

セル構造体のマルチスケール解析のための 座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察

Micro-scale Problems with Buckling for Multi-scale Analyses of Cellular Solids

斉木 功*, 寺田賢二郎**, 池田清宏***

Isao SAIKI, Kenjiro TERADA and Kiyohiro IKEDA

*工修 宇都宮大学助手 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2, saiki@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

**Ph.D. 東北大学大学院講師 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

The nonlinear mechanical behavior of cellular solids is mainly caused by the buckling of cells. We here develop a multi-scale computational method for periodic cellular solids with buckling. However, theoretical studies so far reported some difficulties for choosing appropriate models of microstructures that minimize non-convex potential functionals. Therefore, we here discuss appropriate models of unit cell for the local unstable problems by symmetry of the system and some numerical examples of micro-scale problems by the presented method.

Key Words : multi-scale analysis, nonconvex functional, bifurcation, cellular solids, large deformation

1. はじめに

セル構造体¹⁾とは、図-1に示すような線や面によって閉ざされたセルの集合体である。セル構造体は様々な用途に使用されるが、構造材料に限定すれば、木材は古くから多用されてきた天然のセル構造体であり、軽量かつ高剛性であるため、工学的に重要である。そのため、古くから理論的、実験的な研究が数多く行われてきた^{2),3)}。

セル構造体の力学挙動は、圧縮変形に限定すると、主に3段階に分類することができ、そのひずみ-応力関係を模式的に表すと図-2のようになる。同図に見られるように、変形が小さいうちは、ほぼ線形弾性とみなすことができるが、やがて、セル壁の弾性、もしくは塑性座屈によって、荷重が一定のプラトー段階へと移行する。さらに変形が進むと、隣り合うセル壁どうしが接触し、緻密化の段階となり、セル壁の材料本来の変形に収束する¹⁾。本論文では、このような非線形挙動のうち、材料の不安定化の要因となる弾性座屈に着目する。

このようなセル構造体に対して、セル構造体をセル壁と空隙との複合材料としてとらえ、何らかの平均化手法により等価物性を求める試みが行われた^{4),5)}。これらは、初期の線形弾性の段階に対しては有効であるが、座屈や接触といった非線形性は考慮できず、このような非線形問題に適応可能な平均化手法の開発が望まれている。そこで、著者らは、問題を解析対象であるセル構造体をマクロスケール問題、その微視構造であるセルをミクロスケール問題として分離し、それらの相互作用を考慮できるマルチスケール解法としての均質化法^{6),7),8)}の

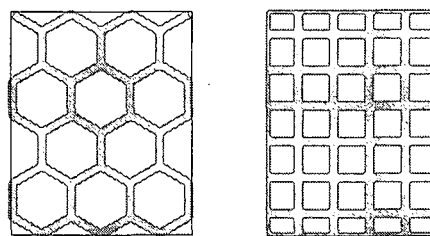


図-1 セル構造体

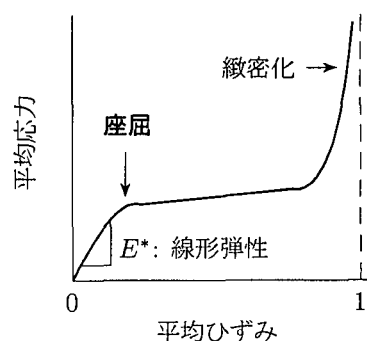


図-2 セル構造体の圧縮における平均挙動

適用を試みている^{9),10)}。

非均質材料の均質化法による解析において、対象領域の周期性と、代表体積要素であるユニットセルの選定の問題は、寺田ら¹¹⁾により議論された。しかし、大変形に対する均質化法の問題に対する適用はまだ少なく、特に座屈問題に関しては、適切なユニットセルの選定には、

線形問題のそれと本質的に異なる問題が残されている。ここで扱っている座屈は分岐座屈であり、分岐現象により新たなパターンが形成され、系の持つ対称性が崩壊する¹²⁾。したがって、図-1のように、はじめ単一セルの大きさの並進対称性を有していた系は、分岐により複数のセルの大きさの並進対称性へとその対称性を失うことが予想される。単純にユニットセルに単一のセルを用いることにより、ユニットセルに周期境界条件を科す以上、複数のセルによって形成される分岐モードを表現することはできなくなるため、適切なユニットセルを別途検討する必要がある。また、非凸ポテンシャルを持つ系の非線形均質化法の収束論からも、この問題が指摘されている^{13),14)}。このような観点からの研究は少ないが、1次元の周期構造を持つクラックに分岐により形成されるパターンについては、群論的分岐理論を用いた固有値解析により Oguni ら¹⁵⁾により明らかにされた。

本論文では、以上のことを踏まえて、まず、大変形座屈問題のマルチスケール解析のための定式化、アルゴリズムを示し、例として正六角形ハニカムの微視スケール問題の数値解析を行うことによって、前述した適切なユニットセルに関する数値的検討を行う。

2. 定式化

領域 v において、一般的な有限ひずみの境界値問題を考える。釣合式および境界条件は、体積力がなければ、Cauchy 応力 σ を用いて

$$\nabla_x \cdot \sigma = 0 \quad \text{in } v \quad (1)$$

$$\sigma^T \cdot n = \underline{t} \quad \text{on } s_t, \quad u = \underline{u} \quad \text{on } s_u \quad (2)$$

と表される。ここに、 n は境界 s_t 上での外向き法線ベクトル、 $\underline{t}$, $\underline{u}$ はそれぞれ与えられる力学的、および幾何学的境界条件である。ここで、構成関係が

$${}_t\dot{S} = C : D \quad (3)$$

と表されるとすると、釣合式 (1) の、現配置 x を基準配置とした、いわゆる updated-Lagrange 形式の増分仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & \int_v (C : D) : \delta D dv + \int_v \sigma : (L^T \cdot \delta L) dv \\ &= \int_{s_t} \underline{\dot{t}} \cdot \delta \underline{u} ds \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。ここに、 ${}_t\dot{S}$ は Truesdell の応力速度であり、左下の t は参照時刻を意味する。また、 D は変形速度テンソル、 L は速度勾配テンソル、 u は変位ベクトル、 $\underline{\dot{t}}$ は速度表示されたトラクションを意味する。

区分線形化された仮想仕事式 (4) に対しては、形式的には線形の均質化法と同様に定式化を進めることができる。解析領域を、図-3 に示すように、大きさ εY のユニットセルによって周期的に埋め尽くすことができるとする。ただし、 ε は解析対象領域の大きさ L に比べて非

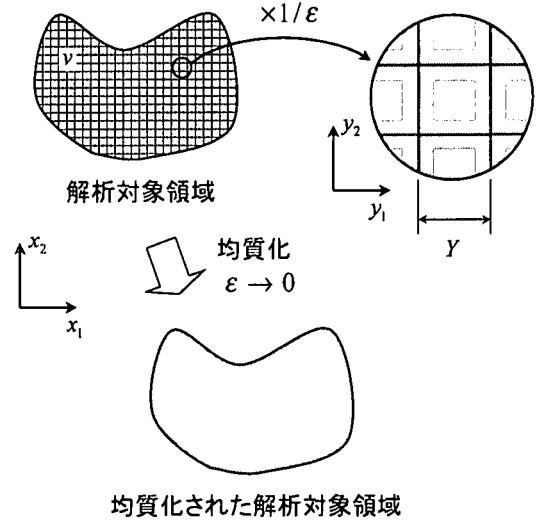


図-3 マルチスケールの概念

常に小さい ($\varepsilon \ll L$) とし、したがってユニットセルの大きさも L に比べて非常に小さい。ここで、その微小なユニットセル内での尺度として、微視スケール変数

$$y \equiv \frac{x}{\varepsilon} \quad (5)$$

を導入する。これに対し、解析領域全体の尺度である x を巨視スケールと呼ぶこととする。変位増分 $\underline{u}$ を微視構造のスケール ε に関して漸近展開し、2変数表示すると

$$\underline{u}^\varepsilon(x) = \underline{u}^0(x, y) + \varepsilon \underline{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \underline{u}^2(x, y) + \dots \quad (6)$$

となる。ここに、 $\underline{u}^n(x, y)$ は y に関して周期 Y の周期関数である。任意の関数 $\phi(x, y)$ に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \phi(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

となる^{6),7)}ことを考慮すると、変形速度テンソルは

$$D = \frac{1}{\varepsilon} D_y^0 + (D_x^0 + D_y^1) + \varepsilon (D_x^1 + D_y^2) + \dots \quad (8)$$

のように表すことができる。ここに、 α を巨視スケールを意味する x 、もしくは微視スケールを表す y とし、 n を正の整数とすると

$$D_\alpha^n \equiv \frac{1}{2} \{ L_\alpha^n + (L_\alpha^n)^T \}, \quad L_\alpha^n \equiv \nabla_\alpha \otimes \underline{u}^n \quad (9)$$

である。これらを仮想仕事式 (4) に代入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うと、微視スケールの釣合式

$$\begin{aligned} & \int_Y (C : D_y^1) : \delta D_y^1 dY + \int_Y \sigma : \{ (L_y^1)^T \cdot \delta L_y^1 \} dY \\ &= - \int_Y (C : D_x^0) : \delta D_y^1 dY \\ &\quad - \int_Y \sigma : \{ (L_x^0)^T \cdot \delta L_y^1 \} dY \end{aligned} \quad (10)$$

および巨視スケールの釣合式

$$\begin{aligned}
 & \int_v \langle \langle C \rangle : D_x^0 \rangle : \delta D_x^0 dv \\
 & + \int_v \langle \sigma \rangle : \left\{ (L_x^0)^T \cdot \delta L_x^0 \right\} dv \\
 & = \int_{s_t} \dot{t} \cdot \delta u^0 ds - \int_v \langle L_y^1 \cdot \sigma \rangle : \delta L_x^0 dv \\
 & - \int_v \langle C : D_y^1 \rangle : \delta D_x^0 dv
 \end{aligned} \quad (11)$$

を得ることができる。ただし、次に示す積分公式を用いた。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_v \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dv = \int_v \langle \Phi(x, y) \rangle dv \quad (12)$$

ここに、 $\langle \cdot \rangle$ は微視領域 Y での体積平均を意味し

$$\langle \Phi(x, y) \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi(x, y) dY \quad (13)$$

で定義される。

3. 解析方法

線形問題の場合には、単位の巨視ひずみ $\nabla_x \otimes u_0$ に対する微視スケール応答 u^1 ，すなわち特性関数を求め、次いで均質化材料定数を得ることができる。しかし、ここで扱っている非線形問題に関しては、巨視スケールの釣合式を解く際の積分点などの物性評価点毎に、微視スケールの釣合式を解くこととなる¹⁶⁾。つまり、1 ステップ毎に、巨視スケール釣合式 (11) を解いて、各評価点での巨視増分ひずみを計算し、それを用いて、各評価点で微視スケール釣合式 (10) を解き、両者が収束するまで繰り返し計算を行う必要がある¹⁷⁾。

ただし、ここでは、ユニットセルの適切なモデルに対する検討を行うことが目的なので、巨視ひずみ増分 L_x^0 を解析条件として与え、式 (10) により表される微視スケール問題のみを解析する。その際、大変形問題に対して、巨視ひずみ増分をユニットセルの変形に反映させる必要があるが、その方法に関しては、解析結果と共に、後述する。

4. セル構造体の対称性に基づくユニットセルの設定

一般の複合材料は必ずしも厳密な対称性を有していない。にも関わらず、複合材料の局所的周期性を仮定する均質化法が良い近似解を与えること、またその解は、仮定する周期性，すなわちユニットセルの選定に対して比較的鈍感であることが経験的に知られている。このことは、近年、寺田¹¹⁾らにより理論的、数値的な側面から裏付けがなされた。このような背景から、対象とする複合構造の対称性に基づくユニットセルの選定の厳密な議論がなされることは少なく、通常、ユニットセルは、対象

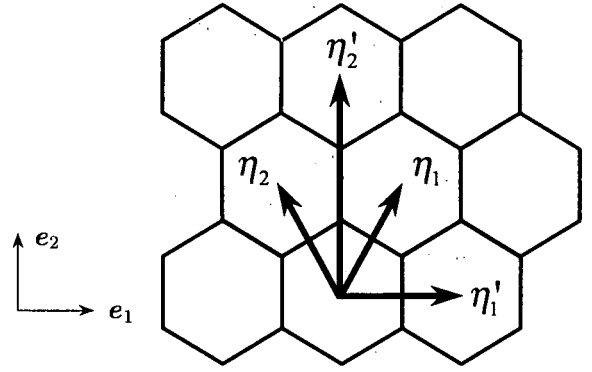


図-4 セル構造体の並進対称性

複合材料の対称性が直交性を有しているかいないかに関わらず、直方体ないし長方形領域に取られる。

しかしながら、セル構造体のように座屈を考慮しなければならない場合は、仮定する局所的周期性が座屈に及ぼす影響が大きいことが予想される。したがって、まず微視構造が持つ対称性を明確にし、それに基づくユニットセルの選定の厳密な議論が必要である。また、微視構造の持つ対称性は必ずしも直交方向にあるとは限らないため、その場合、最小の単位周期構造を直方体として定義することができない。そこで、本章では平面セル構造体である正六角形ハニカムを例として、セル構造体の対称性に基づくユニットセルおよびその周期性の設定法について述べる。

4.1 正六角形ハニカムの対称性

正六角形セル構造体は

$$y \mapsto y + \eta_i \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

で表される並進について不変である。ここに、 η_1, η_2 は図-4 で示されるように、 L を六角形セルの一辺の長さ、 e_1, e_2 を図-4 に示すような向きの正規直交基底ベクトルとすると

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \sqrt{3}Le_1 + \frac{3}{2}Le_2 \\
 \eta_2 &= -\sqrt{3}Le_1 + \frac{3}{2}Le_2
 \end{aligned} \quad (15)$$

と定義される。式 (15) で定義される 2 方向の並進に対して不変な系は、ダイヤモンドパターンの対称性を持つと言われる¹⁸⁾。

4.2 長方形ユニットセル

通常、均質化法におけるユニットセルは、2 次元問題では長方形、3 次元問題では直方体として扱われる。しかしながら、図-4 や式 (15) にあるように、ハニカムを不変に保つ 2 方向の並進は互いに直交しないため、そのままでは単位周期構造を長方形とすることはできない。

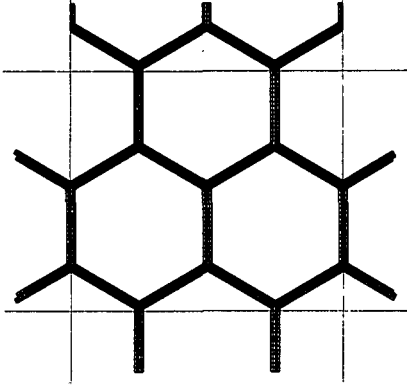


図-5 長方形領域にとったユニットセル

ここで、図-4にあるように、式(15)から

$$\begin{aligned}\eta'_1 &= \eta_1 - \eta_2 = 2\sqrt{3}Le_1 \\ \eta'_2 &= \eta_1 + \eta_2 = 3Le_2\end{aligned}\quad (16)$$

を定義すれば、 η'_1 、 η'_2 は互いに直交する。したがって、この対称性を有する系として、 e_2 方向に偶数個のセルを有する長方形のユニットセルを考えることができる。例えば 2×2 個のセルに対しては、図-5において、細い直線で囲まれたようなユニットセルとなる。これ以降、このモデルを、モデル2sqと呼ぶこととする。

以上のような考え方にに基づき、正六角形セルに対しては、 e_2 方向に偶数個のセルを有する、という限定付きではあるが、長方形のユニットセルを設定することができる。実際の数値解析においては、向かい合う辺上の同じ位置にある節点同士が同じ変位となるようにすれば良い。

4.3 一般形ユニットセル

微視スケール問題は、必ずしも直方体もしくは長方形領域である必要はなく、 N 次元問題において、 N 個の一次独立な方向に関する周期性を満たせば良い。ここでの問題では、式(15)で定義される η_1 、 η_2 を用いて、微視スケール変位 u^1 が

$$u^1(x, y + m_i \eta_i) = u^1(x, y) \quad (17)$$

で表される周期性を有する。ここに、 m_i は整数である。

実際の数値解析においては、例えば 1×1 、 2×2 個のセルを基本周期構造と考えるならば、それぞれ $m_1 = m_2 = 1$ 、 $m_1 = m_2 = 2$ であり、図-6において、太い破線で示してある辺が、それぞれ対応する太い実線で示した辺と同じ変位を共有するようにすれば良い。また、同図中、白丸、白四角にはそれぞれ、黒丸、黒四角と同じ節点情報を与えれば良い。以上のことは、それぞれのユニットセルによって空間を埋め尽くすることができるように並べたときに、同じ位置に位置する節点同士の変位が等しくなる、と解釈することもできる。

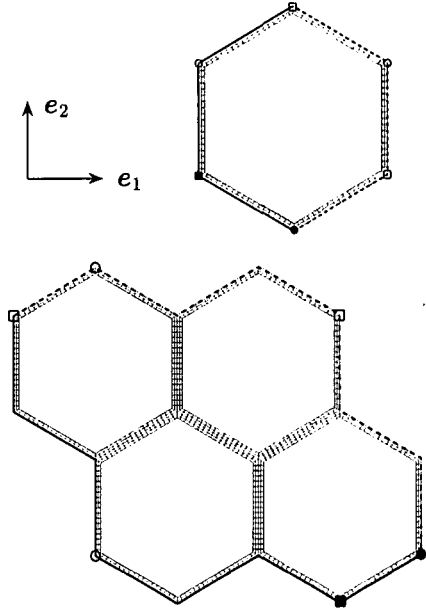


図-6 ユニットセルの解析モデル

5. 解析結果および適切なユニットセルに関する考察

冒頭に述べたように、ここで扱っている座屈不安定問題は、ポテンシャル汎関数が非凸となる典型的な問題であり、この場合、単一のセルを代表体積要素とするとその解析結果は正解に収束しない。非線形均質化法の収束論からは、ポテンシャル汎関数を最小にするためには、代表体積要素を k^N 個のセルの集合体として考えなければならないことが明らかにされている¹⁴⁾。ここに、 k はある正の整数、 N は領域の次元数である。Oguniら¹⁵⁾は分岐により1次元の周期構造を持つ周期構造体の分岐解析のための最小の単位体を、群論的分岐理論を用いた固有値解析により明らかにした。しかしながら、任意の周期構造に対して、この k の値を解析的に求めることは現段階では不可能である。また、ここで扱っているハニカム構造の持つ対称性がダイヤモンドパターンであることは、前章に述べた通りであるが、この系の分岐経路は未だに解明されていないため、群論的に分岐モードを予測することは困難である。そこで、ユニットセルを構成すべきセルの数 k について、数値的に検討を行う。

ここで扱っている大変形問題においては、微視スケール問題であるユニットセルに、巨視スケールにおいて発生するひずみ増分に相当する変形を更新するべきであるが、本章の例では、座屈に至るまでの軸圧縮ひずみが1%程度と小さいので、巨視的には微小変形、微視的に大変形問題としてとらえ、ユニットセルに巨視スケールにおいて生じるひずみ増分を更新しない解析結果を示すこととする。

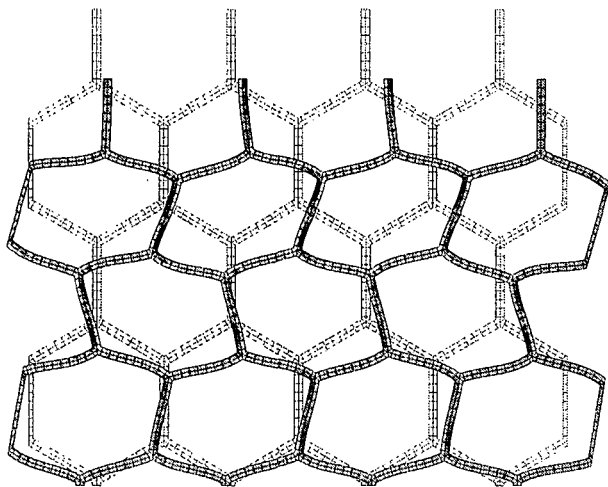


図-7 陽なモデルによるセル構造体の解析

5.1 陽な解析モデルによる解析

壁厚の等しい正六角形ハニカムは、変形が微小であるときは、等方的であるが、セル壁に平行な方向の圧縮により座屈する。1軸圧縮の座屈荷重に関しては、荷重に対して平行でないセル壁の曲げによる弾性拘束を受けるはり柱として解析的に求めることができ、その結果はゴムハニカムの実験結果と良い一致を示す¹⁾。

適切なユニットセルの検討に先立ち、セル構造体の座屈モードを確認しておくことは、有用であると考えられる。そこで、一軸圧縮を受ける正六角形ハニカムを、マルチスケール解析ではない陽な(通常の)要素分割を用いて、通常の有限要素法により解析を行った。しかしながら、ユニットセルに科される周期境界は、物理的には無限体を意味するため、比較対象とする陽な解析モデルは無限体とみなせるほど大きくあるべきであるが、ここでは、図-7に示す4節点四辺形要素960要素、1466節点から成るモデルを用いた。このモデルは、無限体とみなせるほど大きくはないため、当然、境界の影響を受ける。しかしながら、その変形モードはGibsonら¹⁾の実験結果と類似しており、以後の解析との座屈モードの定性的な比較には用いることはできると考えられる。なお境界条件として、上下の境界上の柱部材は回転を拘束し、両サイドの柱部材の幅は他の柱部材の半分なので、座屈を防止するためその外側の節点には相対的な変位を生じないような拘束を与えている。

図-7は、軸圧縮の平均ひずみが0.155のときの変形を表している。図より、荷重に平行な柱の中心が変曲点となり、荷重に平行な方向に隣り合うセル同士が、互い違いの方向にせん断変形するような変形モードを示す。このことから、一つのセルだけでは、周期性が満たされないことが、直観的にも理解できる。

なお、ここで用いた有限要素法は、仮想仕事式(4)を基礎式とする、有限変形を考慮できるものである。なお、セル壁の材料には、相対 Kirchhoff 応力の Jau-

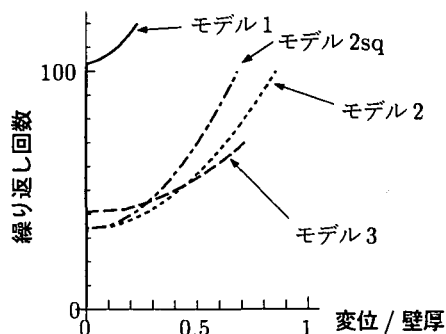


図-8 巨視ひずみ-変位曲線(モデル1~3)

mann 率 $\bar{\sigma}$ と変形速度テンソルが等方線形関係、すなわち、 C_L を Poisson 比が 0.3 となる等方線形弾性体の構成テンソルとすれば、

$$\bar{\sigma} = C_L : D \quad (18)$$

のような関係を持つ弾性体を仮定し、平面ひずみ問題として解析を行った。以後の解析では、すべてこの材料を用いることとする。

5.2 k^N 個のセルによるユニットセルの解析

図-6に示すような解析モデルを用い、正六角形のセル数が 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 個のユニットセル(モデル1, 2, 3, 4と呼ぶこととする)および図-5に示すモデル2sqのユニットセルの解析を行った。壁厚と長さの比 t/l は 1.17×10^{-1} である。

モデル1~4, 2sqのユニットセルに対して、巨視ひずみ増分を L_x^0 の(2,2)成分のみ -2×10^{-4} として繰返し与え解析を行った。用いた要素分割は、モデル1~3およびモデル2sqのユニットセルに対しては、一つのセル当たり、4節点四辺形要素は216、節点数は324であり、モデル4に対しては、セル一つ当たり108要素、216節点である。モデル1~3, 2sqの解析結果を、図-8に巨視ひずみに相当する繰返し回数と、代表点の e_1 方向の無次元化変位の関係により示す。また、モデル4に関しては、要素分割がモデル1~3と異なるため、単純な比較ができない。そこで、モデル4の解析結果については、図-9にモデル4と同等の要素分割により解析したモデル2,3の結果と併せて示す。この図において、モデル2とモデル4の結果は完全に一致している。また、図-10,11にそれぞれのユニットセルの座屈後の変形形状を示す。

(1) 適切なユニットセル

図-8から、モデル1~3の一次座屈に限れば、モデル2の座屈荷重が最も低いことが分かる。また、図-9からは、モデル2とモデル4の座屈荷重が一致していることが分かる。

以上の結果から、 4×4 個以下のセルから構成される微視スケール問題の中で、ポテンシャルを最小にする最

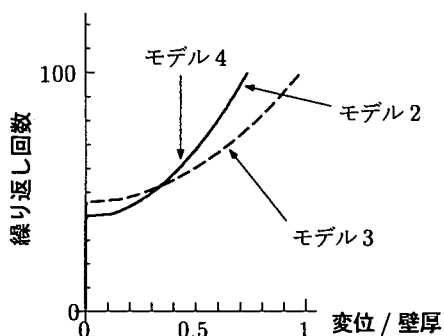


図-9 巨視ひずみ-変位曲線 (モデル4)

小の単位構造は 2×2 個のセルから成るユニットセルであるといえる。また、座屈後の変形モードに関しては、図-10にあるように、モデル2もしくはモデル4による結果が、Gibsonら¹⁾の解析および実験、図-7の陽な有限要素解析の結果と類似していることが分かる。

(2) モデル2とモデル2sqの等価性

図-8から、モデル2とモデル2sqにおける座屈荷重は一致する。また、図-10と図-11から、両者の座屈後の変形モードは酷似していることが分かる。

モデル2のユニットセルの総自由度数は1203、周期境界を考慮したときの、独立な自由度数は1076である。一方、モデル2sqでは、総自由度数は1109であるが、周期境界を考慮したときの独立な自由度数は1076であり、モデル2と一致する。これは、モデル2とモデル2sqが物理的に等価であることを意味しており、座屈荷重(ひずみ)が一致し、座屈後の変形形状が類似していることを裏付けている。また、このことは、本論文で提案した非直方体として設定された微視スケール問題の妥当性を示す。

5.3 k^1 個のセルによるユニットセルの解析

前述したように、ここで扱っている問題は平面問題であるため、 k^2 個のセルを考えなければならない。したがって、セル数は2乗のオーダーで増加するため、検討できる k の値は低く限定されてしまう。しかしながら、前節で取り上げた、正六角形セルの一軸圧縮に関しては、荷重と直交する方向に隣り合うセル同士は、同じ変形モードを呈するため、 $k \times 1$ 個のセルによる解析を行った。用いたモデルは、前節のモデル4と同等の要素分割であり、周期境界条件の考え方、巨視ひずみの与え方も前節と同様である。

図-12に、用いたセル数に対する、座屈に至るまでの繰り返し数を示す。図中、破線は同等の要素分割によって解析した場合のモデル2の座屈時の繰り返し数を意味し、偶数個のセルを用いた解析では、全てこの値に一致する。また、奇数個のセルを用いた解析でも、セル数が増加するにつれて、この値に漸近している。

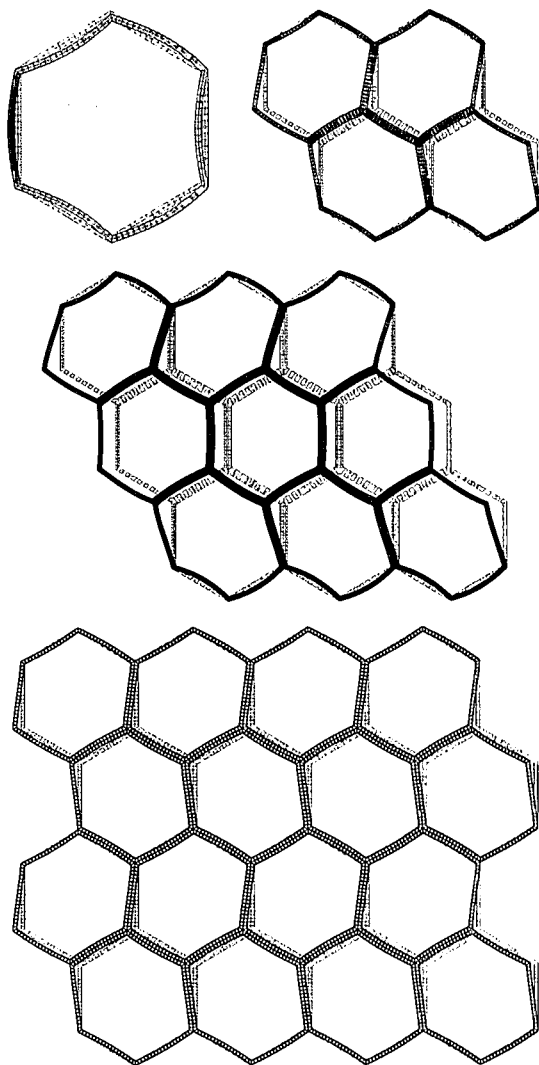


図-10 各ユニットセルの座屈形状

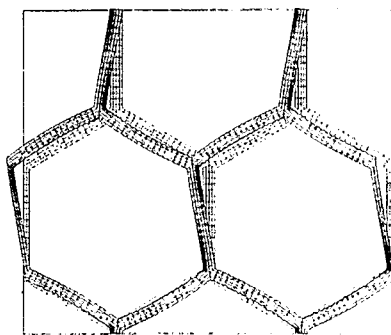


図-11 モデル2sqの座屈形状

図-13に4, 5, 6個のセルを用いたユニットセルの座屈後の変形モードを示す。図-10, 13より、奇数個のセルを用いた場合、中心のセルのみ、モデル1のような変形モードを呈し、残りの偶数個のセルはモデル2の変形モードのように、となりあうセルが互い違いにせん断変形するような変形モードとなることが分かる。したがって、セル数が増加すれば、中心の一つのセルの影響が相

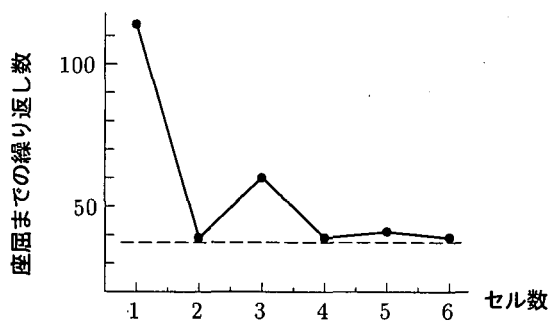


図-12 セル数による座屈荷重の変化

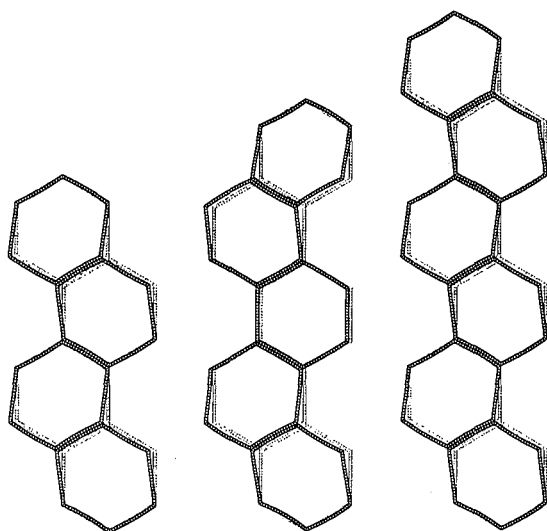


図-13 k^1 個のセルから成るユニットセルの座屈形状

対的に小さくなるため、偶数個のセルを用いたユニットセルの解に漸近すると考えられる。

以上の結果より、ここで検討した6個以下のセルから構成される微視スケール問題の中で、ポテンシャルを最小にする最小の単位構造は2個のセルから成るユニットセルであるといえる。また図-12より、 $k \rightarrow \infty$ において座屈時のひずみがモデル2のそれに収束することが予想される。したがって、正六角形セルの分岐解析における最小の単位構造はモデル2であると考えられる。

6. 巨視ひずみの更新

前章までの解析には、巨視ひずみがそれほど大きくなりえないとして、ユニットセル自身の大きさは一定として解析を行った。しかしながら、一般的な大変形問題に対しては、ユニットセルの形状に巨視ひずみを反映させる必要があると考えられる。

通常、ユニットセルのような代表体積要素に対する釣合式の解 $\mathbf{u}$ は、一定ひずみテンソル $\mathbf{E}$ を用いて

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^1 \quad (19)$$

と表される。そこで、ある巨視ひずみ増分に対して、ミ

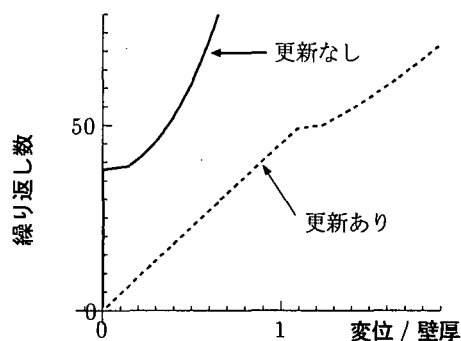


図-14 巨視ひずみ-変位曲線: ユニットセルの更新

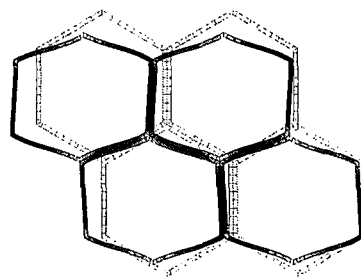


図-15 巨視ひずみを更新したユニットセル

クロ変位 $\mathbf{u}^1$ を求め、次の巨視ひずみ増分に対する解析に先立ち、 $\mathbf{u}$ によって、ユニットセルの変形を更新し、巨視スケールの変形を考慮した解析を行った。数値解析の際の具体的手順としては、周期性を科すべき対応する節点を i, j 、それぞれの点の変位を $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ 、現配置を $\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j$ とすると

$$\dot{\mathbf{u}}_i - \dot{\mathbf{u}}_j = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \quad (20)$$

のような拘束を与えた。

この解析を、セル1個当たり60要素120節点の要素分割の施したモデル2対して行った。ただし、前章で行った解析では座屈時のひずみが小さいため、巨視ひずみの更新の影響が小さい¹⁰⁾。したがって、ここでは巨視ひずみ増分として、 $\mathbf{L}_x^0$ の(1,1)成分を 0.7×10^{-3} 、(2,2)成分を -1×10^{-3} として繰り返し与え、解析を行った。

図-14に、ユニットセル形状の更新を行った場合と、行わない場合の両者について、巨視ひずみに相当する繰り返し数と代表点の無次元化変位の関係を示す。また、両ケースでの座屈後の変形モードを図-15, 16に示す。この例において、ユニットセルの形状の更新を行う場合、座屈時の巨視ひずみは5%程度と大きいいため、更新を行わない場合の座屈時の巨視ひずみとは20%と差が大きくなった。また、座屈後の変形モードについては、両者は定性的には一致する。

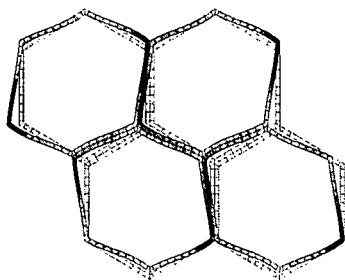


図-16 巨視ひずみを更新しないユニットセル

7. おわりに

セルの座屈を考慮したセル構造体のマルチスケール解析を目的とし、大変形、座屈問題に均質化法の適用するための定式化、およびアルゴリズムを示した。また、従来から指摘されてきた、座屈問題を均質化法で扱う場合の代表体積要素であるユニットセルの適切なモデルの選定の問題に関して、正六角形セル構造体を例に数値的な検討を行った。その結果、セル構造体の持つ周期性、および座屈荷重、座屈モードを考慮することによって、適切なユニットセルが選択できることを示した。以上のことから、均質化法によるセル構造体のマルチスケール解析の可能性を示すことができた。

著者らは、ここで展開したマルチスケール解析は、セル構造体という特殊な材料だけでなく、一般の鋼や地盤材料などにおいて現象学的に材料非線形として捉えられている特性を、微視構造の不安定現象として説明するための手段となりうると考えていることを付け加えておく。

謝辞：本研究のために、東京大学地震研究所地震予知情報センターの計算機システムを利用させて頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F. (大塚正久訳) : セル構造体, 内田老鶴圃, 1993.
- 2) Gent, N. and Thomas, A.G.: The deformation of foamed elastic materials *J. appl. polymer science*, Vol.1, pp.107-113, 1959.
- 3) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: The mechanics of three-dimensional cellular materials, *Proc. R. Soc. Lond.*, A 382, pp.43-59, 1982.
- 4) Chapman, A.M. and Higdon, J.J.L.: Effective elastic properties for a periodic bicontinuous porous medium, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42, No.2, pp.283-305, 1994.
- 5) Warren, W.E., Kraynik, A.M. and Stone, C.M.: A constitutive model for two-dimensional nonlinear elastic foams, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.37, No.6, pp.717-733, 1989.
- 6) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, 1978.
- 7) Bakhvalov, N. and Panasenko, G.: *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- 8) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 9) 斉木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏: 局所的な座屈安定性を考慮したセル構造体のマルチスケール解析, 第48回理論応用力学講演会講演論文集, pp.387-388, 1999.
- 10) 斉木 功, 寺田賢二郎, 池田清宏: 局所的な不安定性を考慮したセル構造体のマルチスケール解析におけるユニットセルの適切なモデルに関する一考察, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, 1999.(掲載予定)
- 11) 寺田賢二郎, 堀 宗朗, 京谷孝史: 非均質材料のためのマルチスケール解析モデリングについて, 応用力学論文集, Vol.1, pp.177-184, 1998.
- 12) Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, No.19, pp.2709-2733, 1994.
- 13) Triantafyllidis, N. and Bardenhagen, S.: The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.44, No.11, pp.1891-1928, 1996.
- 14) Müller, S.: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. rat. mech. anal.*, 99, pp.189-212, 1987.
- 15) Oguni, K., Hori, M. and Ikeda, K.: Analysis on evolution pattern of periodically distributed defects, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, No.25, pp.3259-3272, 1997.
- 16) 寺田賢二郎, 京谷孝史, 斉木 功: 無数の亀裂を有する材料のマルチスケール解析, 第48回理論応用力学講演会講演論文集, pp.385-386, 1999.
- 17) 寺田賢二郎, 松井和己, 斉木 功, 菊池 昇: 非線形マルチスケール構造解析のための一般化アルゴリズム, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, 1999.(掲載予定)
- 18) Murota, K., Ikeda, K. and Terada, K.: Bifurcation mechanism underlying echelon-mode formation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 170, pp.423-448, 1999.

(1999年4月23日受付)