

ディジタルフィルタを伴うシングルステップの時間積分法

Single Step Digital-Filtering Time-Integration Scheme

本田利器*・澤田純男**

Riki HONDA and Sumio SAWADA

*正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

A single step digital filtering time integration (SSDFTI) scheme that filters out high frequency noise by applying digital filter in the process of computation is proposed. The proposed scheme can realize adjustable algorithmic damping and it includes various time integration methods, such as the Newmark β method and the generalized α method, as its simplified form.

The proposed scheme uses two time series ("filtered time series" and "unfiltered time series"), and it realizes algorithmic damping by using digital filtering technique. Usage of digital filter enables employment of wider variety of algorithmic damping compared to that of existing time integration schemes. It is also possible to apply different filters for displacement, velocity and acceleration.

Dynamic analysis of a simple 2 DOF system which has a strong trend of divergence is conducted as a numerical example using the proposed scheme. The result shows that it can conduct accurate analysis eliminating the effect of high frequency noise.

The proposed scheme is not unconditionally stable, however, and further research is required about conditions for stable computation.

Key Words : time integration scheme, digital filter, computational stability, noise

1. はじめに

時間領域における動的解析においては、解析の発散の回避は重要な課題である。解の発散は、アルゴリズムが増加傾向の指数関数を含む等、強い発散傾向を持っている場合も含めて、一般に高周波のノイズがトリガとなって引き起こされる場合が多い。したがって、いわゆる減衰に相当する効果を加えることにより解析の発散を防ぐことができる。このようなアルゴリズムによる減衰効果を加えることにより安定な時間積分を可能にする手法は、多様に提案されてきている。

広く使われている Newmark の β 法¹⁾ (において β を適切に定めた場合) や、Wilson の θ 法²⁾ 等はこのような高周波成分を除去する減衰効果を持つ時間積分法である。さらに、アルゴリズムの中で与える減衰の振動数特性 (周波数特性) を可変にしたり、Newmark の β 法の一般化をはかるなどして、より効率のよい減衰をあたえることを可能としたアルゴリズムも提案されてきている。それらの例としては、Hilber らによる手法 (HHT 法)³⁾、Wood らによる α 法⁴⁾、Hoff, Pahl による θ_1 法^{5),6)}、Katona, Zienkiewicz による beta- m 法⁷⁾、及びこれらの手法を包含した定式化を与える Chung, Hulbert による generalized α 法⁸⁾ や、collocation 法⁹⁾ 等があげられる。これらの手法では、時間積分の計算過程に、Newmark の β 法における β に相当するようなパラメータを導入し、これを変化させることにより減衰の特性を変化させている。また、Houbolt 法¹⁰⁾ やこれを高精度化した Park 法¹¹⁾ 等も用いられる。

さらに近年では、Newmark の β 法において計算精

度の向上を図った手法¹²⁾ やより明確に、多様な周波数特性を実現可能な外部減衰を導入する手法¹³⁾ 等も提案されている。

このような背景に鑑み、筆者らは時間積分を行う過程においてディジタルフィルタ^{14),15)} により高周波成分を除去できる手法 (ここでは「DFTI 法」とよぶ) を提案した¹⁶⁾。DFTI 法は、基本的には上述の時間積分法とは異なる考え方に基づくものであり、高周波成分の除去は、時間積分の過程において作用させるディジタルフィルタによって行う。DFTI 法では、変位等の時刻歴を表す時系列として、仮想的に、フィルタリングされた時系列とフィルタリングされていない時系列という 2 種類を考慮することにより、様々な高次のフィルタを作用させることを可能にした手法であり、中央差分法や Newmark の β 法等の既存の種々の時間積分法と併用することが可能な手法である。DFTI 法では、時刻レベルを 1 段階進める過程において複数ステップ先の状態まで計算し、これによりディジタルフィルタの持つ遅延特性の影響を除いている。

本論文で提案する時間積分法は、DFTI 法を発展させた手法である。これは、高周波成分の除去をディジタルフィルタで行う点や、仮想的な 2 種類の時系列を用いる点は DFTI 法と同様であるが、時刻レベルを 1 段階更新するための計算手順を 1 ステップとした手法 (Single Step DFTI 法、以下「SSDFTI 法」と呼ぶ) である。

SSDFTI 手法においては、時間積分を Newmark の β 法と同様の手法で行っており、他の計算手法と併用して用いるものではない。本手法の定式化は、高周波成

分の除去をデジタルフィルタにより行うという考え方に基いてなされているが、最終的に得られる定式化は、既存の generalized α 法に包含される一連の時間積分法等をその一形態として包含するものとなっている。本手法は、定式化において過去の状態量のデータを用いる点では Houbolt 法や Park 法等とも類似している。しかし、これらの手法は原則として微分の差分表現に基づく定式化を与えるものであり、SSDFTI 法とは異なる考え方に基き、また、その定式化も異なるものである。

SSDFTI 手法では、運動方程式における変位、速度、加速度にそれぞれ異なる特性のフィルタを作用させることも可能である。また、SSDFTI 法では、時刻 $t = t_n$ における変位を表す変数 x_n の意味する物理量等の変数の定義が既存の generalized α 法等とは若干異なっている。これは、既存の時間積分法においては若干曖昧なまま扱われていた点を明確にしたものと考えられる。これにより、例えば generalized α 法等において 2 次精度を保証するための条件式のもつ意味を明確にすることなどが可能になっている。

2. SSDFTI 法

2.1 定式化

デジタルフィルタを伴う単ステップの時間積分法（以下「SSDFTI 法」という）の定式化について、一般的な運動方程式

$$Ma(t) + Cv(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

を対象として述べる。ここで、 M, C, K は、質量、減衰、剛性の各マトリクスであり、 a, v, x, f はそれぞれ加速度、速度、変位、外力の各ベクトルである。 t は時刻を表す。以下において、 t_n, x_n 等は時間間隔 Δt を用いて離散化した場合の、時刻 $t = t_n = n\Delta t$ における値を表す。

SSDFTI 法では、フィルタリングされていない時系列とフィルタリングされた時系列の 2 種類の時系列を用いる。以下においては、 x, v, a 等は前者を表し、 $\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{a}$ は後者を表すものとする。SSDFTI 法の $t = t_{n+1}$ における条件を示すと

$$Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kx_{n+1} = f_{n+1} \quad (2)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \sum_{i=0}^{Nx_a} \alpha_{xi} x_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{Nx_b} \beta_{xi} \tilde{x}_{n+1-i} \quad (3)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^{Nv_a} \alpha_{vi} v_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{Nv_b} \beta_{vi} \tilde{v}_{n+1-i} \quad (4)$$

$$\tilde{a}_{n+1} = \sum_{i=0}^{Na_a} \alpha_{ai} a_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{Na_b} \beta_{ai} \tilde{a}_{n+1-i} \quad (5)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \{(1-\delta)\tilde{v}_n + \delta\tilde{v}_{n+1}\}\Delta t + \left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\tilde{a}_n + \beta\tilde{a}_{n+1}\right\}\Delta t^2 \quad (6)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = \tilde{v}_n + \{(1-\gamma)\tilde{a}_n + \gamma\tilde{a}_{n+1}\}\Delta t \quad (7)$$

のように与えられる。ここで、

$$\alpha_{ki}, \beta_{kj}, (i = 0..Nk_a, j = 1..Nk_b) \quad (8)$$

は、 $k = x, v, a$ の時、それぞれ変位、速度、加速度に施すデジタルフィルタを与える係数列である。それぞれのフィルタの有する遅延時間を $\tau_k (k = x, v, a)$ とする。ここで、 $\tilde{x}_n$ は、 $t = t_n$ における値 x_n に対して遅延時間 τ_x を有するフィルタを作用させて定義されているので、 $t = t_n - \tau_x$ における値を示している。 $\tilde{v}_n, \tilde{a}_n$ についても同様である。また、 δ, β, γ は、時間積分の特性を定めるパラメタである。

2.2 パラメタ δ, β, γ について

時間積分の特性を定めるパラメタ δ, β, γ について述べる。

変位 $x(t)$ 及び速度 $v(t)$ を Newmark の β 法と同様に展開すると、同法の β を β' と表して、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \left\{\left(\frac{1}{2} - \beta'\right)a(t) + \beta'a(t + \Delta t)\right\}\Delta t^2 \quad (9)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}\{a(t) + a(t + \Delta t)\}\Delta t \quad (10)$$

となる。したがって、式 (6) と式 (9) において

$$t = t_n - \tau_x$$

としたものにおける Δt 項の係数の比較から、

$$\{(1-\delta)\tilde{v}_n + \delta\tilde{v}_{n+1}\} = v(t_n - \tau_x) \quad (11)$$

がえられる。同様に、式 (7) 及び式 (10) において、

$$t = t_n - \tau_v$$

としたものとの比較から、

$$\{(1-\gamma)\tilde{a}_n + \gamma\tilde{a}_{n+1}\} = \frac{1}{2}\{a(t_{n+1} - \tau_v) + a(t_n - \tau_v)\} \quad (12)$$

が得られる。

ここで、フィルタリングされている時系列とフィルタリングされていない時系列について 1 点記す。

式 (2) から明らかなように、フィルタリングされていない時系列 x_n, v_n, a_n 等は時刻 $t = t_n$ における値を示している。したがって、遅延時間を考慮すると、フィルタリングされている時系列 $\tilde{x}$ は時刻 $t = t_n$ ではなく、時刻 $t = t_n - \tau_x$ における値を示していると考えられる。同様に、 $\tilde{v}, \tilde{a}$ はそれぞれ時刻 $t = t_n - \tau_v, t_n - \tau_a$ における値を示していることになる。したがって、例えば、 $\tau_x \neq \tau_v$ の場合、時刻 $t = t_n - \tau_x$ における速度 v は直接的には算出されないため、別途評価する必要がある。ここでは線形補間によりこの値を評価する。

線形補間により評価される任意の時点における状態量について述べる。例えば、 $k = 1, 2..$ として

$$\tilde{y}_k = \frac{\tau}{\Delta t} y(t_k) + \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) y(t_{k-1}) \quad (13)$$

で与えられる時系列 $\{\tilde{y}_n\}$ は, $\{y(t_n)\}$ に対して, z 変換が

$$H(z) = \frac{\tau}{\Delta t} + \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) z^{-1} \quad (14)$$

で与えられる伝達関数 H を乗じた時系列である. この伝達関数の周波数特性は, $\omega = 2\pi f$, (f : 振動数) を用いて,

$$H(\omega) = \frac{\tau}{\Delta t} + \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \exp(-i\omega\Delta t) \quad (15)$$

と表される. このフィルタの振幅特性は $|H(\omega)|$ で与えられ,

$$|H(\omega)| = \left\{1 - \frac{\tau}{\Delta t} \left(\frac{\tau}{\Delta t} - 1\right) (1 - \cos\omega\Delta t)\right\}^{1/2} \quad (16)$$

となり, $\omega = 0$ において

$$|H(\omega)| = 1 \quad (17)$$

となることがわかる. また, 遅延特性 τ は

$$\tau(\omega) = -\frac{\partial\theta(\omega)}{\partial\omega} \quad (18)$$

$$\theta(\omega) = \frac{1}{2i} \ln \left\{ \frac{H(\omega)}{H(-\omega)} \right\} \quad (19)$$

で与えられ,

$$\tau(\omega) = \Delta t \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \frac{1 - \frac{\tau}{\Delta t}(1 - \cos\omega\Delta t)}{1 - 2\frac{\tau}{\Delta t}(1 - \frac{\tau}{\Delta t})(1 - \cos\omega\Delta t)} \quad (20)$$

となる. 例として, 式 (13) で $\tau = 0.2\Delta t$ として与えられるフィルタの振幅及び時間遅れの周波数依存性を図-1 に示す.

同図からも分かるように, このようなフィルタは低周波数領域での遅延時間が,

$$\tau(\omega) \doteq \Delta t - \tau \quad (21)$$

となる. このことを考慮すると,

$$t = t_n - \tau_x, \quad t_{n+1} - \tau_x$$

における $v(t)$, $a(t)$ の値は次のような線形補間式により評価されることがわかる.

$$v(t_n - \tau_x) = \frac{\tau_v - \tau_x}{\Delta t} \tilde{v}_{n+1} + \left(1 - \frac{\tau_v - \tau_x}{\Delta t}\right) \tilde{v}_n \quad (22)$$

$$v(t_{n+1} - \tau_x) = \left(1 + \frac{\tau_v - \tau_x}{\Delta t}\right) \tilde{v}_{n+1} - \frac{\tau_v - \tau_x}{\Delta t} \tilde{v}_n \quad (23)$$

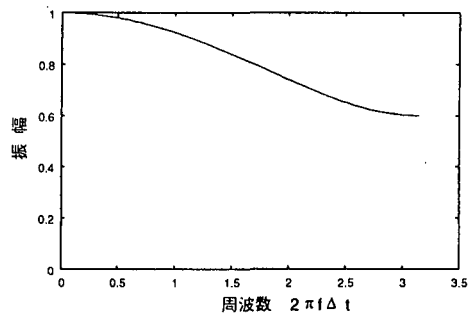
$$a(t_n - \tau_x) = \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t} \tilde{a}_{n+1} + \left(1 - \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t}\right) \tilde{a}_n \quad (24)$$

$$a(t_{n+1} - \tau_x) = \left(1 + \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t}\right) \tilde{a}_{n+1} - \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t} \tilde{a}_n \quad (25)$$

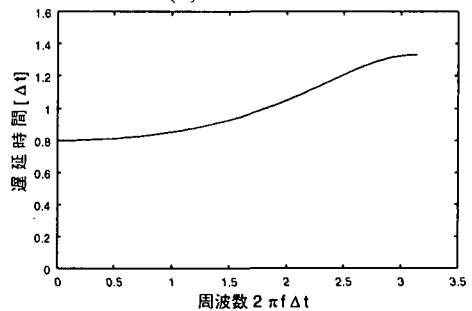
式 (22)-(25) を考慮すると, 式 (11) に基づく条件から,

$$\delta = \frac{\tau_v - \tau_x}{\Delta t} \quad (26)$$

が得られる.



(a) 振幅特性



(b) 遅延時間特性

図-1 線形補間によるフィルタリングの振幅及び遅延時間の周波数特性の例 (式 (13) において $\tau = 0.2\Delta t$ とした場合)

同様に, 速度に関する時間積分において条件式 (12) より,

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\tau_a - \tau_v}{\Delta t} \quad (27)$$

が得られる.

Newmark の β 法では, パラメタ β を変化させることにより時間積分において仮定する加速度の時刻歴が変化し, 例えば, $\beta = \frac{1}{4}$ ならば平均加速度法に相当し, $\beta = \frac{1}{6}$ ならば線形加速度法に相当することになる. このパラメタを β' と表すと, 式 (6) は

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + v(t_n - \tau_x)\Delta t + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta'\right) a(t_n - \tau_x) + \beta' a(t_{n+1} - \tau_x) \right\} \Delta t^2 \quad (28)$$

と表される. 式 (24), (25) を代入し, $\tilde{a}_n$ 等の係数を比較することにより,

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta'\right) \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t} + \beta' \left(1 + \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t}\right) \right\} \tilde{a}_{n+1} = \beta \tilde{a}_{n+1} \quad (29)$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta'\right) \left(1 - \frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t}\right) - \beta' \left(\frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t}\right) \right\} \tilde{a}_n = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \tilde{a}_n \quad (30)$$

となり, これより

$$\beta = \beta' + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t} \right) \quad (31)$$

が得られる。すなわち、 β の値は、時間積分において仮定する加速度の時刻歴等 (Newmark の β 法における β) にしたがって式 (31) により定めることができる。

3. 既存の時間積分法との比較

ここでは、主に generalized α 法を対象とした比較を行う。Generalized α 法の基本的な式は次のように与えられる。

$$Ma_{n+1-\alpha_m} + Cv_{n+1-\alpha_f} + Kx_{n+1-\alpha_f} = f(t_{n+1-\alpha_f}) \quad (32)$$

$$x_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)x_{n+1} + \alpha_fx_n \quad (33)$$

$$v_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)v_{n+1} + \alpha_fv_n \quad (34)$$

$$a_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)a_{n+1} + \alpha_ma_n \quad (35)$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_ft_n \quad (36)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) a_n + \beta a_{n+1} \right\} \Delta t^2 \quad (37)$$

$$v_{n+1} = v_n + \{ (1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1} \} \Delta t \quad (38)$$

Generalized α 法の定式化は、種々の時間積分法を包含するものとなっており、例えば、 $\alpha_m = 0$ とすると、Hilber らの α 法³⁾を与え、 $\alpha_f = 0$ とすると、Wood らによる α 法⁴⁾を与える。また、 $\alpha_f = \alpha_m = 0$ とすると、Newmark の β 法を与える。

SSDFTI 法において、加速度、速度及び変位に作用させるデジタルフィルタが全て全極型の 1 次フィルタ (すなわち、 $k = x, v, a$ について $Nk_a = 1, Nk_b = 0$) であり、かつ、速度及び変位に作用させるフィルタが同一であるとすると、本手法は、generalized α 法と同じ定式化を与える。すなわち、SSDFTI 法は generalized α 法の包含する全ての手法を包含するものである。この時、本手法で用いるフィルタは、generalized α 法で用いるパラメタ α_f 及び α_m を用いて次のように表される。加速度に作用させるフィルタは、

$$Na_a = 0, Na_b = 1 \quad (39)$$

$$\alpha_{a0} = \frac{1}{1 - \alpha_m} \quad (40)$$

$$\beta_{a1} = \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} \quad (41)$$

$$\tau_a = -\alpha_m\Delta t \quad (42)$$

また、速度、変位に作用させるフィルタは、 $k = x, v$ として

$$Nk_a = 0, Nk_b = 1 \quad (43)$$

$$\alpha_{k0} = \frac{1}{1 - \alpha_f} \quad (44)$$

$$\beta_{k1} = \frac{\alpha_f}{1 - \alpha_f} \quad (45)$$

$$\tau_k = -\alpha_f\Delta t \quad (46)$$

として与えられる。

ただし、SSDFTI 法は、変数の定義において generalized α 法等とは若干異なっている。

Generalized α 法等においては、 $\tilde{a}_n, \tilde{v}_n, \tilde{x}_n$ は時刻 $t = t_n$ における値の近似値として定義されている⁸⁾。このため、フィルタリングされていない時系列 a_n, v_n, x_n は、それぞれに施すフィルタの遅延時間分だけずれた時刻における値を示すことになる。したがって、式 (2) では、時刻の異なる時点における加速度、速度及び変位を用いて運動方程式が成立していることになる。例えば、加速度、変位に施すフィルタの遅延時間を τ_a, τ_x とし (この手法では、速度及び外力にも変位と同じフィルタが作用することになる)、 $\tilde{a}_n$ 等を時刻 $t = t_n$ における値であるとする、式 (2) を、いわば

$$Ma(t_{n+1} + \tau_a) + Cv(t_{n+1} + \tau_x) + Kx(t_{n+1} + \tau_x) = f(t_{n+1} + \tau_x) \quad (47)$$

という運動方程式に相当すると解釈していることになる。

一方、SSDFTI 法では、フィルタリングされていない変数 a_n, v_n, x_n を同時刻において定義し、 $\tilde{a}_n, \tilde{v}_n, \tilde{x}_n$ は、加速度、速度及び変位に作用させるフィルタの遅延時間に基づいて異なる時刻における状態量として定義している。そのため、運動方程式 (2) はある時点における状態量だけで記述できることになる。例えば上述の例の場合、 $\tilde{a}_n, \tilde{v}_n, \tilde{x}_n$ をそれぞれ時刻 $t = t_n - \tau_a, t_n - \tau_v, t_n - \tau_x$ における値であると定義するため、式 (47) に相当する式は、

$$Ma(t_{n+1}) + Cv(t_{n+1}) + Kx(t_{n+1}) = f(t_{n+1}) \quad (48)$$

となる。つまり、SSDFTI 法における変数の定義を用いることで、運動方程式を満たすことを陽に表現できることがわかる。

Generalized α 法において用いられているパラメタ α_f, α_m は、2 次精度を保証するための条件として、

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m \quad (49)$$

をあげている⁸⁾。SSDFTI 法においては、式 (42), (46) から明らかのように、

$$\frac{\tau_x}{\Delta t} = -\alpha_f \quad (50)$$

$$\frac{\tau_a}{\Delta t} = -\alpha_m \quad (51)$$

で与えられるから、これらを式 (27) に代入することにより式 (49) が導かれる。

すなわち、generalized α 法、Newmark の β 法等で示されている条件式 (49) は、SSDFTI 法においては速度に関する時間積分を表す式 (7) が、時刻レベルの更新に用いる式 (10) と一致するための条件として (27) に一般化された形で示される。

なお、generalized α 法等では、一般に、速度と変位に与えるフィルタは同一のものであるから、 $\tau_x = \tau_v$ より $\delta = 0$ となる。

また、generalized α 法では、解析が無条件安定性を有するための十分条件として

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \quad (52)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m) \quad (53)$$

をあげている⁸⁾。

よく知られているように、Newmark の β 法においては

$$\beta \geq \frac{1}{4} \quad (54)$$

ならば無条件安定である。式 (31) における β' がこの条件をみたすものとする、同式は

$$\beta' = \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_a - \tau_x}{\Delta t} \right) \geq \frac{1}{4} \quad (55)$$

と書ける。ここで式 (50), (51) を用いると、式 (53) が与えられる。すなわち、generalized α 法が無条件安定であるための条件式 (53) は Newmark の β 法の安定のための十分条件に相当するものであることが分かる。

式 (52) は、

$$\tau_a \geq \tau_x \geq -\frac{1}{2} \quad (56)$$

と書け、これは、1 次の全極フィルタ同士であれば一般に遅延時間の大きいフィルタの方が減衰特性が大きいことを考慮すると、加速度に変位や速度よりも大きい減衰作用を有するフィルタを作用させることを意味している。また、負の遅延時間も許容していることから、高周波成分を増幅させる作用のあるフィルタを用いることも可能であることを示している。(例えば、HHT- α 法³⁾) ただし、後述するように、SSDFTI 法による解析の安定化のための条件については明らかでない点も多く、検討が必要である。

以上のように、SSDFTI 法では、定式化は generalized α 法等を包含する形式になっているが、変数の定義は若干異なっている。SSDFTI 法では、デジタルフィルタの考え方をういて変数を定義することにより、運動方程式を満たすことを陽に示せ、また、generalized α 法等の 2 次精度を保証するための条件式や安定条件を表す式の持つ意味を明確に示すことができる。

4. 計算手順

提案する時間積分法の具体的な計算手順を示す。

式 (7) を式 (6) に代入して $\tilde{v}_{n+1}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} = & \tilde{x}_n + \tilde{v}_n \Delta t \\ & + \left[\left\{ \delta(1-\gamma) + \frac{1}{2} - \beta \right\} \tilde{a}_n \right. \\ & \left. + (\delta\gamma + \beta) \tilde{a}_{n+1} \right] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (57)$$

が得られる。

一方、式 (3)-(5) をそれぞれ $x_{n+1}, v_{n+1}, a_{n+1}$ について解くと、

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{N_{x_b}} \beta'_{xi} \tilde{x}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{x_a}} \alpha'_{xi} x_{n+1-i} \quad (58)$$

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{N_{v_b}} \beta'_{vi} \tilde{v}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{v_a}} \alpha'_{vi} v_{n+1-i} \quad (59)$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{N_{a_b}} \beta'_{ai} \tilde{a}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{a_a}} \alpha'_{ai} a_{n+1-i} \quad (60)$$

となる。ここで、 $k = x, v, a$, $i = 1, 2, \dots$ について

$$\alpha'_{ki} = \alpha_{ki} / \alpha_{k0} \quad (61)$$

$$\beta'_{ki} = \beta_{ki} / \alpha_{k0} \quad (62)$$

であり、また、

$$\beta'_{k0} = 1 / \alpha_{k0} \quad (63)$$

である。

式 (58) - (60) を式 (2) に代入し、 $x_{n+1}, v_{n+1}, a_{n+1}$ を消去し、さらに、式 (57) 及び (7) により、 $\tilde{v}_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}$ を消去することにより、 $\tilde{a}_{n+1}$ が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n+1} = & [\beta'_{a0} M + \beta'_{v0} \gamma C \Delta t + \beta'_{x0} (\delta\gamma + \beta) K \Delta t^2]^{-1} \\ & \left[f_{n+1} - \{ \beta'_{v0} C \zeta_n + \beta'_{x0} K \xi_n \} \right. \\ & - M \left(\sum_{i=1}^{N_{a_b}} \beta'_{ai} \tilde{a}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{a_a}} \alpha'_{ai} a_{n+1-i} \right) \\ & - C \left(\sum_{i=1}^{N_{v_b}} \beta'_{vi} \tilde{v}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{v_a}} \alpha'_{vi} v_{n+1-i} \right) \\ & \left. - K \left(\sum_{i=1}^{N_{x_b}} \beta'_{xi} \tilde{x}_{n+1-i} - \sum_{i=1}^{N_{x_a}} \alpha'_{xi} x_{n+1-i} \right) \right] \end{aligned} \quad (64)$$

ここで

$$\zeta_n = \tilde{v}_n + (1-\gamma) \tilde{a}_n \Delta t \quad (65)$$

$$\xi_n = \tilde{x}_n + \tilde{v}_n \Delta t + \left\{ \delta(1-\gamma) + \frac{1}{2} - \beta \right\} \tilde{a}_n \Delta t^2 \quad (66)$$

これを式 (57) 及び (7) に代入することにより $\tilde{x}_{n+1}, \tilde{v}_{n+1}$ が算出される。さらに、式 (58) - (60) より、 $x_{n+1}, v_{n+1}, a_{n+1}$ が算出されることになる。

5. 計算例

5.1 全極型 1 次フィルタ

単純なモデルを対象とした解析における SSDFTI 法の適用例を示す。対象とする系は、図-2 に示す二質点の線形系とする。なお、以下の議論は単位系に依存しないため、質量などの物理量はすべて無次元量とする。

質点の質量は $m_1 = 5.0$ と $m_2 = 2.5$ とする。また、バネ係数は $k_i = m_i \left(\frac{2\pi}{T_i} \right)^2$ ($i = 1, 2$) において $T_1 = 0.02$ と $T_2 = 3.0$ として与えられる。この系の固有周期は、 1.15×10^{-2} 及び 5.19 である。入力波は、主たる周期が $T_p = 1.0$ である Ricker 波とする。

この系に周期 10 及び 0.01 において 0.02 となる Rayleigh 減衰を与える場合と、周期 10 で 0.02, 0.01 で -0.02 となる Rayleigh 減衰を与える場合を考える。後者の減衰は、高周波領域において負になっており、発散する傾向を模擬するものになっている。これらの解

析を Newmark の β 法を用いて行った場合の質点 m_1 の変位の時刻歴を図-3 に示す。ここで、解析での時間間隔は $\Delta t = 0.01$ である。

高周波領域で負となる減衰を有する系の解析を SS-DFTI 法で行う。ここで加速度、速度及び変位に異なるフィルタを作用させる。すなわち、加速度に対しては、

$$Na_a = 0, \quad (67)$$

$$Na_b = 1, \text{ (以上, デジタルフィルタの項数)} \quad (68)$$

$$\tau_a = 0.2\Delta t \text{ (遅延時間)} \quad (69)$$

としたフィルタを作用させ、速度及び変位に関しては遅延時間をそれぞれ

$$\tau_v = 0.125\Delta t \quad (70)$$

$$\tau_x = 0.1\Delta t \quad (71)$$

としたフィルタを作用させる。この解析により得られた質点 m_1 の変位の時刻歴を図-4 に示す。同図には、図-3(a) で与えられている結果も重ねてプロットした。同図で両者がよく一致していることがわかる。これより、SSDFTI 法により高周波成分をデジタルフィルタで除去する解析を行うことにより、高周波成分が発散する傾向を有する減衰を与えた系の振動について、全周波数領域において正となる減衰のみを有する場合と一致する結果が得られたことが分かる。

5.2 高次フィルタ

2 次以上の高次フィルタを用いた場合の計算例を示す。フィルタとしては、定遅延性及び定振幅性を有するフィルタを用いる必要がある¹⁶⁾ため、ここでは、有理ルジャンドルフィルタ¹⁸⁾を用いる。これは、定遅延性を有する全極型フィルタ（最大遅延平坦フィルタ）¹⁷⁾に定振幅性を実現するためのフィルタを乗じて得られるもので、フィルタの項数 N_a, N_b (偶数) 及び遅延時間 $\tau\Delta t$ (τ : 整数) が与えられたとき、その係数は次のように求められる。

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{N_a} \sum_{k=0}^{N_a/2} \sum_{i=0}^{2k} \delta_{j-(N_a/2+k-i)} \phi_k \quad (72)$$

$$\beta_k = (-1)^k N_b C_k \prod_{i=0}^{N_b} \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \quad (73)$$

ただし、

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{for } i = 0 \\ 0, & \text{for } i \neq 0 \end{cases} \quad (74)$$

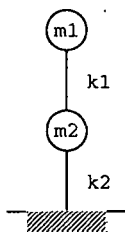
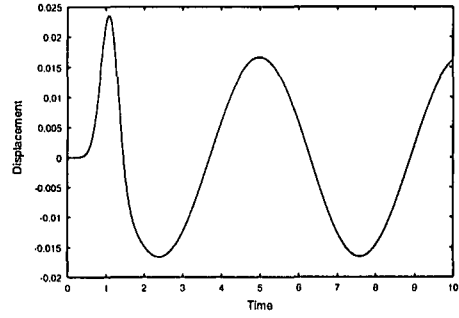
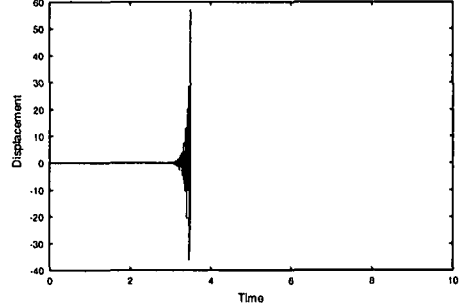


図-2 試算の対象とする二質点系のモデル



(a) 全周波数領域で正である Rayleigh 減衰を付加した場合



(b) 高周波数領域で負となる Rayleigh 減衰を付加した場合

図-3 Rayleigh 減衰を付与した二質点の応答変位の時刻歴。全周波数領域で正値をとる減衰としては、周期 10 及び 0.01 で 0.02 となる減衰を付加し、高周波数領域で負となる減衰としては、周期 10 で 0.02、0.01 で -0.02 となる Rayleigh 減衰を与えた。後者は発散する傾向を有する。

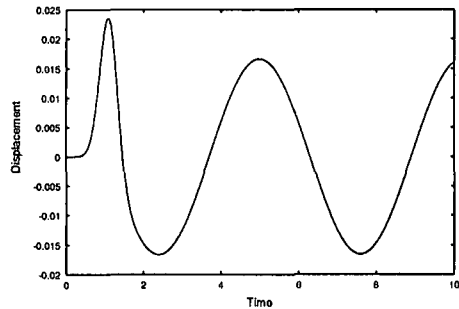


図-4 高周波で発散する減衰 (負の減衰) を有する系の時刻歴。応答解析を SSDFTI 法を用いた解析により得られた質点 m_1 の変位の時刻歴。高周波成分が除去されて負の減衰が無い場合と一致する結果を与えている。

$$\phi_k = -\tau C_k \tau + N_b C_k \frac{k!(2N_b - 2k)!}{(N_b - k)!} \frac{1}{N_b! 2(N_b + \tau) C_{N_b}} \quad (75)$$

$$N C_M = \frac{\Gamma(N + 1)}{\Gamma(N - M + 1) \Gamma(M + 1)} \quad (76)$$

ただし、 $N < 0, M > 0$ の時、

$$N C_M = (-1)^M {}_{-N+M+1} C_M \quad (77)$$

で与えられる。

なお、最大遅延平坦フィルタの場合、 $\alpha_k(k=0)$ は、

$$\alpha_0 = \frac{2N_b!}{N_b! \prod_{i=N_b+1}^{2N_b} (2\tau + i)} \quad (78)$$

で与えられる。

ここでは、固有周期 2.0 の一質点系を考える。入力波は前述のケースと同じ Ricker 波である。用いたフィルタは、加速度については

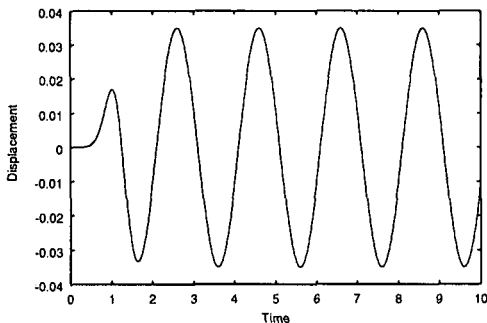
$$\begin{aligned} Na_a &= 2, \\ Na_b &= 2, (\text{以上、デジタルフィルタの項数}) \\ \tau_a &= 2\Delta t (\text{遅延時間}) \end{aligned}$$

とした有理ジャンドルフィルタであり、速度及び変位に関しては

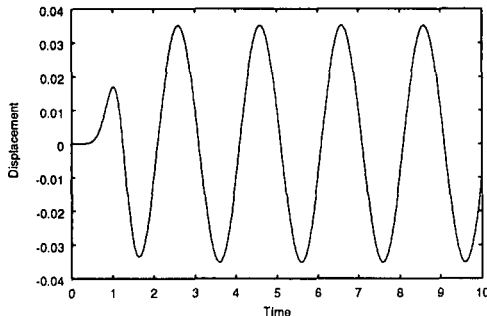
$$\begin{aligned} Nx_a &= 0, \\ Nx_b &= 2, (\text{以上、デジタルフィルタの項数}) \\ \tau_x &= 1\Delta t (\text{遅延時間}) \end{aligned}$$

とした最大遅延平坦フィルタである。

解析により得られた変位の時刻歴を図-5に示す。この解析では、フィルタを作用させた場合と、そうでない場合はほとんど同じ結果を与えている。



(a) フィルタ無し



(b) 高次フィルタを用いた SSDFTI 法

図-5 一質点系の変位の時刻歴の比較。フィルタを施さずに算出した変位と高次フィルタを用いた SSDFTI 法により算出した変位の比較。両者はほぼ一致する結果を与えている。

しかし、SSDFTI 法で用いるフィルタとして、より高次のフィルタを施した場合には解析が発散する例も

あった。例えば、同じ系を対象として、加速度には

$$\begin{aligned} Na_a &= 4, \\ Na_b &= 4, (\text{以上、デジタルフィルタの項数}) \\ \tau_a &= 2\Delta t (\text{遅延時間}) \end{aligned}$$

とした有理ジャンドルフィルタ、速度及び変位に関しては

$$\begin{aligned} Nx_a &= 4, \\ Nx_b &= 4, (\text{以上、デジタルフィルタの項数}) \\ \tau_x &= 1\Delta t (\text{遅延時間}) \end{aligned}$$

とした有理ジャンドルフィルタを作用させた場合の結果は、図-6に示されるように、急速に発散する結果となった。このように発散するケースは他のフィルタを用いた場合でも見られている。今後、検討をすすめ、SSDFTI 法の安定条件を明確にすることが必要である。

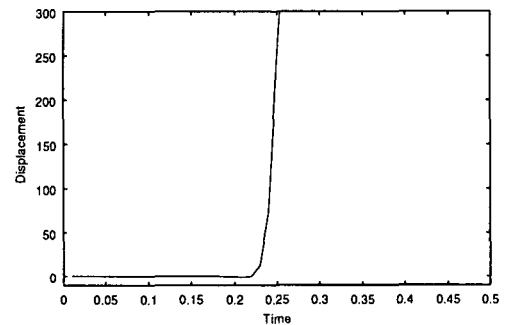


図-6 SSDFTI 法で、加速度、速度及び変位の全てに有理ジャンドルフィルタを用いた一質点系を対象とした解析例における変位の時刻歴。解析は非常に速く発散している。

6. まとめ

本論文では、デジタルフィルタを伴うシングルステップの時間積分法 (SSDFTI 法) を提案し、その理論及び計算手順等について述べた。SSDFTI 法は、Newmark の β 法等の時間積分法など同様に調整可能な減衰特性を与えることができる時間積分法である。定式化の上では、generalized α 法に統合される Newmark の β 法をはじめとする種々の時間積分法を包含するものとなっている。

しかし、その減衰特性は、デジタルフィルタの考え方に基づいて実現されている点が既存の時間積分法における方法と異なっている。また、一つの物理量に対して、フィルタリングされていない時系列とフィルタリングされている時系列の 2 種類の時系列を考慮することで、多様なデジタルフィルタを使用することが可能になっており、加速度、速度、変位にそれぞれ異なるフィルタを作用させることができるなど、付与する減衰特性の設定の自由度が高いものになっている。

SSDFTI 法では、ある時刻レベル n における状態量を表す変数 (例えば x_n) の定義にデジタルフィルタの

考え方を用いており、その定義はNewmarkの β 法等と若干異なっている。この定義により、用いられた変数が運動方程式を満たすことを陽に表せ、また、generalized α 法等において2次精度を確保するための条件式やこれらの手法の安定条件式の意味を明確に解釈できることを示した。

本論文では、SSDFTI法を用いた単純な解析例を示し、発散傾向を有する高周波ノイズを含んだ解析を、ノイズを除去しつつ行うことができること、またその結果はノイズを含まない解析によって得られる結果と一致するものであることを示した。しかし、解析の安定性を確保するための条件は明らかになっておらず、用いるフィルタによって解析が不安定になる場合もあることも示されている。SSDFTI法が安定化するための必要条件の解明は、本手法の適用性についての検討とともに、今後の重要な課題であるといえる。

参考文献

- 1) N. M. Newmark: A method of computation for structural dynamics, *ASCE Proc.* 85 (EM3), pp.67-94, 1959.
- 2) E. L. Wilson: A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, *SESM Report* No.68-1, University of California, Berkeley, CA, 1968.
- 3) H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor: Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthq. eng. struct. dyn.* 5, pp.283-292 (1977).
- 4) W. L. Wood, M. Bossak and O. C. Zienkiewicz: An alpha modification of Newmark's method, *Int. j. numer. methods. eng.* 15 pp.1562-1566, 1981.
- 5) C. Hoff and P. J. Pahl: Practical performance of the θ_1 method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics, *Comput. methods appl. mech. eng.* 67, pp.87-110, 1988.
- 6) C. Hoff and P. J. Pahl: Extended comparison of the Hilber-Hughes-Taylor α -method and the θ_1 -method, *Comput. methods appl. mech. eng.* 67, pp.367-385, 1988.
- 7) M. G. Katona and O. C. Zienkiewicz: A unified set of single-step algorithms, Part 3: the beta- m method, a generalization of the Newmark scheme, *Int. j. numer. methods. eng.* 21 pp.1345-1359, 1985.
- 8) J. Chung, G. M. Hulbert: A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation - the generalized- α method -, *J. applied mechanics, Transactions of ASME*, 60, pp.371-375, 1993.
- 9) H. M. Hilber and T. J. R. Hughes: Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics, *Earthq. eng. struct. dyn.* 6, pp.99-117 (1978).
- 10) J. C. Houbolt: A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. aeronautical science* 17, pp.540-550, 1950.
- 11) K. C. Park: Evaluating time integration methods for nonlinear dynamic analysis, in *Finite element analysis of transient nonlinear behavior* (eds. T. Belytschko et al.), ASME, New York, 1975.
- 12) T. C. Fung: Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation, *Int. j. numer. meth. engng.* 41 pp.65-93, 1998.
- 13) A. Munjiza, D. R. J. Owen, and A.J.L. Crook, An $M(M^{-1}K)^m$ proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems, *Int. j. numer. meth. engng.* 41, pp.1277-1296, 1998.
- 14) 式部 幹: デジタルフィルタの設計, 東海大学出版会, 1986.
- 15) R. ヴィーフ (富久泰明 監訳): Z 変換の理論と応用, ブレイン図書出版, 1991.
- 16) 本田 利器, 澤田 純男: デジタルフィルタを内蔵した時間積分法, 応用力学論文集, 1, pp.389-396, 1998.
- 17) J. Thiran: Recursive digital filters with maximally flat group delay, *IEEE Trans.*, CT-18, 6, pp.659-664, 1971.
- 18) 佐藤 正光: 有理ルジャンドルフィルタ-減衰及び遅延平坦なデジタルフィルタ-, 電子通信学会論文誌, J59-A No.4, pp.327-332, 1976.

(1999 年 4 月 23 日 受付)