

EFGMによる水～土連成解析

Numerical analysis of saturated soil by EFGM

川端 浩司*・村上 章**・青山 咸康***

Hiroshi KAWABATA, Akira MURAKAMI, Shigeyasu AOYAMA

*学生会員 京都大学大学院修士課程 農学研究科地域環境科学専攻 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)

**正会員 農博 京都大学助教授 農学研究科地域環境科学専攻 (同上)

***正会員 農博 京都大学教授 農学研究科地域環境科学専攻 (同上)

A formulation of Element Free Galerkin Method (EFGM) for saturated soil is presented. A weak form of equation of stress equilibrium is derived and its discretization based on the EFGM strategy is presented under the elastic constitutive equation. The continuity equation of pore water is discretized through two different schemes. The accuracy of numerical computation is examined through one-dimensional consolidation problems by comparing with closed and usual finite element solutions.

Key Words : Mesh free method, EFGM, consolidation, FEM

1. はじめに

有限要素法は、数値解析法としての有用性以外に、離散化を通じて問題の見通しを与えてくれるという利点を有している。ただ、ひずみの局所化のように特殊な問題では、特に軟化域における解のメッシュ依存性など不可避な限界もある。

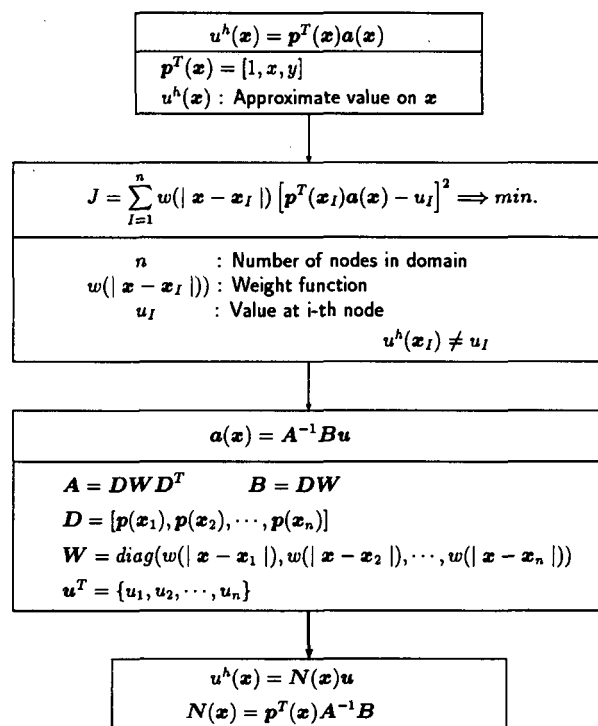
これに対する対策として、アダプティブメッシュのようにメッシュを随時更新する方法などがある。その一方で、Belytschkoらによって提案された Element Free Galerkin Method (EFGM)^{1)~4)} に代表されるメッシュフリー法も有力な手段となることが期待される。

EFGMは、支配微分方程式の弱形式について、要素の形状関数を使わずに、移動最小自乗法 (Moving Least Square Method : MLSM) による近似を行って、剛性方程式を立てる。この際、内挿関数が連続となるため、メッシュ依存の問題に有効となる可能性があると考えられる。

そこで本論文では、飽和土の解析にこの解析法を導入することを目的として、水～土連成問題の定式化と計算の精度を検証するために、いくつかの数値解析を実施した。連続式の離散化の相違による解析解の比較も併せて行った。

2. EFGM

EFGMの定式化手順は、支配方程式に対する弱形式を作り、近似関数を用いて剛性方程式を立てることにある。ただし、その特徴は、弱形式に用いる近似関数が要素の形状関数ではなく、積分点ごとにある半径をもつ円形領域に含まれる節点によって MLSM で構成した近似関数を用いることにある。このため、「要素」

図-1 MLSMでの形状関数の算出¹⁾

の概念を用いることなく、要素・節点情報を入力する手間が省けるのはもちろん、近似関数の次数も高次となる。

MLSMによる近似関数の導出過程を図1に示す。MLSMによる近似は、節点値間の内挿ではないので、通常FEMで用いられる基本境界条件の処理ができない。そこで、新たに基本境界条件の処理を行う必要が生じる。また、FEMでは解析領域の積分単位として要素を使用した、EFGMでは要素の概念がないため、

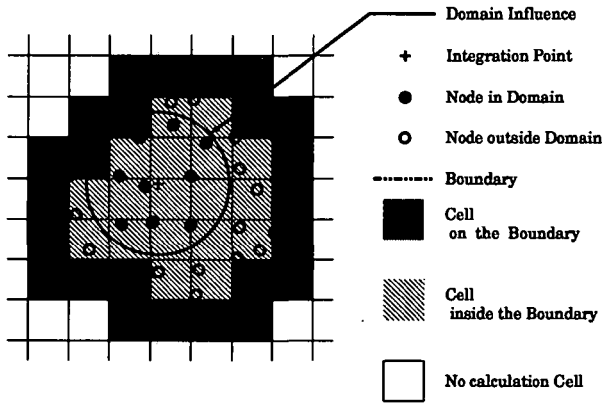


図-2 サポート半径と節点の関係¹⁾

新たな積分単位として節点配置と無関係に「バックグラウンドセル」を配置し、セル内の積分点ごとに数値積分を行い、これを積み上げて剛性方程式を作る。

MLSMでの形状関数の計算において、重み関数の種類、重み関数の台(support)の半径は、計算結果を左右する重要な要素である。重み関数として、次式のQuartic spline function¹⁾を使用する。

$$w(d_I) = 1 - 6\left(\frac{d_I}{r}\right)^2 + 8\left(\frac{d_I}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{d_I}{r}\right)^4 \quad (1)$$

ここで、 d_I は評価点から節点 I までの距離、 r はサポート半径である。

図-2は、サポート半径とバックグラウンドセルの配置図である。バックグラウンドセルは、領域内部を正方形に配置する。境界付近で正方形のセルを配置できない場合、三角形のセルを配置する。EFGMにおける基本境界条件の処理法は、さまざまに定義されている。ここでは、ペナルティ関数を使用したペナルティ法で処理を行う。ペナルティ法とは、非常に大きな係数を定めて、弱形式の中にこれを含む修正関数を入れることで、基本境界を満足させる手法である。

3. 水～土連成解析の定式化

3.1 支配方程式

地盤挙動の支配方程式は、次式で与えられる。土の構造骨格の変形と間隙水の運動との連成問題では、間隙水の運動を表す水の連続条件式(8)が速度型で表されるため、他の支配方程式も速度型で書き改める。

支配方程式

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \delta_{ij}\dot{p}_w \quad \text{有効応力の原理} \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad \text{つりあい式} \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2 \quad \text{適合条件} \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{構成式} \quad (5)$$

$$v_i = -k_{ij}h_{,j} \quad \text{ダルシー則} \quad (6)$$

$$h = p_w/\gamma_w + \Omega \quad \text{全水頭} \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon}_v = v_{i,i} \quad \text{連続条件式} \quad (8)$$

境界条件

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{t}_{si} \quad (\text{on } \Gamma_\sigma) \quad (9)$$

$$\dot{u}_i = \dot{\hat{u}}_i \quad (\text{on } \Gamma_u) \quad (10)$$

$$h = \hat{h} \quad (\text{on } \Gamma_h) \quad (11)$$

$$-k_{ij}h_{,j} = \hat{v}_i \quad (\text{on } \Gamma_v) \quad (12)$$

初期条件

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij}|_{t=0} \quad (\text{in } V) \quad (13)$$

$$h = h|_{t=0} \quad (\text{in } V) \quad (14)$$

ここに、 $\dot{\sigma}_{ij}$: 応力速度、 $\dot{\sigma}'_{ij}$: 有効応力速度、 $\dot{p}_w$: 過剰間隙水圧速度、 $\dot{\epsilon}_{ij}$: ひずみ速度、 D_{ijkl} : 応力-ひずみマトリックス、 v_i : 流速、 k_{ij} : 透水係数、 h : 全水頭、 γ_w : 水の単位体積重量、 Ω : 位置水頭、 $\dot{\epsilon}_v$: 体積ひずみ速度、 n_j : 境界に立てた単位法線ベクトル、 Γ_σ : 応力境界、 Γ_u : 変位境界、 Γ_h : 水頭境界、 Γ_v : 流速境界、 V : 全境界、である。

FEMによる水～土連成解析の離散化を行う時、圧力水頭に関する形状関数の次数を、変位に関する次数より1次落す手法が広く使用されている。これは、変位・圧力水頭両者の解の精度向上と、計算の安定のためである。

これに対して、1) 圧力水頭の形状関数の次数が0の場合、連続条件式を要素ごとの差分展開によって直接解く^{5),6)}、2) 同じく次数が1の場合、圧力水頭の値を節点で代表させて、連続条件式についての弱形式を解く⁷⁾ 2種類の連続条件式の離散化法が存在する。この両者をEFGMに適用し、それぞれ定式化および離散化を行う。

3.2 連続条件式を差分展開する水～土連成解析の定式化^{5),6)}

赤井、田村^{5),6)}にならい、領域の圧力水頭を配置するセルの重心で代表させ、連続条件式を差分展開することにより離散化を行う。以下、定式化1と呼ぶ。

(1) 離散化

つりあい式の離散化は図-3の通りである。つりあい式に関する弱形式はFEMと同じである。領域内の任意の点での変位速度・仮想変位速度で近似するため、MLSMにより算出した形状関数 N を用いて、次式のように表す。

$$\dot{u} = N\dot{\Phi} \quad (15)$$

任意の点でのひずみ速度は、変位速度を微分することによって求められる。体積ひずみ速度についても同様のことが言える。

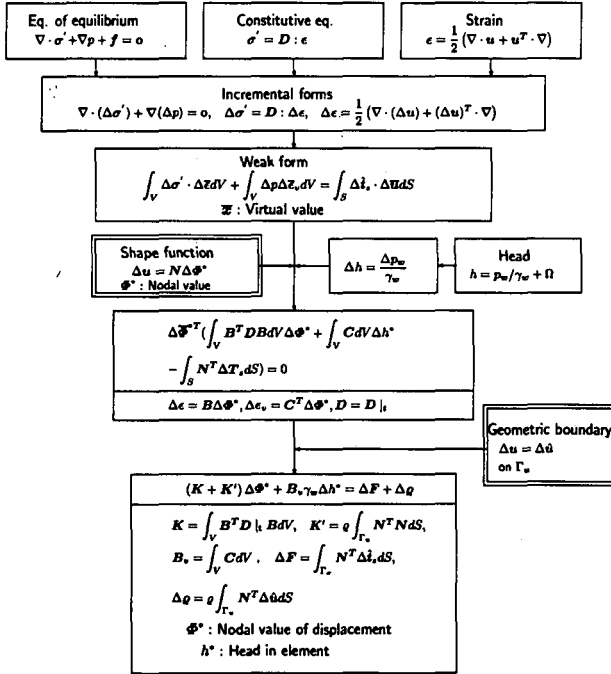


図-3 つりあい式に関する弱形式の離散化(文献6)を一部修正)

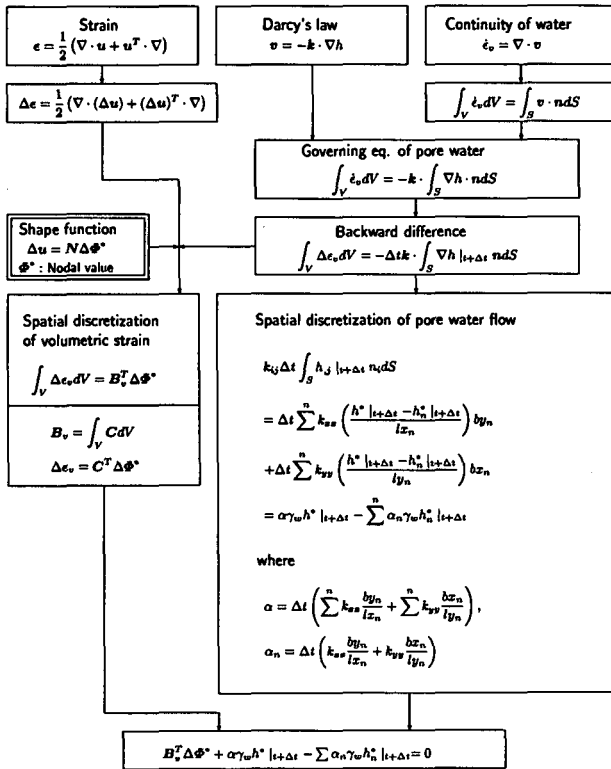


図-4 連続条件式に関する弱形式の離散化⁶⁾

を各バックグラウンドセルの重心で代表させる。図-3において、FEMの離散化から、EFGMの離散化のために変更した部分は、形状関数の算出の部分、基本境界条件をペナルティ法で処理する部分である。

連続条件式の離散化を図-4に示す。FEMの離散化から、EFGMの離散化のために変更した部分は、形状関数を算出する部分である。

(2) 剛性方程式の算出

離散化した2つの式をまとめたものを図-5に示す。この剛性方程式で、 K マトリックスの計算には4次のGaussの数値積分、 B_w マトリックスの計算には2次のGaussの数値積分をそれぞれ適用した。また、 K' 、 $\Delta \varrho$ はそれぞれ次式の通りに置き換えた。数値積分をこのように簡略化できるのは、ペナルティ数が十分大きいためである。

$$K' = \varrho \sum_J N_J^T N_J \quad (18)$$

$$\Delta \varrho = \varrho \sum_{J=1}^M N_J^T \Delta \hat{u}_J \quad (19)$$

ここに、 J は変位境界条件を与える節点、 N_J は、その節点で求めた形状関数である。

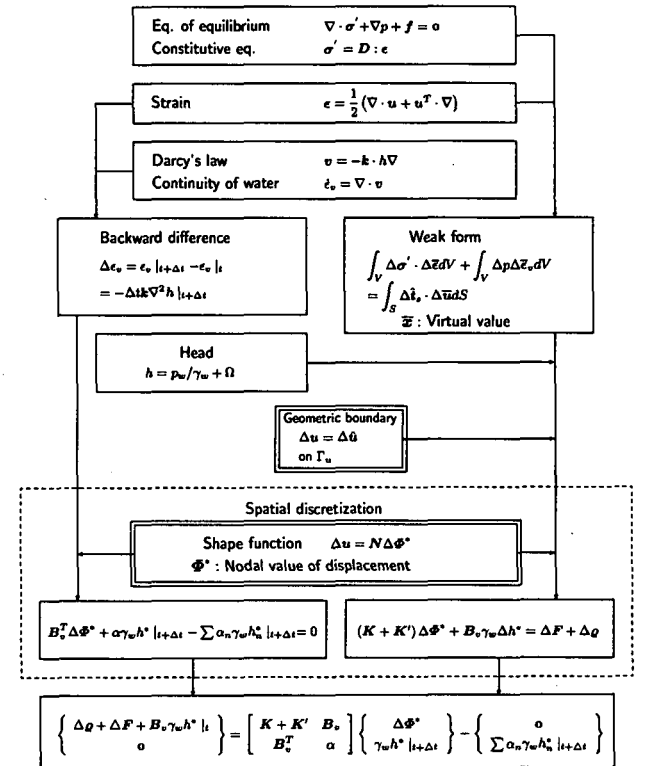


図-5 剛性方程式の算出(文献6)を一部修正)

$$\dot{\epsilon} = B \dot{\Phi} \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}_v = C^T \dot{\Phi} \quad (17)$$

これらを参考にして式展開を行う。この時、数値積分はバックグラウンドセルごとに行う。また、間隙水圧

3.3 連続条件式について弱形式を作成する水～土連成解析の定式化⁷⁾

連続条件式について弱形式を作成したのち、各節点で圧力水頭を算出し、離散化を行う定式化を扱う。こ

れを定式化2と呼ぶ。

(1) 弱形式の離散化

変位速度の近似関数と重み関数の速度（仮想変位速度）に関しては、前と同じ近似関数を使用する。また、任意の点での圧力水頭 h を、圧力水頭に関する節点値によって近似するため、変位に関する形状関数とは別のサポート半径で計算した形状関数 N_h で、次式のように表す。

$$h \simeq h^h(x) = \sum_j N_{hj} h_j^* \quad (20)$$

ここで、 h は圧力水頭、 h^* は圧力水頭に関する節点値である。また、節点での流量 v_i は、

$$\{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$= \begin{bmatrix} -k_{xx} & 0 \\ 0 & -k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{Bmatrix} = [K_w] \{ \gamma_w h_{,i} \} \quad (22)$$

となる。ここでは、

$$\{h_{,i}\} = [B_h] \{ \gamma_w h^* \} \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{h1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{h\beta}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{h1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{h\beta}}{\partial y} \end{bmatrix} \{ \gamma_w h^* \} \quad (24)$$

である。

また、過剰間隙水圧 $\dot{p}_w$ は、圧力水頭から以下のように表すことができる。

$$\dot{p}_w = \frac{\gamma_w}{\Delta t} (h|_{t+\Delta t} - h|_t) \quad (25)$$

つりあい式に関する弱形式の離散化は、図-6の通りである。FEMの離散化から、EFGMの離散化のために変更した部分は、形状関数を算出する部分と、基本境界条件を処理する部分である。

連続条件式に関する弱形式の離散化の手順を、図-7に示す。ここでの変更点は、骨格・圧力水頭についての形状関数を MLSM を使用して算出した点、圧力水頭に関する基本境界条件をペナルティ法で処理した点である。

(2) 剛性方程式の算出

離散化した2つの式をまとめた結果を図-8に示す。

剛性方程式において、 K マトリックスの計算には4次の Gauss の数値積分、 K_v, K_h マトリックスの計算には2次の Gauss の数値積分を適用した。剛性方程式を離散化するときに、すべての節点の変位・間隙水圧を求めるように未知量の設定を行った。また、ペナルティ法による数値積分の処理は、3.2(2)と同じである。

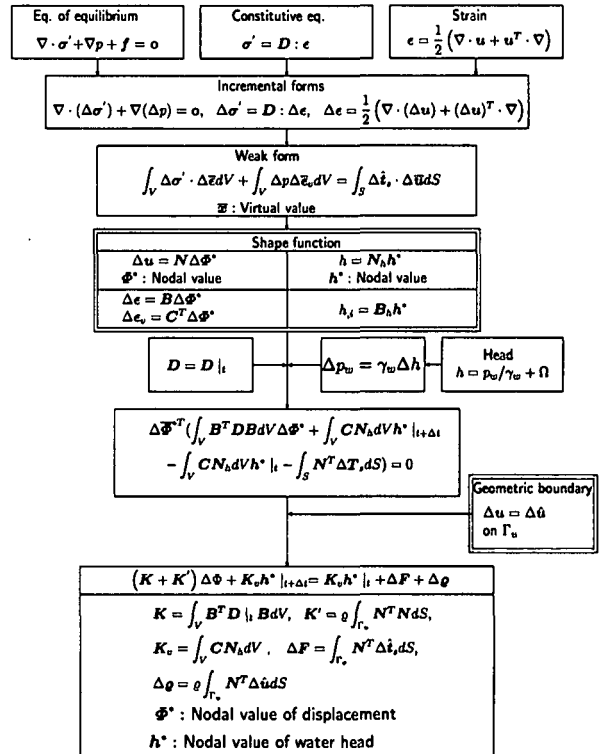


図-6 つりあい式に関する弱形式の離散化(文献7)を改変)

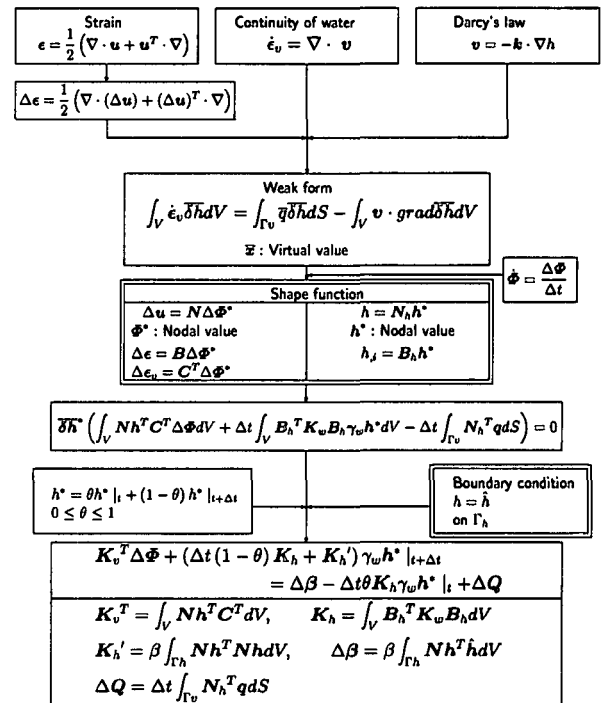


図-7 連続条件式に関する弱形式の離散化(文献7)を改変)

4. 数値計算

作成したプログラムの精度を検証するために、弾性地盤の一次元圧密問題を扱う。EFGM解、EFGMのセル配置と要素配置とを一致させたFEM解、Terzaghiの

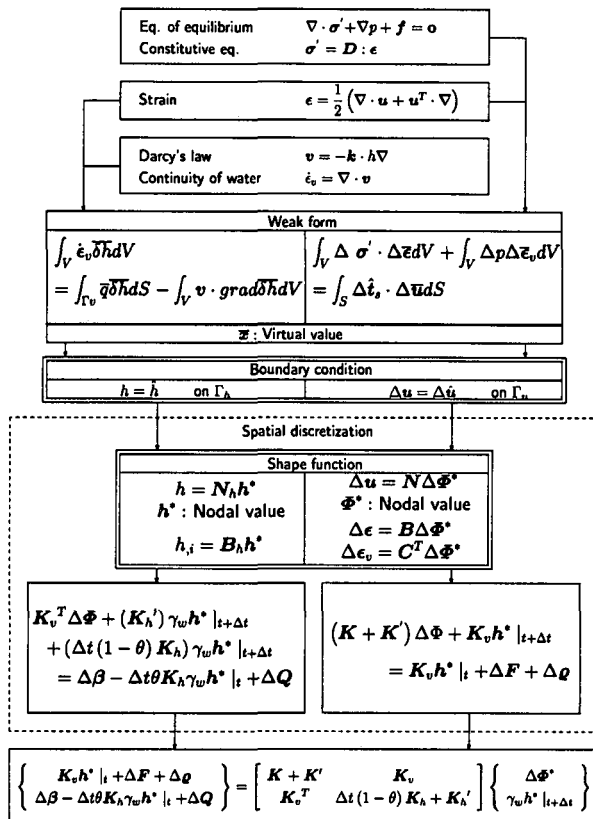


図-8 剛性方程式の算出(文献7)を一部修正)

厳密解⁸⁾の比較を行う。

解析の対象として、上面排水・等分布荷重を受ける一次元圧密モデルを選ぶ。その材料定数は以下の通りである。

ヤング率 $E = 100 \text{ kgf/cm}^2$

ポアソン比 $\nu = 0.25$

透水係数 $k = 1.0 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}$

EFGMの計算条件として、基本境界条件処理のペナルティー係数は 10^4 とする。領域を分割するセルの一辺の長さは、原則として領域全体を正方形セルで分割できる長さに設定する。サポート半径は、その時のセル一辺の長さを基準にした倍率を、解析モデル毎に設定する。また、タイムステップは、2000秒・3000秒・後は5000秒毎で行う。

4.1 計算の手順

EFGMでの計算の手順を以下に記す。

1. 節点、境界条件を設定する。
2. バックグラウンドセルを配置する。
3. バックグラウンドセルについてそれぞれ以下の計算を繰り返す。
 - (a) バックグラウンドセルの積分点を、ガウス積分点と同様に配置する。
 - (b) 各積分点において影響を受ける節点を捜し出し、形状関数を算出する。

(c) バックグラウンドセルについて数値積分を行い、剛性方程式を作成する。

4. それぞれの剛性方程式を合成する。
5. 境界条件を処理する。
6. 連立方程式を解き、節点値を求める。
7. 節点値に関して処理を行い、近似値を求める。また、節点以外の座標での近似値はMLSで算出する。

4.2 定式化1のプログラムによる解析

定式化1に基づいて以下の解析を行う。

(1) セル5個配置のモデル

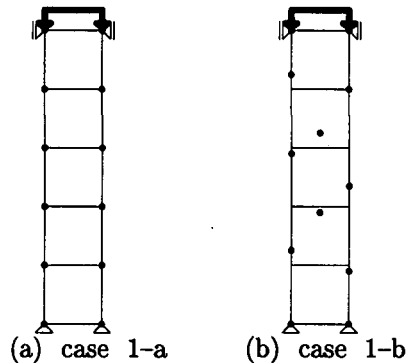


図-9 セル5個での解析の節点配置

モデルサイズと節点配置は、図-9の1-a,1-bの2ケースである。セル一辺の長さは2cmとし、正方形セルを縦に5個配置する。両ケースとも、 K マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.7倍、 K_v マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.9倍で計算を行った。

結果を図-10・図-11に示す。節点配置が不規則な場合でも、規則的な場合と同様のEFGM解がFEM解と一致する結果を得た。

(2) 8×8 の64個の配置

モデルサイズと節点配置は、図-12の2-a,2-bの2ケースである。セル一辺の長さは1.25cmとし、正方形セルを縦、横に 8×8 の64個配置する。また、解析領域上面に等分布荷重を与える。これらも、 K マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.7倍、 K_v マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.9倍で計算を行った。

結果を図-13・図-14に示す。節点在不規則な場合でもそれぞれ良好な結果を得た。

(3) 境界付近に三角形型のセルが配置される場合

解析領域が複雑な場合、正方形セルだけで領域全体を十分に覆えない。この場合、領域内部は正方形セルを配置し、境界付近で正方形セルを配置できないとき、三角形セルを配置した。

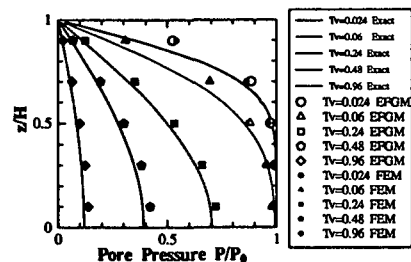
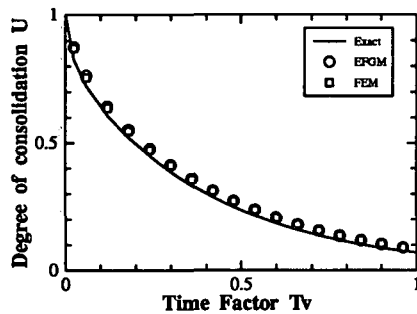


図-10 1次元配置 (ケース1-a)

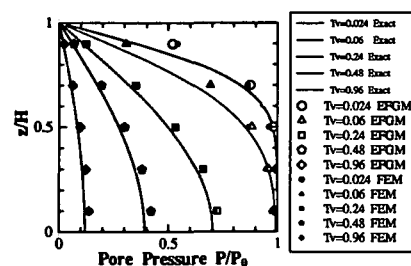
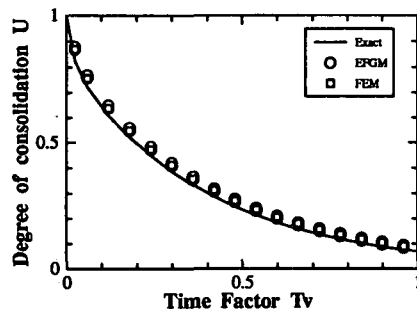


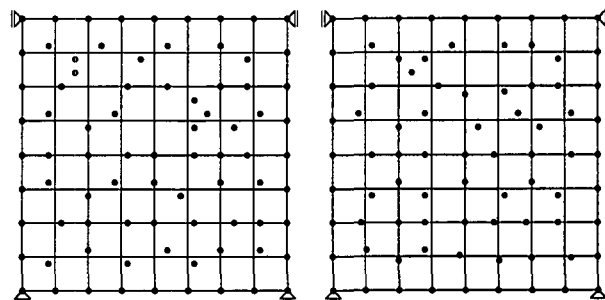
図-11 1次元配置 (ケース1-b)

モデルサイズと節点配置は、図-15の3-a,3-bの2ケースである。この時、セル一辺の長さを変化させ、境界付近に三角形型のセルを配置する。サポート半径は前モデルと同じである。

結果を図-16・図-17に示す。境界付近に不規則なセルが配置される場合でも、前ケースの時と変わらない精度の計算結果を得た。

4.3 定式化2のプログラムによる解析

次に、節点ごとに圧力水頭を算出し、連続条件式の弱形式を作成した、定式化2について、以下の解析を行う。



(a) ケース 2-a

(b) ケース 2-b

図-12 2次元節点配置

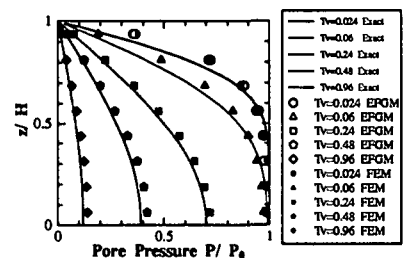
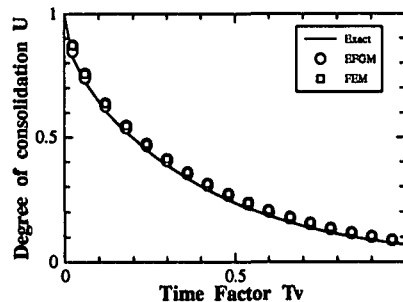


図-13 2次元節点配置 (ケース2-a)

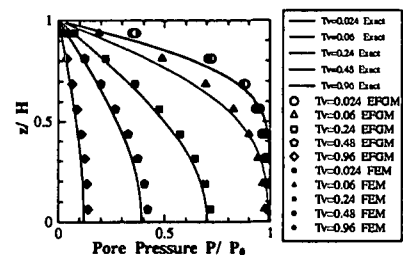
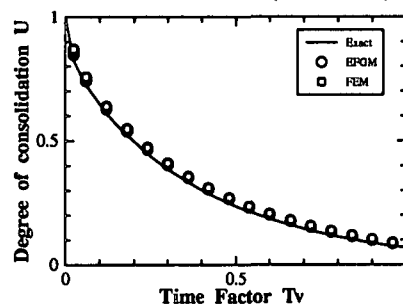
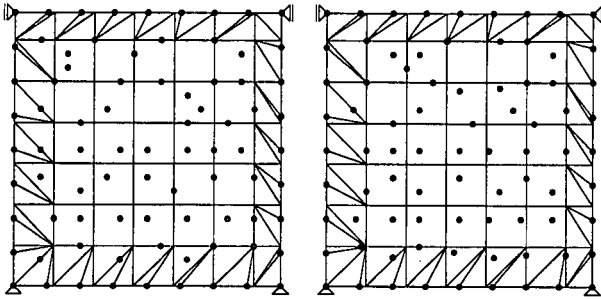


図-14 2次元節点配置 (ケース2-b)

(1) セル5個配置のモデル

モデルサイズ、節点配置、セル配置は図-9の2ケースである。両ケースとも、 N, B マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.7倍、 C マトリックスの



(a) ケース 3-a

(b) ケース 3-b

図-15 三角形セル使用時の節点配置

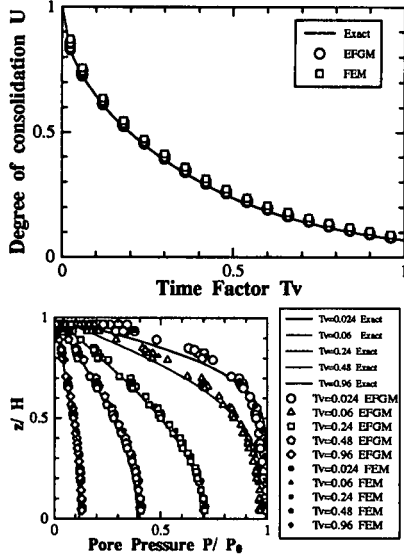


図-16 2次元三角形セル配置 (ケース 3-a)

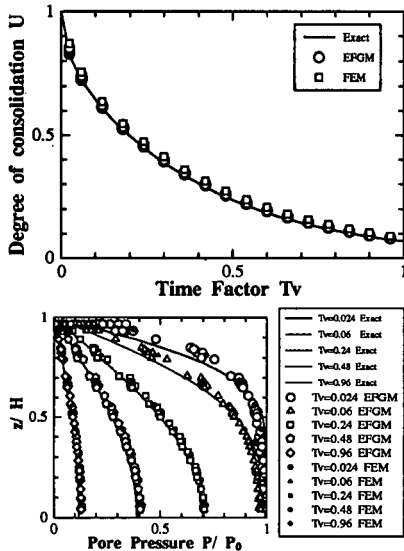


図-17 2次元三角形セル配置 (ケース 3-b)

計算時のサポート半径はセル長の1.9倍、 N_h , B_h マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の2.0倍で計算を行った。

結果を図-18・図-19に示す。EFGM解による圧密度はFEM解とほぼ一致するが、間隙水圧分布は、厳密

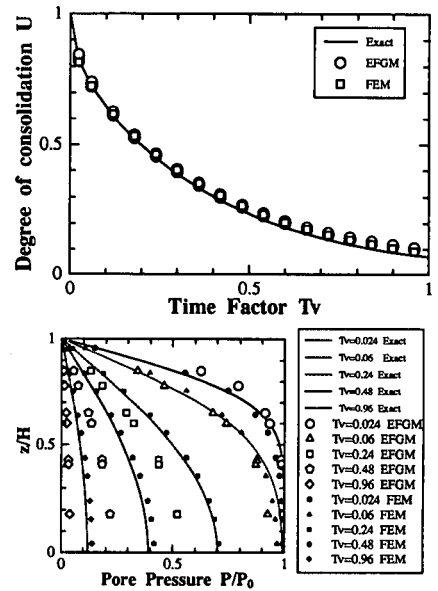


図-18 1次元配置 (ケース 1-a)

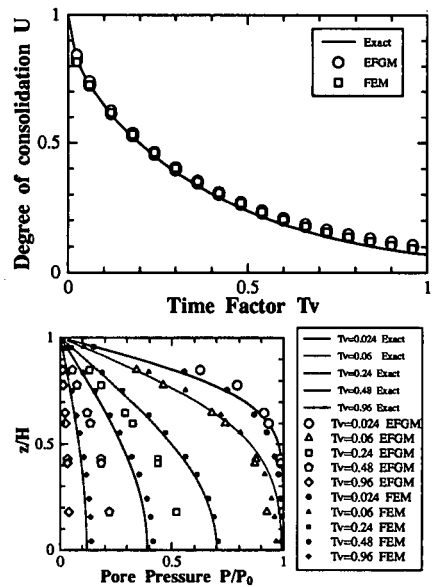


図-19 1次元配置 (ケース 1-b)

解よりも小さく計算される結果となっている。

(2) 8×8 の64個の配置

モデルサイズ、節点配置、セル配置は図-12の2ケースである。両ケースとも、 N , B マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の1.7倍、 C マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の2.0倍、 N_h , B_h マトリックスの計算時のサポート半径はセル長の2.2倍で計算を行った。

結果を図-20・図-21に示す。EFGM解による間隙水圧分布は厳密解とほぼ一致するが、圧密度が小さく計算される結果となっている。

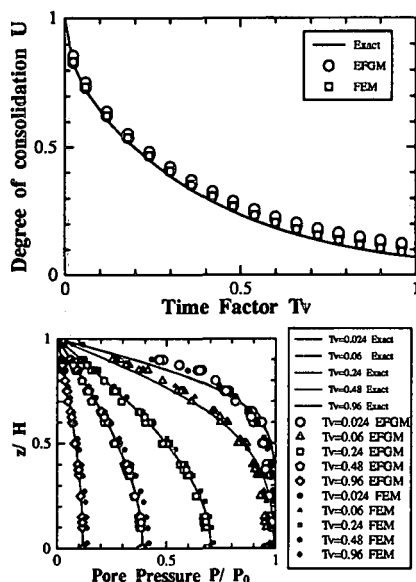


図-20 2次元配置 (ケース 2-a)

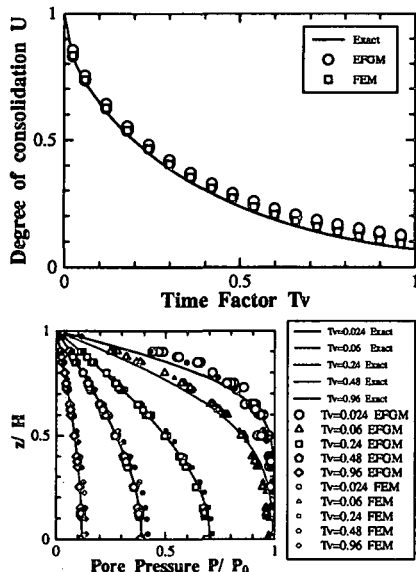


図-21 2次元配置 (ケース 2-b)

4.4 考察

定式化1のプログラムに関しては、節点が規則的、不規則に配置されている場合、境界上のセルが不規則になる場合においても、理論解とほぼ一致する計算結果を得ることができた。しかし、定式化2のプログラムによる計算結果は、圧密度・間隙水圧分布の両者について、定式化1ほどの計算精度を得ることができなかった。

定式化2の計算精度の劣る理由として、間隙水圧の近似次数と、骨格の変位に関する近似次数を等しくして離散化を行ったことが挙げられる。FEMでの水～土連成解析の場合、変位・間隙水圧の両者を求める節点

と、変位のみを求める節点の2種類を配置することから、間隙水圧の近似次数を、変位のものより1次元落とすことが可能である。しかし、EFGMでの離散化の場合、すべての節点で両者を計算するようにしたため、精度の劣化が起きたと考えられる。

また、作成したプログラムのシステム上の問題として、1) K , K_v , K_h などの剛性行列を作成するため形状関数の計算を行うとき、それぞれの行列に最適なサポート半径を見つけることが難しいこと、2) 変位境界・水頭境界の両者をペナルティー法で処理するため、剛性方程式が不安定な形になること、などが考えられる。

5. おわりに

本研究では、EFGMを飽和土の解析に導入するために、2種類の水～土連成解析の定式化と剛性方程式の作成を行った。圧密問題について、EFGMによる解と、厳密解とFEM解との比較を行い、定式化1の手法について、FEMと同様の精度を確認することができた。

最後に、4.3節定式化2の数値計算について、岐阜大学工学部土木工学科 八嶋 厚教授・沢田和秀助手からFEMプログラムのご提供を受けました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. : Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 2) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. : Meshless methods : An overview and recent development, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.139, pp.3-47, 1996.
- 3) Xu, Y. and Saigal, S. : An element free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.154, pp.331-343, 1998.
- 4) 野口裕久 : エレメントフリー法による構造解析, 講習会「わかるエレメントフリー法」テキスト, 日本機械学会, pp.29-36, 1998.
- 5) 赤井浩一・田村 武 : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第269号, pp.95-104, 1978.
- 6) Iizuka, A. and Ohta, H. : A determination procedure of input parameters in elasto-plastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.71-87, 1987.
- 7) Ohta, H., Iizuka, A., Omote, Y. and Sugie, S. : 3-D analysis of soil/water coupling problems using elasto-viscoplastic constitutive relationships *Computer Methods and Advances in Geomechanics* (Beer, G., Booker, J.R. and Carter, J.P. eds), Vol.2, pp.1191-1196, 1991.
- 8) Lambe, T. and Whitman, R. : *Soil mechanics*, John Wiley & Sons, 1969.

(1999年4月23日受付)