式で与えられる。

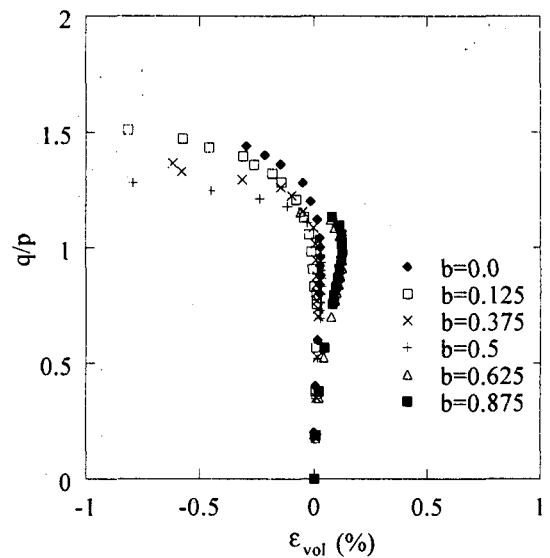
$$\begin{Bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{Bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{Bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

すなわち、式(6)から次式の関係が得られる。

$$\frac{de_3}{de_1} = \frac{ds_3}{ds_1}, \quad \frac{de_2}{de_1} = \frac{ds_2}{ds_1} \quad (7)$$

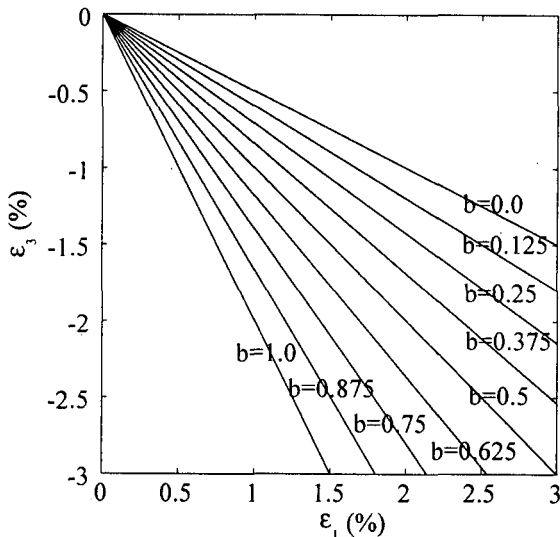


(a) 応力比と相当ひずみの関係

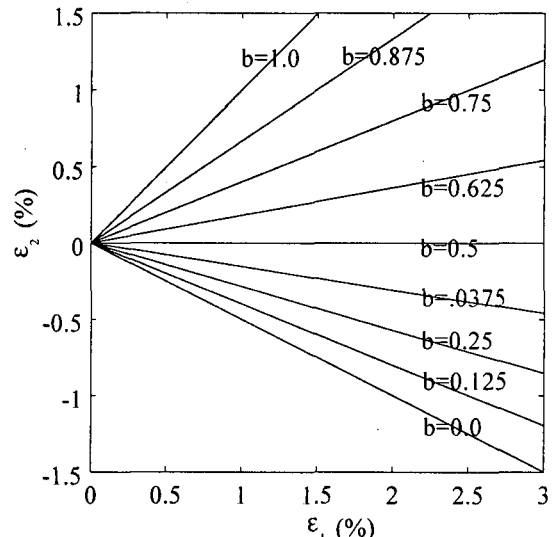


(b) 応力比と体積ひずみの関係

図-2 b値の影響



(a) 最大主ひずみと最小主ひずみ



(b) 最大主ひずみと中間主ひずみ

図-3 等方弾性材料の主ひずみ比

よって、式(4), (5), (7)から、次の式が得られ、等方弾性時における主偏差ひずみ増分比は、中間主応力増分の相対的大きさを表す $b_{d\sigma}$ によって表される。

$$\frac{de_3}{de_1} = \frac{b_{d\sigma} + 1}{b_{d\sigma} - 2}, \quad \frac{de_2}{de_1} = \frac{-2b_{d\sigma} + 1}{b_{d\sigma} - 2} \quad (8)$$

等方弾性材料で b 値が一定の場合に限っては、式(8)はひずみ増分だけでなく全ひずみに対しても同様に表される。

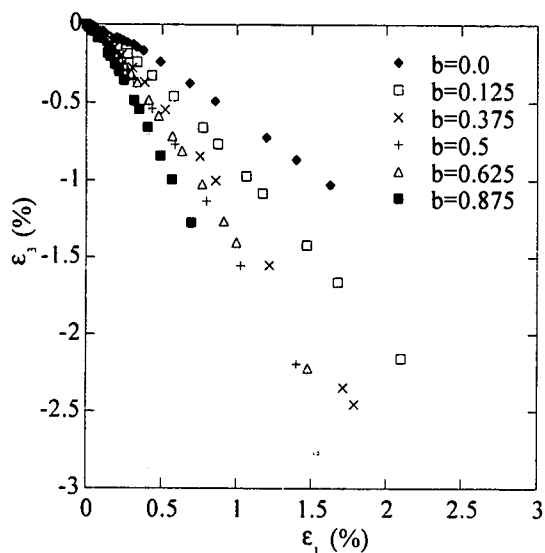
$$\frac{e_3}{e_1} = \frac{b+1}{b-2}, \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{-2b+1}{b-2} \quad (9)$$

なお、平均応力一定下の等方弾性材料においては、体積ひずみが生じないことから、主ひずみと主偏差ひずみは同じになる。

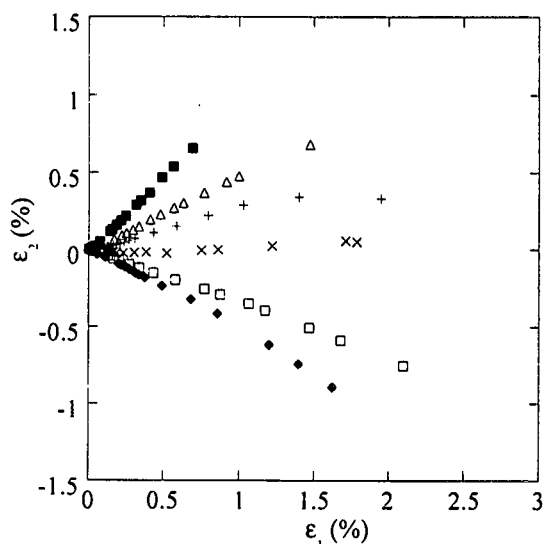
式(9)を用いて b 値が0.0から1.0まで0.125刻みで増やしていった場合の最大主ひずみと最小主ひずみの関係および最大主ひずみと中間主ひずみの関係を図-3(a), (b)にそれぞれ示す。図-3(b)からも明らかに等方弾性材料では、 b 値が0.5の場合に中間主ひずみが零となる。

3.2 初期横等方性材料における主偏差応力増分と主偏差ひずみ増分との関係

3.1では等方弾性材料における理論的な関係を示したが、ここでは初期横等方性材料を対象とした実験結果について述べる。図-4(a), (b)に最大主ひずみに対する最小主ひずみ、最中間主ひずみの関係、図-5(a), (b)には最大主偏差ひずみに対する最小主偏差

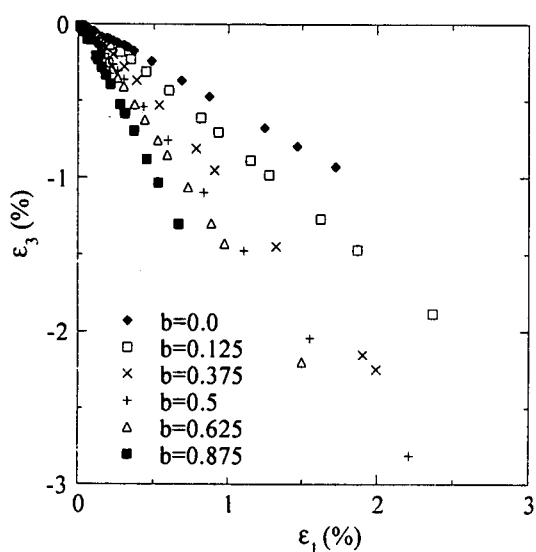


(a) 最大主ひずみと最小主ひずみとの関係

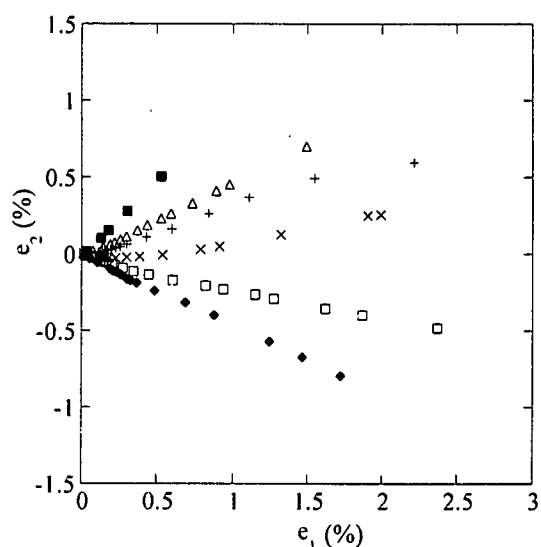


(b) 最大主ひずみと中間主ひずみの関係

図-4 初期横等方性材料の主ひずみ比



(a) 最大主偏差ひずみと最小主偏差ひずみの関係



(b) 最大主偏差ひずみと中間主偏差ひずみの関係

図-5 初期横等方性材料の主偏差ひずみ比

ひずみ、中間主偏差ひずみの関係をそれぞれ示す。主ひずみ間には例えば図-4(a)の b 値が0.875の場合に顕著なように非線形的な関係が見られるのに対して、図-5(a)のように主偏差ひずみ間ではより線形的な関係が見られることが分かる。

次にもう少し詳しく見るために、今回の実験結果の中で体積ひずみが最大となる b 値が0.625の場合について、最大主ひずみに対する最小主ひずみの関係、最大主偏差ひずみに対する最小主偏差ひずみの関係を図-6(a), (b)に示す。また、比較的小さなひずみ領域 ($\sim 0.5\%$) についても同様に図-7(a), (b)に示した。破線は等方弾性材料の場合の主偏差ひずみ (あるいは主ひずみ) の関係を示し、実線は実験結果から最小2乗法を用いて求めた主偏差ひずみ間の関係である。実線は大きなひずみに影響を大きく受ける

ため、破壊時の主偏差ひずみの関係ということができる。図-6, 7から明らかなように、主ひずみはダイレイタンシー成分を含むため、より複雑な非線形の関係を示すが、主偏差ひずみは等方弾性の関係 (図-6, 7の破線) から、徐々に一定の主偏差ひずみ関係 (図-6, 7の実線) に移行するという比較的単純な挙動を示していることが分かる。なお、朴他¹⁵⁾は初期構造異方性を有する砂でも、微小ひずみ領域では等方弾性とみなせることを既に示しており、本実験でもそれが示されている。

ここで示した実験結果は、 b 値が一定の場合の全ひずみについてである。しかしながら、一般的な応力状態では3.1で示したように基本は増分であることから、増分で再度整理してみたのが図-8である。図-8では相当ひずみ増分に対する最大、最小主偏差

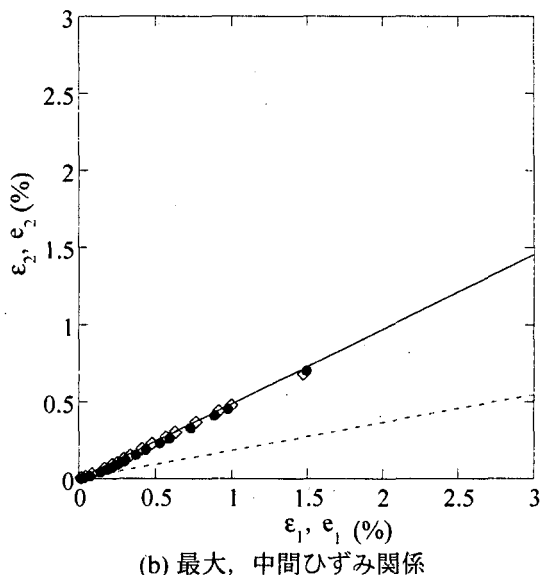
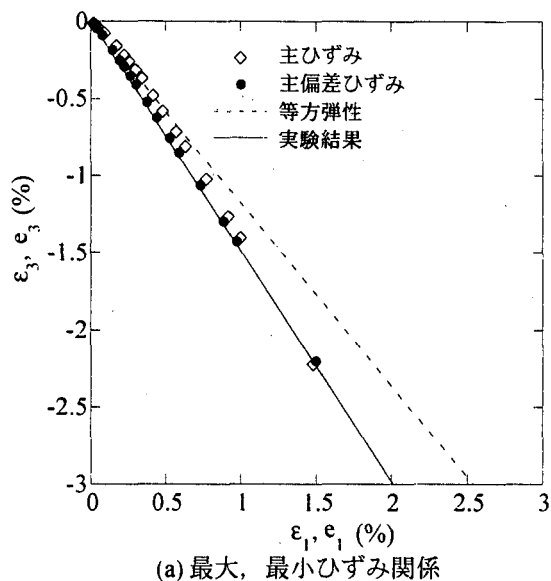


図-6 主ひずみ比および主偏差ひずみ比 ($b=0.625$)

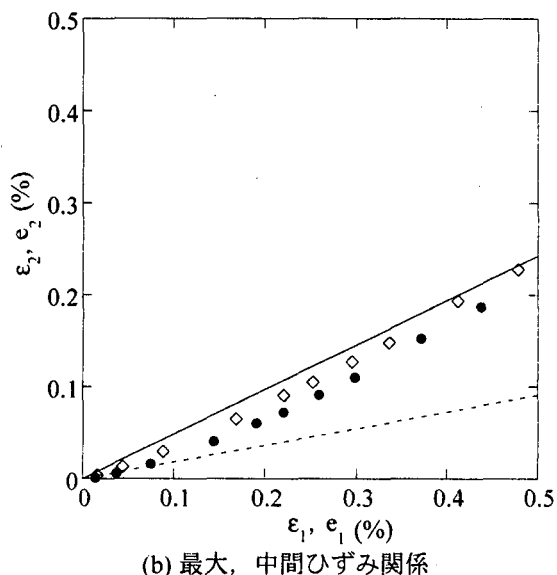
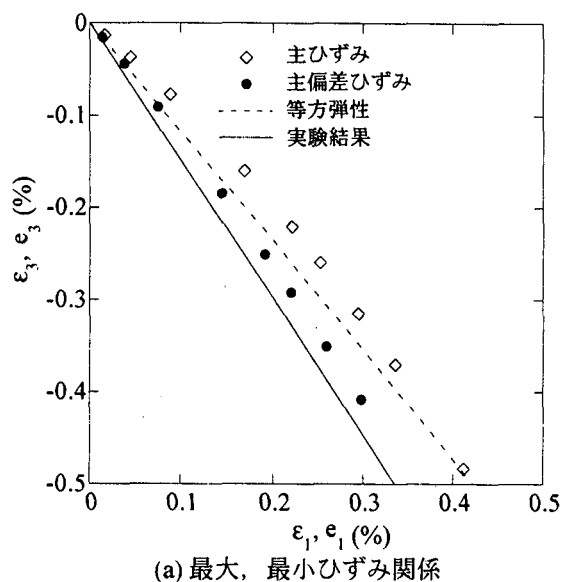


図-7 比較的小さなひずみ領域での主ひずみ比および主偏差ひずみ比 ($b=0.625$)

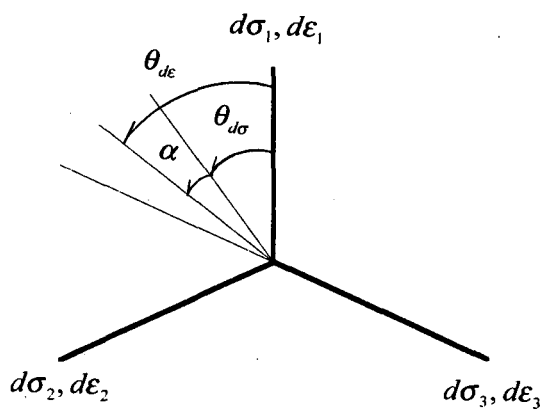
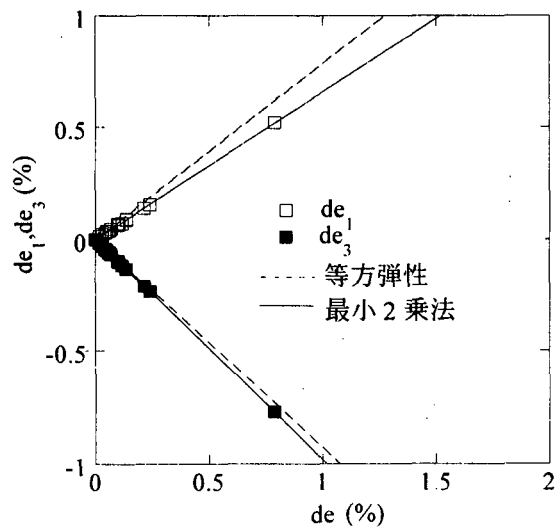


図-9 主応力増分空間と主ひずみ増分空間の重ね合せ

ひずみ増分の関係を示している。実線は、図-6, 7で最小2乗法で得られた値である。

また、主応力空間である π 面上に主ひずみ増分空間を重ねて表示するのと同様な方法で、主応力増分空間 $\pi_{d\sigma}$ と主ひずみ増分空間 π_{de} を重ねて表示すると図-9のようになる。その場合、各主ひずみ増分は次のように表される¹⁴⁾。

$$de_1 = \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha)de$$

$$de_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) - \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \right\} de \quad (10)$$

$$de_3 = -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) + \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \right\} de$$

ここで、 $\theta_{d\sigma}$ 、 θ_{de} は、それぞれ主偏差応力増分ベクトル、主偏差ひずみ増分ベクトルの方向を示す角度。 α は主偏差ひずみ増分ベクトル方向と主偏差応力増分ベクトル方向のなす角度である。 $\theta_{d\sigma}$ は $b_{d\sigma}$ 値を用いて次のようにも表される。

$$\theta_{d\sigma} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}b_{d\sigma}}{2-b_{d\sigma}} \right) \quad (11)$$

よって、各主偏差ひずみ比は次式で表され、初期横等方性材料においても、基本的には主偏差ひずみ増分比は主偏差応力増分比の関数として表されることになる。なお、等方弾性材料は α が零の場合である。

$$\begin{aligned} \frac{de_3}{de} &= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \tan(\theta_{d\sigma} + \alpha) + 1 \right\} \\ \frac{de_2}{de} &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \tan(\theta_{d\sigma} + \alpha) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

4. b 値が変化する応力経路に対する考察

孫、松岡⁷⁾は π 面上での折れ線状応力経路（すなわち b 値が変化する応力経路）の実験結果から、拡張SMPモデルにおけるせん断ひずみ増分は、応力のみならず応力増分にも関係があるとしている。これは3.で述べたように、主偏差ひずみ増分比 θ_{de} は主偏差応力増分比 $\theta_{d\sigma}$ に依存するのが基本であることから明らかである。ここでは主偏差ひずみ増分比 θ_{de} が、等方弾性時には主偏差応力増分比に一致し、破壊時には π 面上における破壊曲面の法線方向になる（関連流れ則）という関係に基づいて、次式のように最も単純な線形関係を仮定する¹¹⁾。

$$\theta_{de} = (\theta_f - \theta_{d\sigma}) \frac{\dot{q}/p}{(\dot{q}/p)_f} + \theta_{d\sigma} \quad (13)$$

ここで、 θ_f は図-10に示すように、 π 面上において現在の応力点と原点を結ぶ線と破壊曲面との交点で、破壊曲面の法線方向が鉛直軸となす角度を表し、 $(\dot{q}/p)$ は初期横等方性の影響を考慮した修正応

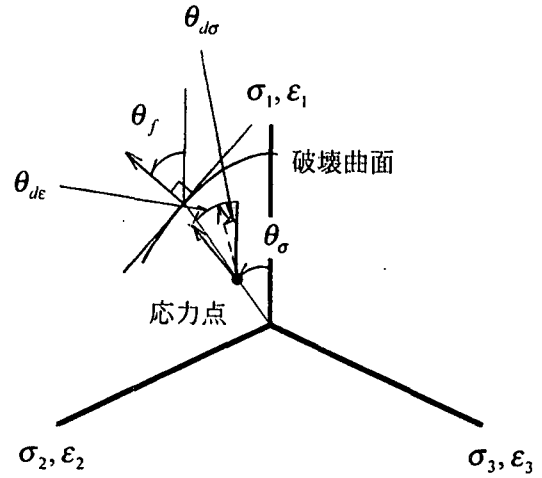


図-10 主偏差ひずみ増分比の主偏差応力増分依存性

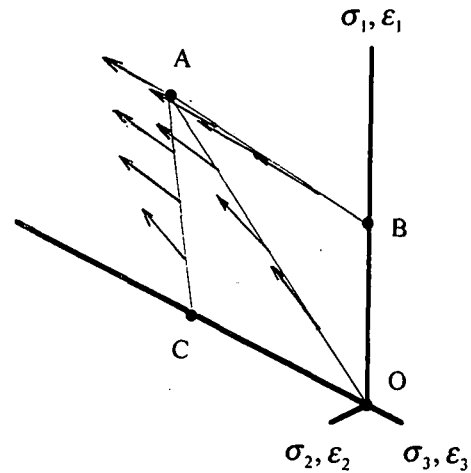


図-11 提案式による主偏差ひずみ増分単位ベクトル

力比、 $(\dot{q}/p)_f$ は破壊時の修正応力比を表す。

ここでは、図-11に示すような放射線状応力経路OA（ b 値が一定）と、 b 値が0.0から0.5まで変化する応力経路BA、更に b 値が1.0から0.5まで変化する応力経路CAについて、提案する式(13)を用いて得られる主偏差ひずみ増分比（主偏差ひずみ増分方向）を単位ベクトルとして図-11に示した。なお、 θ_f は、 b 値が0.5一定の場合の実験値を用いた。図-11の応力経路は、孫、松岡⁷⁾の実験結果と同じものではないので十分な比較はできないが、主偏差ひずみ増分方向の主偏差応力増分方向（応力経路）依存性の傾向が表せている。

5. 結論

従来、固定された b 値あるいは狭い b 値の範囲において、共軸性という限られた条件下でのみ主応力比と主ひずみ増分比の関係が論じられることが多かったが、ここでは、中空ねじりせん断試験装置を用いて、 b 値ならびに非共軸性の影響をも統一的に考慮することを試みた。既に、初期横等方性材料のもとで、3種類の b 値(0.25, 0.5, 0.75)については、初期横等方性の指標である β にさほど依存せず b 値に大きく影響を受けること、また、 b 値一定のもとでの単調載荷、繰返し載荷、主応力軸回転等の載荷条件にも影響を受けないことを明らかにしているが、ここでは、更に、次のような結論を得た。

(1) 等方弾性時における関係式から明らかのように、初期横等方性材料においても、主偏差ひずみ増分比は、 π 面上で主偏差応力比を一義的に表す b 値ではなく、 π_{d0} 面上での主偏差応力増分比を示す b_{d0} 値に基本的に依存する。

(2) 従来、提案されている主応力比と主ひずみ増分比の関係式の多くは、限られた b 値のもとで得られたものであるが、任意の b 値を対象とした場合、主偏差ひずみ増分比の主偏差応力増分比依存性という基本的な関係に着目すると、偏差ひずみ成分と体積ひずみ成分を分けて考えたほうがより統一的に扱える可能性がある。

(3) 等方弾性時には、主偏差ひずみ増分比は b_{d0} 値によって一義的に定まるが、破壊に近づくに従い、等方弾性時の主偏差ひずみ増分比から、徐々に別の主偏差ひずみ増分比である一定値に移行する。

(4) 主偏差ひずみ増分比は、主偏差応力増分比、ならびに破壊時の応力比で正規化した正規化応力比との線形関数で表されると提案し、その有効性を確認した。

謝辞：本研究では、実験に関して東北大学の吉田剛氏(現・日立製作所)に多大な御協力を頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Rowe, P.W. : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. Royal. Soc., London, Series A*, Vol.269, pp.500-527, 1962.
- 2) Tatsuoka, F., Sakamoto, M., Kawamura, T. and Fukushima, S. : Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures, *Soils and Foundations*, Vol.26, No.1, pp.65-84, 1986.
- 3) Lade, P.V. and Duncan, J.M. : Cubical triaxial tests on cohesionless soil, *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, Vol.99, No.SM10, pp.793-812, 1973.
- 4) 宮森建樹：多軸応力状態における砂のせん断強さと変形特性，土木学会論文報告集，No.255, pp.81-91, 1976.
- 5) 松岡元，孫徳安，譽田孝宏：セメント混合砂の3主応力制御試験結果とその統一的解釈，土木学会論文集，Vol.475/Ⅲ-24, pp.119-128, 1993.
- 6) Yong, R.N. and McKeys, E. : Yield and failure of a clay under triaxial stresses, *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, Vol.94, No.SM1, 1971.
- 7) 孫徳安，松岡元：単調載荷時の3次元応力下の c ， ϕ 材料の簡単な構成式，第29回土質工学研究発表会，pp.523-526, 1994.
- 8) Miura, K., Miura, S. and Toki, S. : Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation, *Soils and Foundations*, Vol.26, No.1, pp.36-52, 1986.
- 9) Gutierrez, M., Ishihara, K. and Towhata, I. : Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.4, pp.121-132, 1991.
- 10) 鈴木輝一，菅野高弘，吉田剛，柳澤栄司：砂の排水せん断変形挙動に及ぼす中間主応力の影響，土木学会第48回年次学術講演会，Ⅲ-412, pp.878-879, 1993.
- 11) 鈴木輝一，菅野高弘，柳澤栄司：初期構造異方性を有する砂の排水時せん断挙動特性，土木学会論文集，Vol.481/Ⅲ-25, pp.117-124, 1993.
- 12) 中田幸夫，安福規之，村田秀一，兵動正幸，永島剛圭：主応力方向固定条件下における異方性砂の非排水・排水せん断，土木学会論文集，No.511/Ⅲ-30, pp.209-220, 1995.
- 13) 佐藤研一，安原一哉，樋口徹，吉田信夫：密な砂の非排水繰返しせん断挙動に及ぼす主応力方向角の影響，土木学会論文集，No.541/Ⅲ-35, pp.199-213, 1996.
- 14) 鈴木輝一，柳澤栄司：初期横等方性を有する砂の構成則の定式化，構造工学論文集，Vol.44A, pp.391-398, 1998.
- 15) 朴春植，神明進，龍岡文夫，澁谷啓：平面ひずみ圧縮試験による Silver Leighton Buzzard sand の変形・強度特性の異方性，第25回土質工学研究発表会，pp.439-442, 1990.

(1999年4月23日受付)