

応力依存型散逸関数を用いた構造を有する砂の弾塑性構成式

An Elasto-plastic Constitutive Model for A Structural Sand
with A Stress Dependent Dissipation Function木山 正一^{*}, 塚田 泰博^{**}, 田中 史也^{***}, 青山 咸康^{****}

Shoichi KIYAMA, Yasuhiro TSUKADA, Fumiya TANAKA, Shigeyasu AOYAMA

^{*}正会員 博 (農) 京都大学大学院助手 農学研究科(〒600-8502 京都市左京区北白川追分町)^{**}非会員 京都大学大学院 農学研究科修士課程(同上)^{***}学生会員 京都大学大学院 農学研究科修士課程(同上)^{****}正会員 農博 京都大学大学院教授 農学研究科(同上)

An approach to the elasto-plastic constitutive modeling of structural sands is presented. The hardening parameter expressible of the degeneration of structure is macroscopically defined for normally consolidated and overconsolidated states of sands. The constitutive model is formulated from the stress dependent dissipation function within the framework of the thermomechanical principle. The sub-loading surface model is applied in order to describe the soil behavior of the overconsolidated state. The proposed model is verified with the triaxial tests of a sand.

Key Words : *structural sand, degeneration of structure, stress dependency dissipation function, sub-loading surface model*

1. はじめに

構造をもつ土とは、巨視的領域で練返し土が有し得ない高間隙比状態で存在可能な土のことを指す。Atkinson and Bransby¹⁾は、この練返し粘土の正規圧密曲線の上領域を不可能領域と呼んでいる。また松尾²⁾、中野ら³⁾は、この種の高間隙比状態が泥岩砕石土の二重構造によっても与えられることを指摘している。本研究では緩詰め状態で自立存在可能な砂に着目する。その構造を有する砂の巨視的力学において、体積変化時に生じる構造の低位化が応力～ひずみ関係に与える影響を実験的および理論的に考察する。

ところで非常に緩い砂の場合、構成する砂粒子の集合体が練返されない状態で与えられるため、緩いほどに高位の構造をもつと考えることができる。この高位の構造は締固めの程度で不可逆的に壊され、土はいわば塑性的な力学的振舞いをするようになる。つまり砂の初期間隙比差も塑性によって評価されるべきである。

構造をもつ土の弾塑性構成式に関する研究として、浅岡ら⁴⁾は上負荷面 Cam-Clay モデルを提案し、中野ら⁵⁾、野田ら⁶⁾によって水～土骨格連成解析へと発展されている。これは松尾²⁾のいう不可能領域に上負荷面を設定し、限界状態応力比 M より低応力比域 $M_s < q/p' < M$ において塑性軟化則を導入するものである。この場合、土は変

形の進行に伴い最終的に練返し土に還元されると考えている。

ところで構造砂と言及していないが、武馬ら⁷⁾は広範囲の密度下にある豊浦砂の体積圧縮特性を表すためにパラメータ m (定数)を導入、 $e - \log(t_n + m)$ 関係の直線性があることを指摘し、限界状態理論に基づいた弾塑性構成式を提案している。さらに、星川⁸⁾らは密な砂が示す体積膨潤挙動を表現するために、橋口^{9), 10)}の提案する下負荷面モデルを適用し、砂の弾塑性応答の予測精度を向上させている。

本研究の目的は構造をもつ砂の弾塑性構成式を提案し、構造の消失および低位構造への遷移によって発現する砂の変形特性を考察することにある。そこで武馬ら⁷⁾、星川ら⁸⁾の提唱する砂の体積圧縮特性を表すパラメータ m を硬化パラメータ c と改めて定義し直し、塑性変形によって低位化する一連の構造変化を記述することにする。この場合、浅岡ら⁴⁾の提案する上負荷面 Cam-Clay モデルとは異なり、塑性仕事によって生じる散逸エネルギーが応力状態量に依存すると仮定を設ける。この場合、必然的に熱力学の第2法則を満足する条件下で導出される構成式は非関連流動則となる。この弾塑性構成式の熱力学的解釈は Collins & Houlsby¹¹⁾ によって報告されており、例えば拘束圧依存型散逸関数からは Drucker-Prager 則が得られる。以下に提案する構造砂の弾塑性

構成式は応力比依存型散逸関数から導かれることになる。これは構造を有する緩い砂ほど内部摩擦角が低下する実験事実を反映させた事項である。そこで提案する硬化パラメータ c は散逸過程において応力比に依存する程度を表すという熱力学的解釈を与えることで、実験挙動の特徴づけを図る。結局のところ、硬化パラメータ c は構造を反映した一物理量として定義される。

また硬化パラメータ c は変形によって構造が低位化するように塑性ひずみの単調減少関数と仮定する。これは圧縮によって構造が壊され、より緻密な力学的に安定した状態へと遷移することを数学的に表現している。ただし、全ての砂が圧密せん断によって構造を完全に消失して繰返されるとは限らないとし、最も低位な基底構造を定義した。これは、豊浦砂においてCam-clay挙動が見られず、準定常状態が示されること¹²⁾を考慮するためである。なお基底構造は緩い砂がもつ嵩張った土粒子構造を最小化したものであるから、基底構造をもつ土は力学的に最も安定と考えることができる。さらに硬化パラメータ c はその関数形に依存して、剛性が変形中に高まる場合や一時的に低剛性化する場合も与えられる。後者は粒子破碎によって一時的に低下する剛性を特徴づけられると考えられる。そして緩密な砂のダイレイタンシー特性を表すためには橋口^{9), 10)}の下負荷面が有効であると適用する。

弾塑性構成式の定式化にあたっては実験室レベルで構造を有する砂供試体を作製し、一次元圧密試験、平均主応力一定試験および等方圧密非排水三軸圧縮試験を行った。これらから締固めや圧密せん断時に生じる構造の変化、液状化と構造の関係を検討する。用いた砂の三軸非排水せん断試験挙動を用いて提案する弾塑性構成式の妥当性を検証する。

2. 構造を有する砂の変形特性

用いた材料は蔵王ダムコア材から採取した細砂分で、密度 $G_s=2.687\text{g/cm}^3$ 、平均粒径 $D_{50}=0.2297\text{mm}$ である。また砂の最大・最小密度試験結果は、 $e_{\max}=1.056$ 、 $e_{\min}=0.7289$ である。構造をもつ砂は材料を含水比7.5%に調整し水とよくなじませた後、MP法¹²⁾に従って所望の初期間隙比 e_i をもつ三軸供試体($\phi 50\text{mm} \times h 125\text{mm}$)を作製した。ただし供試体には二重負圧法を施し、147kPaの背圧にてB値が0.95超の飽和条件を獲得した状態で初期間隙比を計測している。

実験を行った供試体の初期間隙比は主に6種類である($e_i=1.342, 1.165, 1.04, 0.945, 0.850, 0.74$: 順に状態A, B, C, D, E, Fとする)。供試体の作製方法によって $e_{\max}$ より遥かに大きな間隙構造をもつ砂が作製され得ることがわかる。最も高位の構造は初期間隙比が1.342であった。以上の初期間隙比の供試体について等方圧密非排

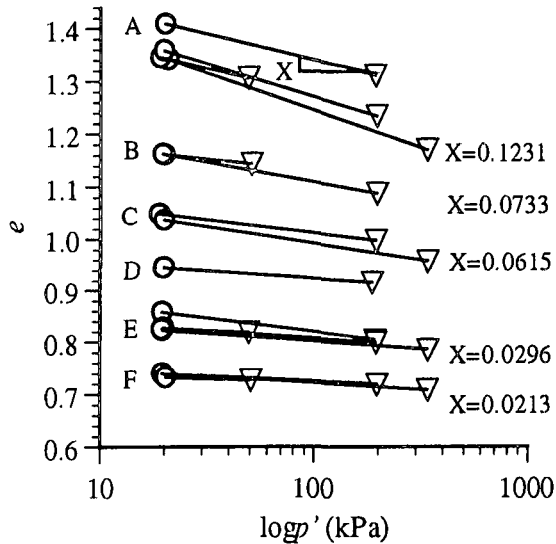


図-1 構造を有する砂の体積圧縮率

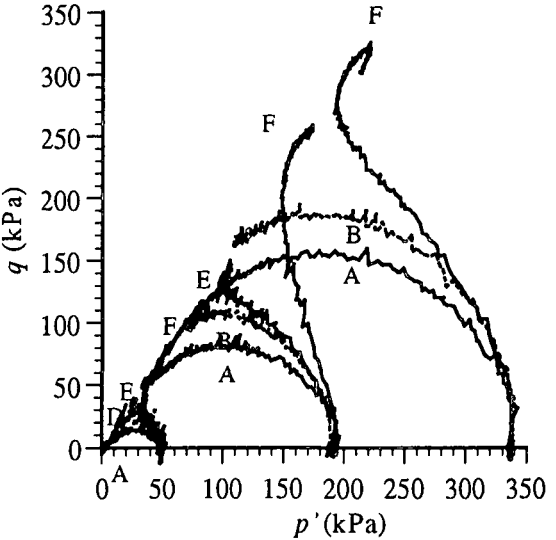


図-2 構造を有する砂の非排水せん断時の有効応力径路

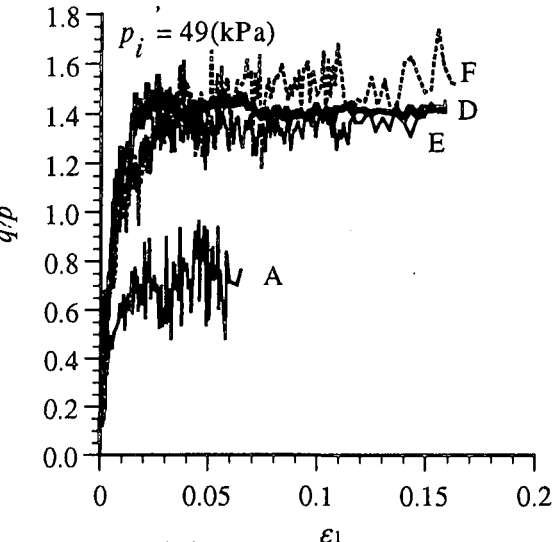


図-3 構造を有する砂の非排水せん断時の応力比-軸ひずみ関係

水せん断試験を行った。なお圧密時間は3時間であり、適用した拘束圧は49, 196, 343kPaである。以上の圧密時間において時間依存性挙動は見られず、所定の拘束圧範囲内で粒子破碎を生じないことは確認済みである。さらに最高位の構造を有する砂については各拘束圧にて平均主応力 p' 一定試験も行った。

2.1 砂の等方圧縮特性

一般に砂の等方圧密時の $e - \log p'$ 関係は「非線形」であり⁷⁾、Cam-Clayモデル¹³⁾のような練返し土の線形性は成立しない。この事実は用いた砂についてもあてはまる。特に留意すべきは、各供試体の体積圧縮率 X が初期間隙比に依存して変化することである(図-1)。つまり砂質土は供試体作製方法に依存して複数の間隙比をとり得るため、構造の発達の程度に応じた体積圧縮特性を記述できる硬化パラメータを定義することが重要である。ここでは武馬ら⁷⁾が提案する $e - \log(t_n + m)$ 関係で現れる材料パラメータ m を硬化パラメータ c として改めて定義する。これは一定値 m では取りうるの間隙比を持つ土の構造は表せないと考えられる。そのため、ある構造の発現の程度は塑性履歴に応じて可変なパラメータ c を用いる方が妥当とし、構造は変形過程で不可逆的に失われ低位化すると考える。ここで t_n は松岡・中井¹⁴⁾の提案する修正応力で、空間滑動面で定義される。ここでは空間滑動面で定義される修正応力は用いず、正八面体応力面で定義される応力 s_{ij} を用いた。パラメータ c の塑性硬化則は後の構成式で詳述する。

2.2 非排水せん断挙動

初期間隙比 $e_i = 1.342, 1.165$ の供試体は拘束圧49kPaにて非排水せん断されるとゼロ有効応力となり液状化を呈した(図-2)。このうち最高位構造をもつ供試体(状態A)では最大応力比が0.8程度の最低値をとった(図-3)。つまり高位構造を残す土ほど内部摩擦角が低減し、これは浅岡ら³⁾がモデル化する際に挙げた留意点と一致する。ここでは硬化パラメータ c を降伏関数に導入することにより同等の評価を可能にする。

次に、図-2から初期間隙比 $e_i = 0.850$ 程度の供試体(状態E)では拘束圧49, 196kPaでの非排水せん断において、有効応力径路は練返し土の示すCam-Clayモデル¹³⁾の場合と酷似している。つまり、適当な締固めによって砂の構造が完全に失われ、蔵王砂が練返された正規圧密状態にあることが示唆される。つまり完全に練返された土は $c = 0$ で与えられ、Cam-Clayモデル¹³⁾に帰着すると考えられる。この概念は浅岡らの上負荷面Cam-Clayモデルと一致する。ただし、砂質土が全て構造を失い練返されるとは限らない。例えば豊浦砂では適当な間隙比で準定常状態(QSS)に相当する挙動が一般に観

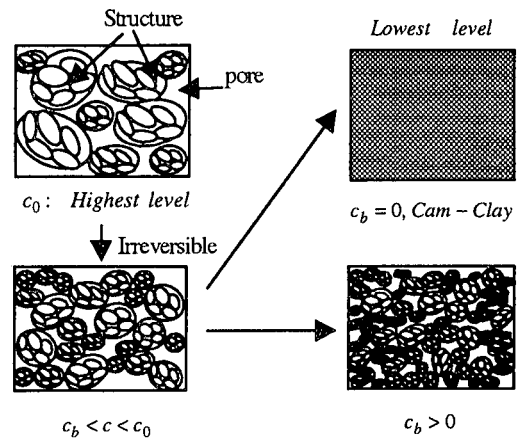


図-4 構造の低位化過程と基底構造

測されている(Ishihara¹²⁾)。このとき、基底構造は $c_b > 0$ となる。一方、蔵王砂は一連の非排水せん断試験で準定常状態を示さない(図-2)。この実験事実から、硬化パラメータ c は基底値 $c_b = 0$ をもつと考えられる。一連の土構造の低位化は、硬化パラメータが塑性体積ひずみの単調減少関数とすることで定義すればよいことになる(図-4を参照)。

3. 散逸関数と弾塑性構成式

固体力学を熱力学状態に基づいて物理的解釈を施し、エントロピーを表す一般化散逸関数により砂の弾塑性モデルを誘導する。散逸関数の定式化は、固体の非均質性を考慮し、局所状態の原理によって行われる。散逸関数の状態変数はZiegler and Wehrli¹⁵⁾によって内部状態変数で与えられ、塑性の関連流動則が導かれた。最近ではCollins & Housley¹¹⁾がさらにひずみという外部状態変数を考慮し、より一般化した散逸関数を与えることで、塑性の非関連流動則が熱力学の第2法則を満足する条件下で導出可能な事を証明している。ここでは提案する弾塑性構成式が熱力学の解釈によって妥当であること、また定義した散逸関数の物理的意義を明らかにする。

3.1 非平衡熱力学からの一般化応力の導出

外力が作用すると、固体には非均質な応力と変形および温度分布が生じる。応力ベクトルや変位ベクトルは向きによって異なる値をもつため、それらはテンソルで表されることが必要となる。必然的に固体は非平衡状態にある。そこで物体内部の微小な領域は平衡状態であると、熱力学過程はこの平衡状態の連続的な継続によ

って実現されると仮定する。これを準静的熱力学における局所状態の原理と呼ぶ。局所状態の原理より熱力学の第1法則は微分形で次式で与えられる。

$$\dot{U} = \sigma : \dot{\epsilon} - \nabla \cdot h \quad (1)$$

ここで U : 内部エネルギー、 h : 境界を通じて流入する熱流束である。次に熱力学第2の法則の局所形は、非平衡状態にある連続体の非可逆エントロピー $\dot{s}$ は次式で与えられる。

$$D \equiv T\dot{s}^i = T\dot{s} + \nabla \cdot h - \frac{h \cdot T \bar{\nabla}}{T} \geq 0 \quad (2)$$

ここで s : エントロピー、 T : 温度である。等温過程を考えると物体内部の散逸仕事 D が非負となる($D \geq 0$)。固体の内部エネルギーはひずみ ϵ 、エントロピー s と内部状態変数 α で与えられる。

$$U = U(\epsilon, \alpha, s) \quad (3)$$

内部状態変数は一般に履歴に依存し、物体内部の微視的な構造変化をも表現する状態変数を指す。ここでは熱力学的ひずみを表す。Legendre 変換を満足する Helmholtz の自由エネルギー Φ とその双対関係は次式となる。

$$\Phi = \Phi(\epsilon, \alpha, T), \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad s = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (4)$$

$$\Phi = U - Ts \quad (5)$$

式(4)、(5)を時間微分し式(1)に代入し、等温過程 $\dot{T} = 0$ を仮定すれば次式が成立する。

$$\sigma : \dot{\epsilon} = \dot{\Phi} + D, \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \quad (6)$$

ここで一般に散逸関数はひずみとその速度および内部状態変数とその速度で与えられるが、ひずみ速度は粘性として寄与する(Ziegler and Wehrli¹⁵⁾)。ここでは弾塑性問題に限定するため次式が定義できる。また非時間依存条件として散逸関数は $\dot{\alpha}$ の一次同次関数でなくてはならない。

$$D = D(\epsilon, \alpha, \dot{\alpha}) = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} : \dot{\alpha} \quad (7)$$

式(6)、(7)より次式の関係を得る。

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}, \quad D = \chi : \dot{\alpha}, \quad \chi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \quad (8)$$

ここで σ が真の応力であるのに対して χ を一般化応力と呼ぶ(Collins & Houlsby¹¹⁾)。つまり χ は熱力学的ひ

ずみを引き起こす一般化された応力を意味し、それによる仕事は非負である。結局散逸関数がひずみに依存する場合、外部状態変数であるひずみを生じさせる真の応力との構成関係を考慮すれば、散逸関数は真の応力依存形として定義されることになる。以下に提案する構造を考慮した構成式は、応力依存型であるより一般化された散逸関数から誘導される一降伏関数に基づいて定式化される。また土の限界状態理論のための Helmholtz の自由エネルギー Φ を付録Aで補足する。

3.2 降伏曲面の誘導と塑性流動則

Legendre 変換が散逸関数 D との間に成り立つ関数 Γ を考える。関数 Γ は一般化応力空間で定義されることとなり、ひずみが真の応力で変換できることを考慮すると次の関係が成り立つ。

$$D(\sigma, \alpha, \dot{\alpha}) + \Gamma(\sigma, \alpha, \chi) = \chi : \dot{\alpha} \quad (9)$$

$$\chi = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}}, \quad \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Gamma}{\partial \chi}, \quad \dot{\lambda} > 0, \quad \Gamma(\sigma, \alpha, \chi) = 0 \quad (10)$$

ここで $\dot{\lambda}$: 塑性乗数である。関数 Γ は降伏曲面関数を与えるので、それを F とする(Collins & Houlsby¹¹⁾)。いま散逸に寄与する内部状態変数は塑性ひずみとその速度であるから($\alpha = \epsilon^p$, $\dot{\alpha} = \dot{\epsilon}^p$)、塑性流動則が一般化応力空間において次式で定義されることが明らかとなる。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \chi} \quad (11)$$

一般化応力空間と真の応力空間との間にある変換則が成立すれば、降伏曲面関数は真の応力のみを用いて次式で与えることができる。

$$\bar{F}(\sigma, \alpha) = F(\sigma, \alpha, \chi(\sigma)) \quad (12)$$

式(12)を真の応力で微分すると次の関係が導かれる。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \quad (13)$$

式(13)を考慮すれば式(11)の塑性流動則は真の応力空間で与えられる。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma} - \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (14)$$

ここで g は塑性ポテンシャル関数である。この結果、真の

応力空間において定義される降伏関数 $\bar{F}$ と塑性ポテンシャル関数 g は一致しない。つまり非関連流動則を導出した。

$$\bar{F} \neq g \quad (15)$$

この非関連流動則は応力依存型散逸関数を定義することで得られた。仮に散逸関数が応力非依存型であり、かつ一般化応力が真の応力と等しければ、関連流動則が導出される。つまり散逸関数が内部状態変数のみで与えられるとき、関連流動則を得る。

$$D = D(\alpha, \dot{\alpha}), \chi = \sigma, \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (16)$$

式(16)で与えられる散逸関数はひずみに依存せず、式(17)の散逸関数に比べより限定された条件にあることがわかる。結局、散逸関数の定義次第で弾塑性構成式の特徴が異なることがわかる。以下で提案する構成のための弾塑性構成式は、武馬ら⁷⁾の降伏曲面の特徴を生かした、ある一つの応力依存型散逸関数を定めることから始める。つまり、構造をもつ砂の散逸過程がひずみ(もしくは真の応力値)によって影響を受けると仮定する。この仮定は構成関係が拘束圧に依存して定まる材料の場合や、粘着力をもつ材料で Drucker-Prager 則を誘導する場合にも有効であると考えられる。

3.3 構造をもつ砂の弾塑性構成式

(1) 降伏曲面と塑性ポテンシャルの導出

散逸関数は応力に依存する場合、それは一般に次の多項式で与えることが考えられる。

$$D = \left(\xi + x_1 p' + x_2 q + x_3 \frac{q}{p'} + x_4 p'^2 + \dots \right) \Gamma(\epsilon_{ij}^p, \dot{\epsilon}_{ij}^p) \quad (17)$$

いま構造をもつ緩い砂ほど内部摩擦角が低減する実験事実を反映させるため、散逸が応力比に依存すると仮定する。その一つの散逸関数形として次式を定義する。

$$D = \left(\xi + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right) \left(\alpha \sqrt{\dot{\epsilon}_v^p + M^2 \dot{\epsilon}^p} + \beta \dot{\epsilon}_v^p \right) \quad (18)$$

ここで M : 限界状態での応力比、 e^p : 塑性偏差ひずみ、

ϵ_v^p : 塑性体積ひずみである。

式(18), (10)より一般化応力不変量 χ_p, χ_q が求まる。

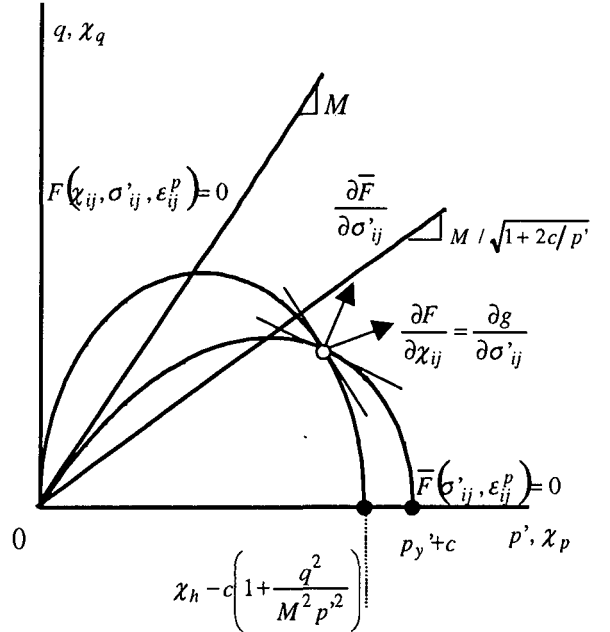


図-5 真の応力空間と一般化応力空間での降伏曲面

$$\chi_p = \left(\xi + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right) \left[\frac{2\alpha \dot{\epsilon}_v^p}{\sqrt{\dot{\epsilon}_v^p + M^2 \dot{\epsilon}^p}} + \beta \right] \quad (19)$$

$$\chi_q = \left(\xi + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right) \frac{2\alpha M^2 \dot{\epsilon}^p}{\sqrt{\dot{\epsilon}_v^p + M^2 \dot{\epsilon}^p}} \quad (20)$$

降伏曲面は式(9)より真の応力、一般化応力および塑性ひずみで構成され、塑性ひずみ速度は含まれないことを条件に誘導される。つまり、降伏曲面は式(19), (20)の塑性ひずみ速度を消去すれば得られる。

$$\begin{aligned} F(\chi, \sigma, \epsilon_v^p) &= M^2 \left\{ \chi_p - \beta \left(\xi + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right) \right\}^2 + \chi_q^2 \\ &= \alpha^2 M^2 \left(\xi + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで $\alpha = \beta = 1/2$, $\xi = \chi_h(\epsilon^p)$, $\mu = -c(\epsilon^p)$ とすれば、降伏曲面関数 F が一般化応力空間で楕円型として与えられる(式(22))。ここで c, χ_h は硬化パラメータである。

$$F(\chi, \sigma, \epsilon_v^p) = \chi_p \left(1 + \frac{\chi_q^2}{M^2 \chi_p^2} \right) + c(\epsilon^p) \left(1 + \frac{\mu q^2}{M^2 p'^2} \right)$$

$$-\left\{\chi_h(\varepsilon_v^p) + c(\varepsilon^p)\right\} = 0 \quad (22)$$

いま一般化応力空間と真の応力空間との間に恒等変換が成立するとし(付録Aを参照)、 $\chi_h = p_y'$ とすれば真の応力空間での降伏関数は次式で与えられる。一般化応力空間と真の応力空間での降伏曲面図を図-5に示す。

$$\bar{F} = (p' + c) \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p'^2} \right) - (p_y' + c) = 0 \quad (23)$$

この場合、式(14)を満足する塑性ポテンシャル関数は、次式で与えればよいのは明らかである。

$$g = p' \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p'^2} \right) \quad (24)$$

結局提案する弾塑性構成式は、散逸が応力比の2乗に比例して生じるという物理的意義の下で構築された。この見解は実験から示されるような、高位の構造を有する砂ほど低応力比状態で最大偏差応力を取り、また低応力比で液状化に至る事実を説明するためである。実際提案する式(23)の降伏曲面において、より高位の構造を有すると c 値はより大きくなると設定することで、式(25)から明らかに降伏曲面の頂点はより低応力比で与えられる。この結果、高位の構造を有する土ほど限界状態以前(塑性体積ひずみが圧縮側)に真の応力空間において $\partial \bar{F} / \partial p' < 0$ となる領域が増えることで、非排水せん断せん断強度の低減化が表現可能となる。つまり定義した構造パラメータ c は、散逸力学における応力比依存性の程度を支配することになる。

$$\frac{q}{p'} \bigg|_{\frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} = 0} = M \sqrt{\frac{p'}{p' + 2c}} \leq M \quad (25)$$

また構造が完全に消失すると $c = 0$ 、つまり応力非依存型散逸関数になるので降伏曲面は修正 Cam-Clay モデル型¹³⁾に帰着する。なお緩い砂の変形特性は、式(23)で与えられる構造を考慮した正規降伏曲面によって反映される。一方で基底構造を有する密な土には橋口^{9), 10)}の下負荷面 F_s に硬化パラメータ $c, p_c' (< p_y')$ を用いて定義する。これによって密な土に見られる正のダイレイタンシー挙動を表すことにする。

$$\bar{F}_s = (p' + c) \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p'^2} \right) - (p_c' + c) = 0 \quad (26)$$

正規降伏曲面および下負荷面の塑性硬化則については後で述べる。

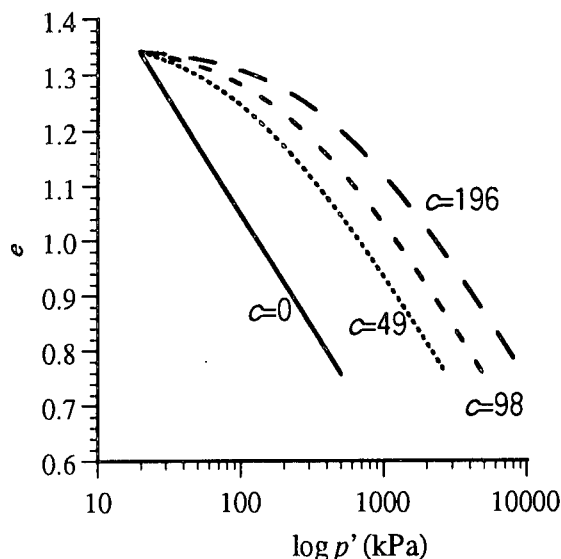


図-6 異なる初期構造を有する土の K_0 圧密時の体積圧縮挙動

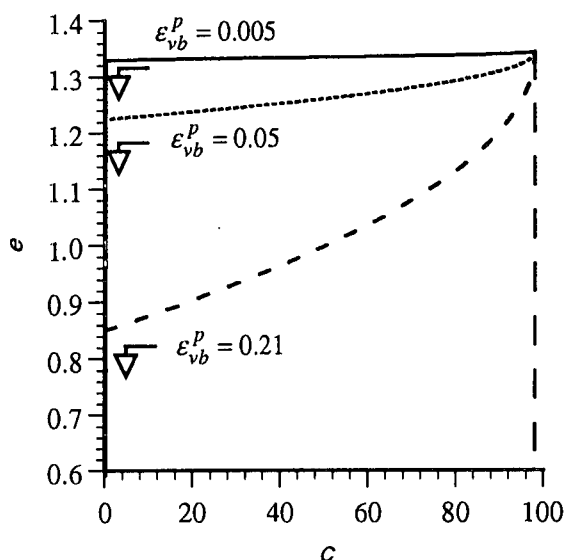


図-7 構造の低位化率

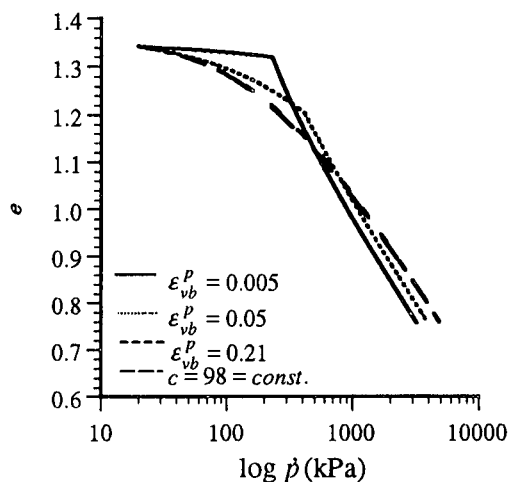


図-8 異なる構造低位化率が土の K_0 圧密時の体積圧縮に与える影響

(2) 体積圧縮による塑性硬化

構造を考慮した正規圧密土は、武馬ら⁷⁾が提案する $e - \log(t_v + m)$ 関係の直線性を適用し次式で与える。

$$d(p_y' + c) = \frac{(p_y' + c)(1 + e_i)}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_v^p \quad (27)$$

ここで e_i : 初期間隙比, λ : 圧縮指数, κ : 膨潤指数である。
 c は構造を表す硬化パラメータである。

(3) 構造の低位化則

構造は塑性体積圧縮で壊され、低位の構造へと遷移すると考える(2.2 節を参照)。つまり、 c は塑性体積ひずみの単調減少関数とする。ここでは土固有の最高位な構造 c_0 が基底構造 c_b に還元される過程を次式で定義する。

$$dc = \frac{-2(c_0 - c_b) \int \|d\varepsilon_v^p\|}{\varepsilon_{vb}^p} \|d\varepsilon_v^p\|, \quad \int \|d\varepsilon_v^p\| < \varepsilon_{vb}^p$$

$$dc = 0, \quad \int \|d\varepsilon_v^p\| \geq \varepsilon_{vb}^p \quad (28)$$

ここで ε_{vb}^p は最高位構造 c_0 が基底構造 c_b へと遷移するのに要した塑性体積ひずみを表す。材料パラメータ ε_{vb}^p , c_0 , c_b の決定法については 5.1 節に述べる。また構造の低位化モデルの特性については 4 章に示す。

(4) 下負荷面の発展則

応力点が正規降伏曲面上にある土が弾性除荷を受けるとその土は過圧密状態になる。過圧密土の弾塑性応答は橋口^{9), 10)}の下負荷面によって記述する。つまり正規降伏曲面と下負荷面間の相似則を考え、過圧密土の塑性変形が進行するとやがて正規降伏曲面と一致し相似比が 1 となる条件を課す。これを橋口^{9), 10)}は相似比 R の発展則と呼び次式で定義される。

$$R = \frac{p_c' + c}{p_y' + c}, \quad dR = U_s \sqrt{d\varepsilon_v^p{}^2 + de^p{}^2} \quad (29)$$

$$0 \leq R \leq 1, \quad R \rightarrow 1 \cap U_s \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0 \cap U_s \rightarrow \infty \quad (30)$$

ここでは関数 U_s を式(29)を満足するように次式で与える。
ここで φ : 材料定数である。

$$U_s = \varphi \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R} \quad (31)$$

(5) 硬化関数

正規降伏曲面の硬化関数 H_p は式(23)を全微分して次式

表-1 上負荷面 Cam-clay モデルと提案モデルの特徴

弾塑性モデル	上負荷面 Cam-clay モデル ⁴⁾	提案モデル
対象とするメカニズム	体積圧縮による構造の劣化	体積圧縮による構造の低位化(安定化)
構造を表すパラメータ	R^* (Cam-clay 降伏面の上負荷面に対する相似比)	C (散逸が応力比に依存する度合いを表す)
散逸関数	応力に依存しない	応力比に依存する
塑性流動則	関連流動則	非関連流動則
$q/p' < M$ 領域	ひずみ硬化 ($q/p' < Ms$), ひずみ軟化 ($q/p' > Ms$)	ひずみ硬化
最終応力比	$q/p'_f = M$	$q/p'_f \leq M$

で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'} : d\sigma' - d\Lambda H_p = 0, \quad d\Lambda > 0 \quad (32)$$

上に述べた塑性硬化則を考慮すると

$$H_p = \left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial (p_y' + c)} \frac{\partial (p_y' + c)}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_v^p} \left| \frac{\partial g}{\partial p} \right| \right\}$$

$$= H_{p(1)} + H_{p(2)} \quad (33)$$

$$H_{p(1)} = \frac{(p_y' + c)(1 + e_i)}{\lambda - \kappa} \frac{\partial g}{\partial p'} \quad (34)$$

$$H_{p(2)} = \frac{2(c_0 - c_b) \int \|d\varepsilon_v^p\|}{\varepsilon_{vb}^p{}^2} \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) \left| \frac{\partial g}{\partial p} \right|, \quad \int \|d\varepsilon_v^p\| < \varepsilon_{vb}^p{}^2$$

$$H_{p(2)} = 0, \quad \int \|d\varepsilon_v^p\| \geq \varepsilon_{vb}^p{}^2 \quad (35)$$

となり、構造をもつ砂は体積圧縮しながら基底構造に遷移するまでの間、ひずみ硬化するが(高剛性化)する。また、一旦基底構造になると $H_{p(2)} = 0$ となり、剛性が低下する現象が一時的に現れ、続く体積圧縮では $H_{p(1)}$ によって剛性が高まることになる。

(6) 弾性則

砂の弾性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ は、増分形で Hooke 則に従う

と仮定する。ここで *Lame* 定数 λ 、 μ はポアソン比 ν を用いて次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{1+e}{\kappa} p', \quad \mu = \frac{3(1-2\nu)(1+e)}{2(1+\nu)} p' \quad (36)$$

以上に提案する構造をもつ砂の弾塑性モデルと浅岡ら⁴⁾の提案する上負荷面 Cam-clay モデルを比較すると表-1 のようにまとめられる。

4. 構造の低位化モデルの特性

構造の低位化則は式(28)で与えられた。はじめに初期構造の違いと体積圧縮特性を考察する。以下では一次元圧密問題を考える。構造が基底化($c_b = 0\text{kPa}$)するのに要する体積ひずみを一定とし $\epsilon_{vb}^p = 0.21$ 、初期構造を $c_0 = 0, 49, 98, 196\text{kPa}$ の4通りとする。図-6から初期に高位な構造を有する砂ほど低拘束圧域での体積圧縮が乏しいことを意味する。

次に体積圧縮時に構造が全く壊れない材料や、構造は低位化するがその低位化率が異なる材料を想定する。これは構造の変化と剛性の関係を調べるためである。ここで考慮した材料パラメータは構造が低位化する場合 $c_0 = 98\text{kPa}$ 、 $c_b = 0\text{kPa}$ 下で $\epsilon_{vb}^p = 0.21, 0.05, 0.005$ の3通り、また構造が一定の場合は $c_0 = c_b = 98\text{kPa}$ とする。図-7に進行する塑性ひずみと式(28)から求まる構造の低位化を示す($c - e$:構造-間隙比関係)。このとき提案モデルから得られる $e - \log p'$ を図-8に示す。この結果、構造が全く変化しないあるいは変化しても体積変化に対して緩やか場合はあまり変化はみられない。徐々に剛性 H_p が大きくなっていく。一方で急速に構造が低位化する場合(例えば $\epsilon_{vb}^p = 0.005$)、基底構造に至るまではより高い剛性が発現するが、基底構造下では急激に剛性が低減して体積圧縮しやすくなっている(変曲点以降)。これは構造が低位化していく過程では体積圧縮により剛性が高まるものの、一旦基底構造に落ちてしまうと構造によるひずみ硬化がなくなるためと考えられる。結局この特徴は体積圧縮により構造が低位化すれば、 $dc < 0$ なので p_y' が増加するためである。

$$dp_y' = \frac{(p_y' + c)(1 + e_i)}{\lambda - \kappa} d\epsilon_v^p - dc \quad (37)$$

ところで基底構造がゼロでない砂であれば、下負荷面モデルの適用によって準定常状態が記述される。例えば非排水せん断において、構造が残れば限界状態応力比以前に最大軸差応力を取り、変形の進行とともに一旦軸差応力が低下する。さらに限界状態応力比を超えることで、体積膨潤によるひずみ硬化が進み軸差応力が増加するためである。この場合、 c_0 は非排水せん断時に準定常状態を呈する初期間隙比をもつ土より決定され

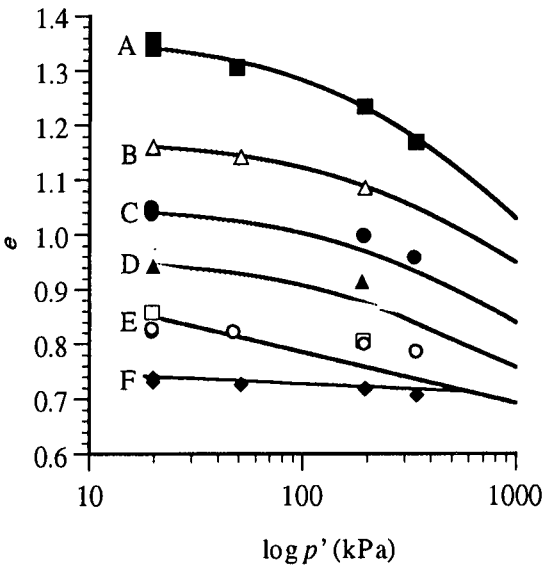


図-9 構造を有する砂の等方圧縮特性

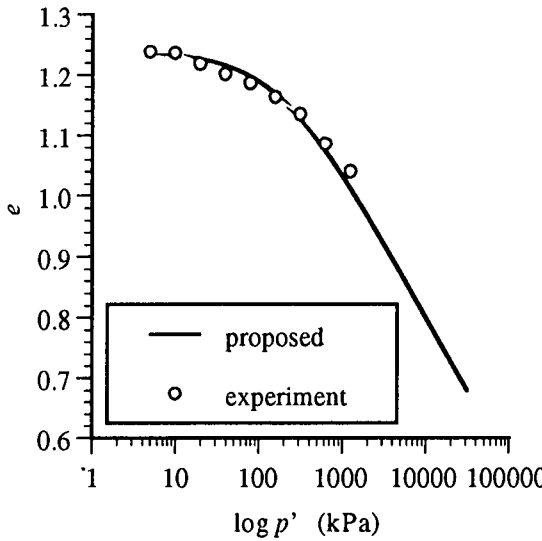


図-10 緩い構造を有する砂の K_0 圧密試験

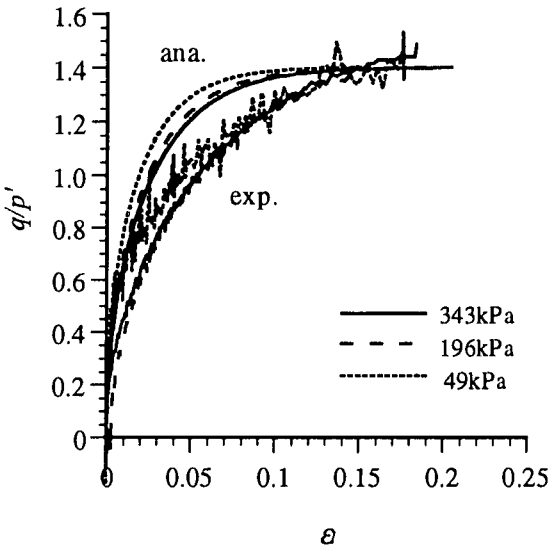


図-11 最高位構造を有する砂の p' 一定試験時の応力比-軸差ひずみ関係

る。 ε_{vb}^p が最高位の構造を有する砂と前述の準定常状態を呈する砂との初期間隙比差から決定され、 c_0 は有効応力経路にフィッティングするようによばれる。結局、構造を完全に失わない砂は準定常状態を示し、構造を完全に失う砂は準定常状態をもたないことが構造パラメータ c の導入によって明らかとなる。例えば前者が豊浦砂¹²⁾、後者が蔵王砂となるのは明らかである。

5. モデルの検証

提案する弾塑性構成式の妥当性を蔵王砂を用いた室内試験結果によって検討する。一次元圧密試験、等方圧密非排水せん断試験および平均主応力一定試験を取り上げる。

5.1 材料定数の決定

モデルに含まれる材料定数は $\lambda, \kappa, M, c_0, c_b, \varepsilon_{vb}^p, \varphi, \nu$ の 8 つである。このうち λ, κ, M は Cam-Clay モデル¹³⁾ と全く同様である。構造の低位化に関する材料定数 $c_0, c_b, \varepsilon_{vb}^p$ は次の様に決定する。最も緩い状態土の間隙比 e_0 を求める。初期間隙比を小さくしたとき、一定拘束圧下で非排水せん断試験を行うと体積膨潤によるひずみ硬化挙動が現れる。この間隙比近傍の緩い側の間隙比 c_b を求める。結局 ε_{vb}^p はこれらの間隙比差から決定される。

$$\varepsilon_{vb}^p = \frac{e_0 - e_b}{1 + e_0} \quad (38)$$

材料定数 c_0, c_b は確定した $\lambda, \kappa, \varepsilon_{vb}^p$ を上記モデルに代入し、例えば非排水せん断試験の有効応力経路とフィッティングさせて求められる。最後に下負荷面の材料定数 φ は最も密な砂の非排水せん断時の有効応力経路とフィッティングさせて決定した。このとき、初期過圧密比は以下のように求める。正規降伏曲面の硬化パラメータ p_y' はカムクレイ挙動を示す状態 E の $e - \log p'$ 直線 ($c=0$) と状態 F の $e - \log p'$ 直線の交点より定まる ($p_y' = 607 \text{ kPa}$)。 p_c' は拘束圧値で与えられ、状態 F の初期過圧密比 R は 12.3, 3.10, 1.77 と求まる (順に拘束圧が 49, 196, 343 kPa)。モデルの材料定数は表-2 の通りである。

5.2 等方圧密試験

図-9 は $e - \log p'$ 面での等方圧縮曲線を示している。ここで最も緩い砂から密な砂まで順に状態 A-F とする。状態 E は構造が完全に失われ Cam-Clay モデル¹³⁾ いう正規圧密状態に相当する。プロットされた実験値と実

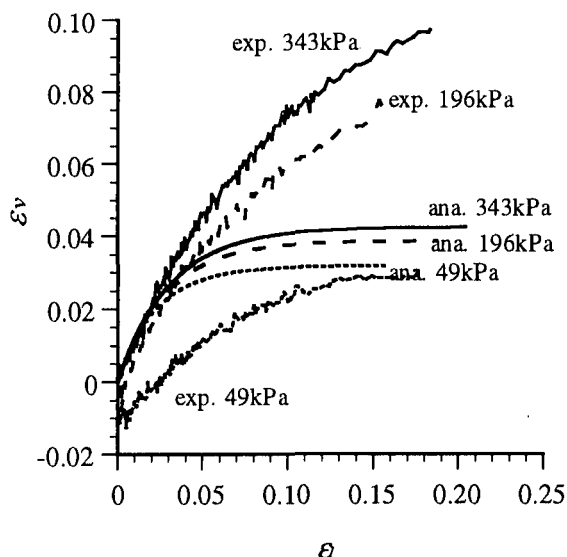


図-12 最高位構造を有する砂の p' 一定試験時の体積ひずみ-軸差ひずみ関係

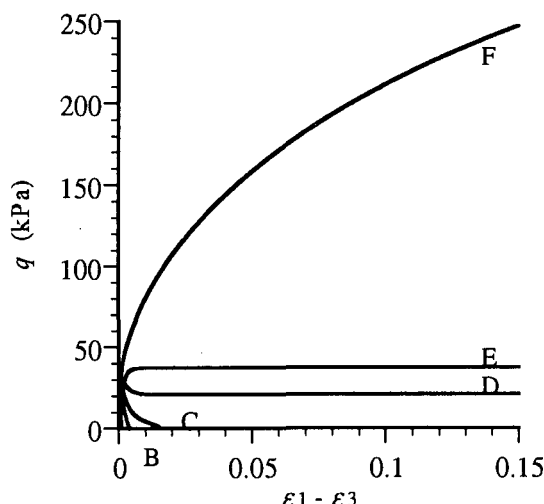


図-13 拘束圧 49kPa での非排水せん断時の軸差応力-軸差ひずみのモデル挙動

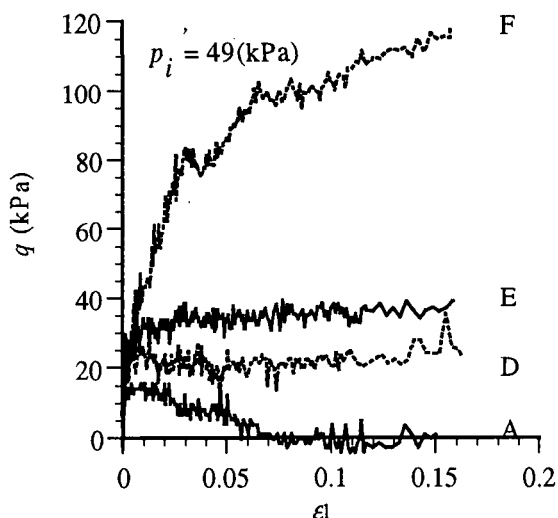


図-14 拘束圧 49kPa での非排水せん断時の軸差応力-軸差ひずみの実験挙動

線で表される解析値との間には良好なモデルの再現性がみられる。これは、構造の低位化を考慮した効果と考えられる。ただし構造が失われるほどに拘束圧 196, 343kPa での間隙比は過小評価されている。

5.2 一次元圧密試験

初期間隙比 $e_i = 1.238$ の砂の標準圧密試験を考える。ここで初期載荷重を 4.9kPa、初期 K_0 値を 0.487 とする。図-8 は実測値とモデル予測値を $e - \log p'$ 面に示したものである。モデルは実測値をよく評価できていることがわかる。つまり、モデルによって応力比一定状態での体積圧縮特性が等方応力状態以外でも表現できた。

5.3 平均主応力一定載荷試験

最高位構造を有する砂 $e_i = 1.342$ の平均主応力一定試験の応力比-軸ひずみ関係を図-11 に示す。実験結果に比べて予測値はより高い剛性を応力比全般において示している。等方圧密でのモデル挙動の精度が良いことから、応力比が変化する過程で剛性が低下する過程が十分にモデルに反映できなかったことを表していると考えられる。関連する体積ひずみ-軸ひずみ挙動において(図-12)、高拘束圧ほどより多くの体積ひずみが生じることは予測できているが、体積ひずみ絶対量は十分予測されていない。ただし高拘束圧ほど構造の低位化によって剛性が低下することはモデルの傾向として妥当に表されていると考えられる。また、低拘束圧下ではせん断初期に正のダイレイタンスーが実験において示されたが、提案モデルでは考慮されていない。

5.4 三軸非排水せん断試験

砂の緩密の状態を 5.2 で述べた等方圧密試験に従い、初期間隙比によって状態 A-F と分類する(状態 A:最も緩い、状態 F:最も密)。ここで、構造が全くない状態は状態 E で表される。はじめに拘束圧 49kPa で非排水せん断された砂の軸差応力-軸差ひずみ関係についてモデル予測値を図-13 に示す。緩い砂ほど微小な軸差ひずみで軸差応力は最大となり、液状化することが予測される(状態 B, C)。つまり、液状化は比較的高位の構造が残っている状態で生じることが示唆される。逆に最も密な状態では下負荷面^{9), 10)}によって弾塑性挙動が支配され、変形の進行に伴って他の状態には見られない大きな軸差応力を呈することがわかる。図-14 の実測値を比べると、全体の挙動はよく表されたといつて良い。ただし過圧密状態では最終せん断強度を過大評価している。

有効応力経路の予測を図-15 に示す。等しい初期間隙比状態をもつ砂でも、圧密によって失われる構造の程度によって有効応力経路が異なることが示唆される。例

表-2 モデルに用いた材料定数

Zaoh sand	
λ	0.125
κ	0.0296
M	1.400
c_0 (kPa)	98
c_b (kPa)	0
ε_{vb}^p	0.21
φ	30.0
ν	0.0

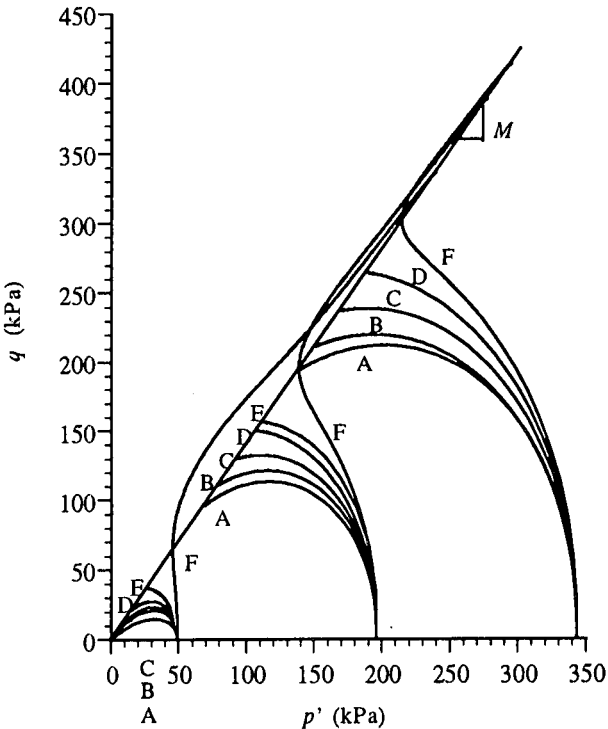


図-15 構造を有する砂の非排水せん断時の有効応力径路

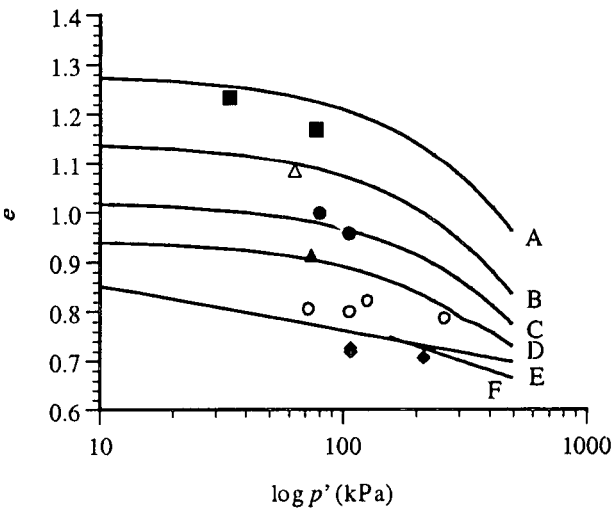


図 - 16 定常状態の実測値とモデル予測値

例えば状態 A では、高拘束圧ほど最大軸差応力に対する最終軸差応力の低減率が小さくなる。極端な場合、状態 A でも構造が失われれば、体積膨潤せずに定常状態に向かつて軸差応力は単調に増加することになる。また状態 F では下負荷面によって有効応力経路が与えるが過圧密比が大きいほど（低拘束圧ほど）体積膨潤が顕著となることがわかる。これら一連の予測は図-14 の実測値を概ねよく表現できていると考えられる。

5.5 砂の定常状態

構造をもつ砂の定常状態曲線は図-16 に示すように任意の初期間隙比の分だけ現れる。提案式から得られた定常状態曲線は、プロットした実験値を概して表現できていることがわかる。ただし過圧密状態 F ではせん断強度が過大に見積もられたため、状態 F の定常状態曲線は構造を失った正規圧密土 E のそれと交差する予測結果となった。そのため、過圧密比の非常に大きな砂の最終せん断強度の予測には課題が残る考えられる。

6 おわりに

構造という力学的概念が飽和砂の体積圧縮特性を説明するのに重要であることが示された。本研究では構造を有する砂の弾塑性挙動を定式化するために新たに構造の不可逆性を表す硬化パラメータ c を定義した。また提案モデルは武馬ら⁷⁾の $e - \log(p'+c)$ の概念および橋口の下負荷面^{9), 10)} の概念を導入し構築された。この構成式の妥当性が広範囲の間隙比や拘束応力の異なる砂の圧密非排水せん断時や平均主応力一定試験によって検証された。

<付録 A>

Cam-clay モデルの誘導時に定義される Helmholtz の自由エネルギーは次式で定義できる。ただし、内部状態変数は塑性ひずみで与えられる。

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{\kappa}{1+e} \exp\left(\frac{(1+e)(\varepsilon_v - \varepsilon_v^p)}{\kappa}\right) + \frac{3\mu}{2}(e - e^p)^2 \quad (A1)$$

このとき Gibbs の自由エネルギー G は真の応力とひずみに関する Legendre 変換（式(A2)）によって式(A3)で与えられる。

$$\Phi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) + G(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (A2)$$

$$G(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{\kappa}{1+e} p' (\ln p' - 1) + \frac{q^2}{6\mu} + p' \varepsilon_v^p + q e^p \quad (A3)$$

式(A2)によって、ひずみは Gibbs の自由エネルギーを真の応力で偏微分したもので定義される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial G(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (A4)$$

また式(A2)を全微分して式(A4)を考えれば、式(6)と等価となる。

$$\dot{\Phi} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (A5)$$

式(6)と比較して、式(A5)の左辺第2項が散逸エネルギーを表しているのは明らかである。土の限界状態理論の場合、式(A3)の Gibbs の自由エネルギーを塑性ひずみで偏微分して一般化応力が定義されることになる。

$$\chi_p = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_v^p} = p', \quad \chi_q = \frac{\partial G}{\partial e^p} = q \quad (A6)$$

一方、式(8)の関係から Helmholtz の自由エネルギーより一般化応力求めると次式となる。

$$\chi_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v^p} = -\exp\left(\frac{(1+e)(\varepsilon_v - \varepsilon_v^p)}{\kappa}\right), \quad (A7)$$

$$\chi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial e^p} = 3\mu(e - e^p)$$

式(A6)より、Cam-clay モデルでは一般化応力が真の応力と等しいことがわかる。

参考文献

- 1) Atkinson, J. H. and Bransby, P. L.: The mechanics of soils: an introduction to critical state soil mechanics, McGraw-Hill, 1978.
- 2) 松尾 稔: 飽和した常滑泥岩の吸水軟化現象に関する基礎的考察と地盤力学の課題, 第40回地盤工学シンポジウム発表論文集, pp.1-26, 1995.
- 3) Nakano, M., Asaoka, A. and Constantinescu, D., T.: Delayed compression and progressive failure of the assembly of crushed mudstones due to slaking, Soils and Foundations, Vol.38, No.4, pp.183-194, 1998.
- 4) 浅岡 顕・中野正樹・野田利弘: 「構造」を有した土の弾塑性モデルの一考え方, 第33回地盤工学研究発表会平成10年度発表講演集, pp.627-628, 1998.

- 5) 中野正樹・野田利弘・浅岡 顕: 「上負荷面カムクレイモデル」のせん断挙動, 第 33 回地盤工学研究発表会平成 10 年度発表講演集, pp.629-630, 1998.
- 6) 野田利弘・浅岡 顕・中野正樹: 「上負荷面カムクレイモデル」を用いた水-土連成解析による時間効果の計算, 第 33 回地盤工学研究発表会平成 10 年度発表講演集, pp.631-632, 1998.
- 7) 武馬雅志・中井照夫・赤堀智幸: 広範囲の密度および拘束応力下にある砂の構成モデル, 第 30 回土質工学研究発表会平成 7 年度発表講演集, pp.589-592, 1995.
- 8) 星川 拓哉・中井 照夫・檜尾 正也: 密度および拘束応力の変化を考慮した砂の構成モデル, 土木学会論文集, 第 596 号 / III-43, pp.153-162, 1998.
- 9) Hashiguchi, K.: Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol.102, pp.266-272, 1980.
- 10) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Structures*, Vol.25, pp.917-945, 1989.
- 11) Collins, I. F. and Hounsby, G. T.: Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.453, 1975-2001, 1997.
- 12) Ishihara, K.: Liquefaction and flow failure during earthquakes, *Géotechnique*, Vol.43, No.3, pp.349-416, 1993.
- 13) Roscoe, K. H. and Burland, J. H.: On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity* (J. Heyman and F.A. Lekie eds.), Cambridge University Press, pp.535-609, 1968.
- 14) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress, *Proc. JSCE*, No.232, pp.59-70, 1974.
- 15) Ziegler, H. and Wehrli, C.: The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function, *Adv. Appl. Mech.*, Vol.25, pp.183-238, 1987.

(1999 年 4 月 23 日受付)