

ボクセル被覆を用いた3次元ソリッド大変形解析

The Large Deformation Analysis of Solid Structure Using Voxel Cover

鈴木克幸¹⁾・中西克嘉²⁾・大坪英臣³⁾

Katsuyuki SUZUKI, Katsuyoshi NAKANISHI, and Hideomi OHTSUBO

- 1) 正会員 Ph.D. 東京大学助教授 新領域創成科学研究科 環境学専攻(〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)
2) (株)アルモニコス (〒430-0927 静岡県浜松市旭町 11-1 プレスタワー12F)
3) 工博 東京大学教授 工学系研究科 環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

The concept of cover is employed from manifold method into voxel analysis and applied to large deformation analysis of 3D solid structure. To overcome the problem of locking due to distorted element in large deformation analysis of solid structure, remeshing technique using voxel cover is proposed. Also, the mapping technique of displacements and stresses when remeshing is carried out is discussed. Finally, the treatment of the boundary conditions is discussed, and the technique of balancing forces at the displacement boundary conditions is proposed. Finally, the separate analysis model and geometric model whose shape is updated as the analysis proceed are used for the easy re-generation of analysis model.

Key Words : Manifold Method, Nonlinear Analysis, Large Deformation, Meshless Method

1 緒言

連続体に対する数値解析法の代表である有限要素法(FEM)は、これまで理論面、応用面の絶妙なバランスの基に発展し、CAEのツールとして多くの実績を積んできた。しかしながら近年、複雑化、多様化する解析課題に対してモデル生成に膨大な手間を要し、急速に進歩する計算機環境を十分に活用できず3次元化が進むCADなどの周辺技術に遅れをとるなどその調和が崩れ始めている。このような問題意識から、近年要素を用いないで解析を行う「メッシュレス法」と呼ばれる一連の手法が提案されている¹⁾。しかし、ほとんどの研究はその実装上のさまざまな問題から数学者のアカデミックな領域を出ておらず、実用化にはほど遠い。また、逆に実用面の有効性に注目したボクセル解析法などのアプローチもあり、多少精度に目をつぶったラフな解析などに有効であるが、形状近似の問題、自由度の粗密付けによる精度向上などは理論的なバックグラウンドが必要である。

筆者らが提案している有限被覆法(FCM)²⁾は、Manifold法の「被覆」という概念を導入することによって任意形状の物体を定形のメッシュによって解析できる理論的な枠組みを持ちつつ、実装上はボクセル情報を応用することによって解析モデル生成を容易に行える手法であり、精度の検討や詳細に知りたい部分に多くの自由度を割り当てるなどの操作も可能である。この論文では、このFCMのモデル生成が容易に行えるという点に注目し、非線形問題(大変形、準静的問題)への拡張を試みる。

一般に、Lagrangeの定式化によるFEMで大変形問題を扱った場合、変形が進むにつれて要素がつぶれてしまい、ある時点でロッキングがおりそれ以上の解析が不可能になる。そのため、それ以上解析を続けるにはリメッシュを行う必要があり、いくつかの非線形解析コードでは形状をゾーンと呼ばれる領域に分割し、その領域でメッシュを再生成することによりこれを行っている³⁾が、ほとんどの適用例は2次元であり、3次元の複雑な形状の物体に対してはゾーニングを適用するのは不可能である。

ALE(Arbitrary and Lagrangean and Eulerian)法^{3,4)}はこの要素のつぶれを防ぐためリメッシュを動的に行っていく方法であるが、基本的にメッシュのトポロジーは変更できず、またメッシュは境界形状に適合していなければならないため、非常に大きな変形には対応できない。また、メッシュをどのように更新していくかの明確な指針はなく、現在様々な方法が用いられているが一長一短で、任意の3次元領域に適用できるものは少ない。

塑性加工などの分野では、しばしばEulerの定式化に基づく大変形解析が行われる⁵⁾。すなわち、空間固定のメッシュを用いることによって前述のような要素のつぶれによるロッキングは回避可能である。しかし一方において、このアプローチはメッシュ境界と物体境界が一致しないため構造問題で通常用いられるような複雑な形状を表現し、境界に対して境界条件を与えるという処理が複雑になり、現在は非常に単純な形状の問題に適用されているにすぎない。また、構造にEulerの定式化を用いるのは対流項の存在などの問題もある。

FCM の「被覆設定の任意性」は空間に対してだけでなく、時間軸においても有効であることを利用すると変形途中の任意の時点で、性質のよい直交格子状メッシュに設定しなおして解析を再開することができる。すなわち、図-1 に示すように Lagrange の定式化に基づき大変形解析を行い、ある程度変形が進んで行ったときに、再び直交格子状のメッシュを切り直し、再び Lagrange の定式化に基づき解析を行う。この直交格子状メッシュの生成は、通常の有限要素メッシュの生成に比べてはるかに容易に、しかも確実に行うことができる。この直交格子メッシュは3次元空間では画像処理の用語を用いてボクセルと呼ばれ（以下 M この意味で「ボクセル」を使う。）、通常のメッシュ生成が困難な複雑な形状の3次元ソリッドに対する有効な解析手法として注目を集めている⁹⁾。

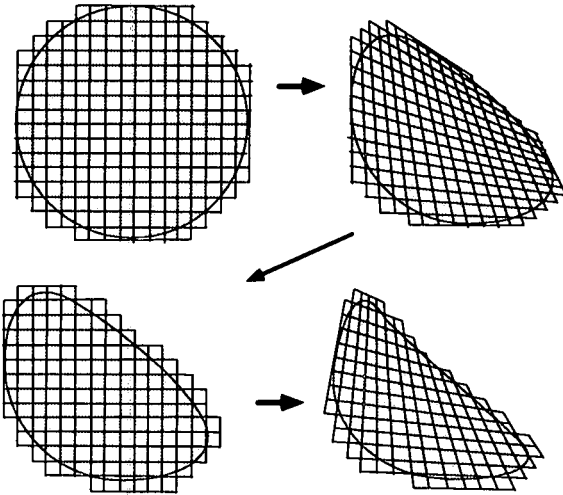


図-1. 大変形解析における被覆の再生成

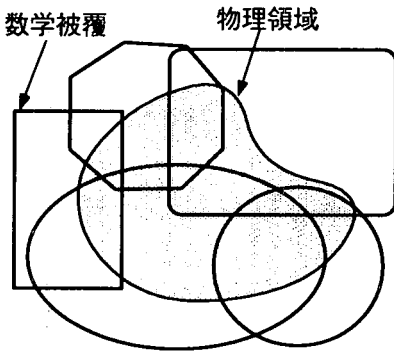


図-2 マニフォールド法の概念

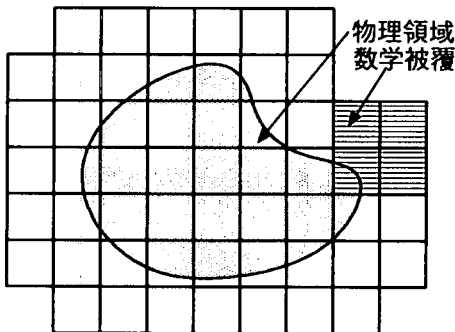


図-3 有限被覆法における物理領域と数学被覆

2 有限被覆法⁷⁾(FCM)

2.1 有限被覆法 の概念

有限要素法が解析対象の物理領域を「要素」という部分領域に分割し、その領域において近似関数を定義するのに対して、Manifold 法⁸⁾においては実際に物体が存在する「物理領域」と近似関数の定義域である「数学被覆」を全く独立に定義する（図-2）。被覆とは、多様体理論で言うところの位相構造と微分構造が保存されるような任意形状の領域であり、この被覆は時間的にも独立に定義することができる。

この考え方は非常に一般的な概念で、有限要素法をも包括するものであるが、実用上どのような被覆を用いればよいであろうか。大西ら⁹⁾は、6角形の被覆を用いることによって不連続体の解析を行っている。FCM では、3次元ソリッドに対する拡張性の容易さを考慮し、図-3 に示すように2次元においては正方形、3次元においては立方体（すなわちボクセル）の被覆を用いる。この被覆形状および被覆での重み関数、被覆関数によっては関数の一次独立性が崩れ、解析が不可能になることがあるが、鈴木ら⁷⁾は任意の被覆関数に対して関数の一時独立が保証される重み関数を提案してこの問題を回避している。（大西らの6角形被覆では、重み関数と被覆関数を掛け合わせたものが完全多項式になるためこのような問題は発生しない。）この立方体（正方形）被覆の採用により、被覆の生成が非常に容易に行える（これは特に3次元で大きなメリットとなる）のみでなく、メッシュレス解析において常に問題となる領域の積分が容易に行うことができる。

2.2 有限被覆法の近似関数

FCM においては、各数学被覆において、変位は以下のように近似される。

$$u(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) w_i(x) \quad (1)$$

ただし、

$f_i(x)$: 被覆関数

$w_i(x)$: 重み関数

であり、積分を行う必要のある物理領域は $k=4$ （2次元の場合）または $k=8$ （3次元の場合）となる。

重み関数は、 U_i を各数学被覆と物体領域の共通領域（これを物理被覆と呼ぶ）とすると、以下の条件を満足する必要がある。

$$\begin{cases} w_i(x) \geq 0 & x \in U_i \\ w_i(x) = 0 & x \notin U_i \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum w_i(x) = 1 \quad (3)$$

(3)式の条件は、すべての重み関数を足し合わせると1となる（逆にいえば、1をいくつかの関数に分解した）という意味で Partition of Unity の条件¹⁰⁾と呼ばれる。また、被覆関数は基本的に任意に設定できるが、これらの関数は、

被覆ごとの被覆関数と重み関数の積がお互いに一次独立性を保つように定義しなければならない。この論文では被覆関数として定数関数のみを考えるため、重み関数として以下に示すような双 1 次関数 (2 次元の場合を図-4 に示す) を用いるが、被覆関数として 1 次以上の関数を用いるときには文献 7) に示されているような重み関数を用いる必要がある。

$$w(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(x_i) \quad (-1 \leq x_i \leq 1) \quad (4)$$

ただし N は空間の次元数で p は以下のようにになる。

$$p(x) = \begin{cases} 1-x & (0 \leq x \leq 1) \\ 1+x & (-1 \leq x < 0) \end{cases} \quad (5)$$

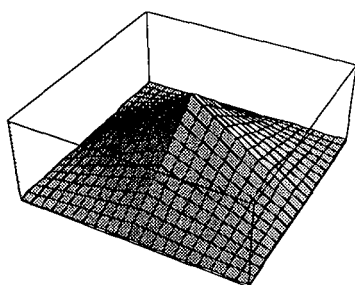


図-4 重み関数 (2 次元)

被覆関数としては前述のように定数関数を用いる。これにより、FEM の 1 次アイソパラメトリック要素と同等の近似関数になる。

この近似関数を弱形式に代入し、Galerkin 法を適用することにより解くべき偏微分方程式の解を求めることができる。物理領域のみに対して領域積分物理領域にただし、具体的な積分の方法 (形状ボクセルを用いて物理領域のみに対して行われる)、境界条件の適用法 (形状ボクセルに対してペナルティ的に課される) は文献 7) を見られたい。

3 大変形問題への適用

3.1 大変形解析

緒言に述べたように、この FCM の近似関数を用いて変位法に基づく非線形解析 (大変形、準静的) を行う。非線形解析解の定式化を一から行うことはページの都合上避ける。非線形解析に対して、詳しくは文献 11) や 12) を見られたい。応力テンソル、歪みテンソルとして第 2 Piola-Kirchhoff の応力テンソルおよび Cauchy-Green の歪みテンソルを用いる。構成則としては、ここでは主に大変形の非線形問題に対しての FCM の有効性を議論するのが主目的であるので neo-Hookean 超弾性体を仮定する。非線形の連続体の定式化に (1) 式の近似関数を代入することによって離散化し、非線形方程式を導出し、Newton-Raphson 法を用いて反復的にこれらを解くことによって変位を求めることができる。詳しいアルゴリズムは後述する。アッ

プデートには非線形 FEM で一般的に用いられる updated Lagrangian の定式化に基づいて解を求めるが、この際に Lagrange の定式化による FEM による非線形解析と異なってくるのは、大きく分けて以下の 3 点である。

- ・ リメッシング (被覆の再生成)

基本的に FEM におけるメッシュと FCM における被覆とは 1 対 1 に対応するわけではないが、対応関係があるためここでは被覆の再生成をリメッシュと呼ぶ。リメッシュは、FEM における大変形解析でもっとも難しい部分であるが、FCM では形状モデルを別に持つためこの処理を容易に行えることを示す。

- ・ 変位、応力値の受け渡し

リメッシングによりメッシュ (被覆) を更新した際、古いメッシュの情報から新しいメッシュにおける応力、変位などの値を求める必要がある。

- ・ 境界反力の処理

FEM と異なり、その点での反力や変位がダイレクトに出る節点が境界上にないため、この境界反力の処理が通常の有限要素法に比べ非常に複雑になる。

それぞれの問題点について、検討を行う。

3.2 形状モデルとリメッシング

通常 FEM においては、要素を組み合わせたメッシュそのものを形状データとして用い、変形もその節点の変位として表現している。すなわち形状モデル = 解析モデルである。一方 FCM を用いた解析では図-5 に示すように、形状モデルとボクセルによる解析モデルを別個に持ち、解析を行っていく。

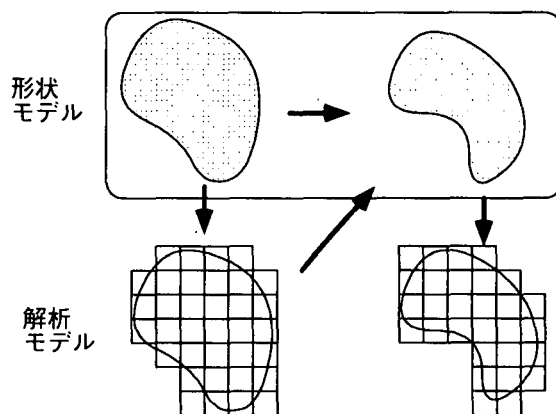


図-5 形状モデルと解析モデル

すなわち、形状モデルをもとにボクセルを生成し、それを用いて解析を行う。ここでは形状モデルとして STL フォーマットデータを用いている。STL とは三角形ポリゴンおよび法線ベクトルよりなるデータで、非常に簡単に扱える一方で形状表現としてはポリゴン表現であるため正確さに欠ける。ただし、ここで用いるような解析のためのボク

セル生成のためには十分である。次に、用いられたボクセルデータを基に非線形解析を行い、変位の空間分布の関数を求める。この関数を用いて、ポリゴンの頂点の変形後の位置を計算し、形状モデルのデータをアップデートする。ある程度変形が進んだところで STL データから再びボクセルを生成し、それを被覆として用いる。

もともとが立方体の形状をしているため要素のつぶれに対してはロバストな形状関数であるが、このリメッシュの処理を行うことによって任意の形状のソリッドに対して非常に大きな変形を追跡することができる。ただし、ポリゴンのトポロジー自体は変化しないため、ポリゴンの形状の影響でのロッキングが発生する可能性がある。これに対しては、形状ポリゴンの細分割などの処理が必要であるが、ここでは行わない。

形状モデルを解析モデルと別々に持つことにより、境界条件は形状モデルに与えればそれが自動的に解析モデルに反映され、解析結果も解析モデルに基づき有限要素メッシュとともに表示されるのではなく、形状モデルに応力値などに応じた色づけをすることによって行え、大規模な問題の解析結果でも、容易に様々な方向から見などの処理が行える。

また、接触が発生するような解析に対して、通常 FEM では要素と要素の干渉をチェックすることにより接触判定を行っているが、このように形状モデルを別に持つことによって形状モデル同士の干渉をチェックすることにより接触判定を行える。形状モデルのポリゴンが要素に比べて大きければ、これは接触判定の計算効率を大幅に向上させることになる。ただし、この論文では接触の解析は行わない。

3.3 変位、応力値の受け渡し

上記のように、リメッシュの際に変形状態のメッシュとは無関係な定形メッシュを生成した後に、新たに生成された解析モデルの各被覆（節点）、各要素は変形状態の前のモデルからそれぞれ変位と応力状態を引き継がなければならない。これは図-6 のように行うことができる。すなわ

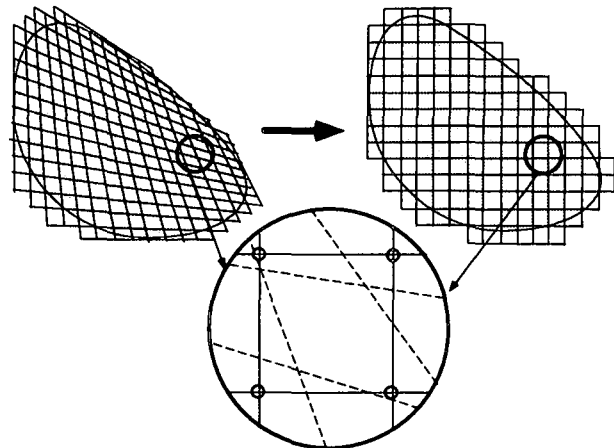


図-6 リメッシュの際の変位・応力値の受け渡し

ち新たな被覆の変位は被覆中心の座標の位置の変位を変形状態のモデルを使って内挿補間して反復によって求める。同様に、要素内の応力状態は積分点での座標の位置の応力を同じように補間して求める。変位、応力を求めたい点が元のメッシュにおけるどの要素（被覆）に属するかは、その x, y, z 座標から候補となる要素を何個か選び、それらに対してその座標が要素内にあるか外にあるかをチェックすることによって行う。

なお、リメッシュを行った後のモデルは応力状態を引き継いでいるとは言え、それは「前段階の変形状態のモデル」での平衡状態での各点での値を引き継いだに過ぎず、系全体としては釣り合い状態から多少のずれがある。そのため次の荷重／変位増分を与える前に再度系全体を平衡状態にしなければならない。これには加重増分の際と同様に、Newton-Raphson 法を用いた。

また、新たなモデルの被覆の中には、変形状態の物体の外部にあって内挿できない場合がある。このような場合は、新たな被覆のうち内挿できなかった被覆の近傍の被覆の変位を用い、外挿によって仮の初期値を与え、前述のように平衡状態に達するまで反復を繰り返して値を改善する。

ここでは超弾性の構成則を用いた解析のみを行ったので応力の受け渡しの際の誤差は大きな問題とならないが、塑性等を考慮する場合にはこれが問題となる可能性もある。

3.4 境界条件と境界反力の処理

境界条件は、図-7 に示すように変位拘束、荷重ともに以下のように与える。すなわち、被覆の重なり合う部分（ここでは1つのボクセルと解釈できる）に(a)のように変位の拘束条件 $\bar{u}(x)$ が境界 Γ_u 上にある場合には

$$u(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) w_i(x) = \bar{u}(x) \quad \text{on } \Gamma_u \quad (6)$$

の条件が自由度間への線形の拘束として導入される。これは、ペナルティとして容易に実装することができる。

また、(b)のように、境界荷重 $\bar{t}(x)$ が境界 Γ_t 上にかかっている場合には、以下のように弱形式の積分を行うことによって各自由度に対する等価な荷重にすることができる。

$$\int_{\Gamma_t} u \cdot \bar{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \left(\sum_{i=1}^k f_i(x) w_i(x) \right) \cdot \bar{t} d\Gamma \quad (7)$$

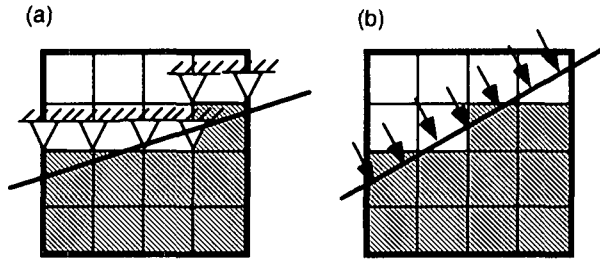


図-7 境界条件の付加

ところが、非線形解析の場合は上記の変位拘束に対して内力と外力の釣り合いを考える必要がある。すなわち、FEMでは変位拘束は節点に対して与えられるため、単純に拘束される等価節点力に大きさが等しく逆向きの力として求められる。ところがFCMではこれが成立しないため、特殊な処理が必要になる。

例えば、図-8のように4節点1要素のFEMモデルの上面に一様な圧力荷重1を加える問題ではまず、上面で圧力荷重を積分した結果(a)のように各節点に外荷重と等価な節点荷重が割り振られる。このような境界条件でこのモデルを解いた場合、以下のように応力に形状関数の重みをかけて要素全体で積分することにより、等価内部節点力が求められる(図-8(b))。そして、FEMでは変位拘束を受ける節点での残差は常にゼロになる。すなわち、変位を拘束される節点に関して上のように求められた等価節点力は、図

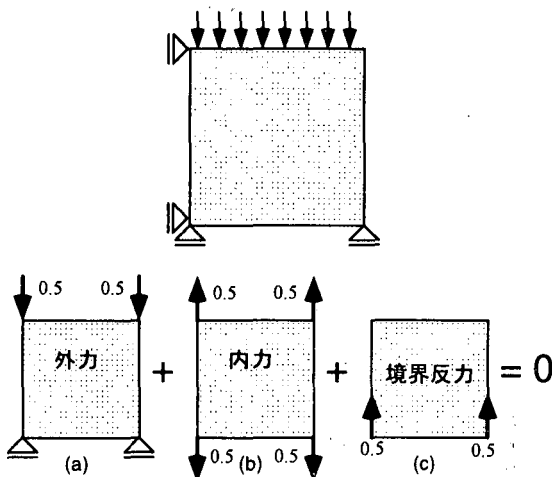


図-8 FEMにおける反力

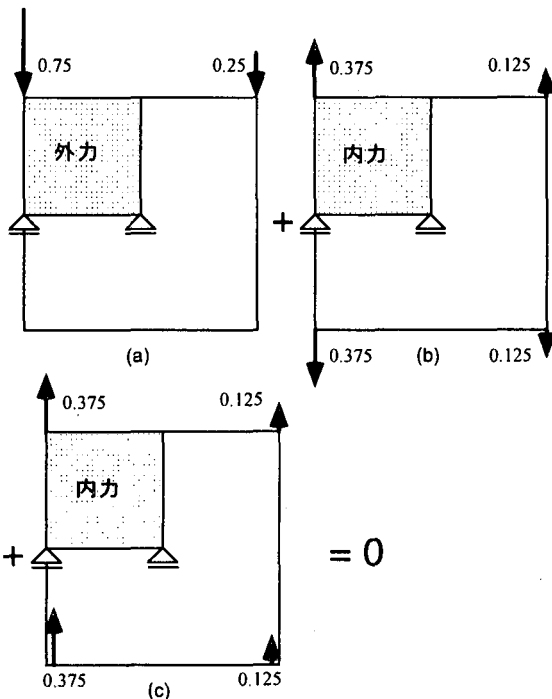


図-9 FCMにおける反力

中の(c)のような「反力」によって打ち消されると考える。

ところが、FCMの場合はこれが必ずしも成り立たない。図-9のように数学被覆が物理領域に一致しない場合を考える。大きな四角形が4つの数学被覆が重なる領域である。それぞれの被覆をその中心点(図-9では大きな四角形の各頂点)で代表させると、等価な外力は(a)のようになる。FEMの等価節点力に相当する「等価被覆力」はFEMの場合同様に、応力に重み関数による重みをかけて要素全体で積分することにより(b)のように求められる。ここでは線形問題を仮定しているため、(a)と(b)の差の(c)が反力によって打ち消されるべき力である。

非線形の解を求めるためのNewton-Raphson反復過程においては、まず前のステップの反復計算で得られた解によって等価節点(被覆)力ベクトル T を求め、外力ベクトル F との差を残差

$$R = T - F \tag{8}$$

として求め、次のステップで用いる。

通常のFEMでは、変位拘束が与えられた節点の変位は既知であり、実際の計算では連立方程式の自由度から除かれるため、非線形計算の解析を通じて反力の値を明示的に求める必要はない。すなわち、(8)式の各ベクトルには変位拘束を受ける節点の自由度は含まれないため、 R は正確に等価節点力と外荷重との差を表している。

これに対しFCMでは、図-9の様に数学メッシュ内部に拘束を受ける物体境界が存在する場合に、関連する被覆(節点)の変位は既知ではなく、対応する自由度を方程式から除くというわけにはいかない。したがって、(8)式の各ベクトルは変位拘束を受ける被覆に対応する自由度を含んでいるため、計算された応力状態から被覆に加わる反力を明示的に求め、それを残差 R から差し引いて真の残差を求める必要がある。例えば、固定変位境界条件に関連のある被覆(節点)であっても、必ずしもその被覆自身が完全に固定されるというわけではないから、残差の逆向きの力がそのまま反力と見なせない。

これに対しては、2つの方法が考えられる。1つは境界上の要素の残差をキャンセルしてしまう方法である。反力が関与しているのは境界を含む要素の節点であり、これらの節点(被覆)の自由度の残差を各反復過程で無条件に0にしてしまうことによって上記の問題は解決する。これは問題のサイズに比べて要素サイズが十分小さければ、その反力の影響も比較的小さく問題ないと思われるが、そうでない場合に精度上問題が出る事が考えられる。そこで、ここでは残差には手を加えずに系が平衡状態に達するまで反復計算を続ける方法を考える。この場合通常通り残差ノルムを収束判定の基準にすると、当然収束することはない。そこで残差の変化率が十分小さくなったところで平衡状態と見なして反復計算を抜ける。しかし、これらは近似であり、精度の面で問題がないかは今後の検討課題である。

3.5 非線形解析の流れ

FCMによる非線形解析全体の流れは以下のようになる。
ここで、

X : 初期の被覆の Geometry
 x : 現在の被覆の Geometry
 u : 被覆関数の係数ベクトル
 K : 接線剛性マトリクス
 R : 残差ベクトル
 T : 等価被覆力ベクトル
 F : 等価外力ベクトル
 $\bar{F}$: 単位等価外力ベクトル
 λ : 荷重増分パラメータ

である。

初期化: $F=0, x=X, R=0$

LOOP

IF (リメッシュが必要)

解析モデルの再構築

変位、応力値の受け渡し

$\lambda = \lambda + \Delta\lambda$

荷重境界条件処理

$\bar{F}$ を評価

K の評価

強制変位境界条件処理

$\bar{F}$ を評価

変位拘束行列によるペナルティ付加

$R = R - \Delta\lambda \bar{F}$

LOOP (Newton Raphson 法)

Solve $Ku = R$ (共役勾配法)

被覆の Geometry 更新 $x = x + u$

$F = \lambda \bar{F}, T, K, R = T - F$ を計算

END LOOP

形状モデル (ポリゴン) の更新

荷重・変位増分の結果を出力

END LOOP

4 解析例

最後に、この手法の有効性を例題を用いて示す。物性値としては、Lame の定数 $\lambda=100, \mu=100$ の超弾性体を用いた。

まず、図-10 のような物体の下面を固定し、上面に強制変位を与えた場合を考える。外形状は単純であるが、穴がたくさん空いており、このような穴が空いている非凸な形状は通常の有限要素解析を行う場合メッシュ生成に失敗することが多い。これを、初期形状に対する解析ボクセルを空間を $20 \times 12 \times 20$ 分割し、さらにその解析ボクセルをそれぞれ $4 \times 4 \times 4$ の形状ボクセルに分割して解析を行った。解析の結果を図-11 に示す。変形は実寸で表現している。全6増分ステップのうち、ちょうど真ん中の4ステップ目の始め (図-11 では(b)と(c)の間) にリメッシュを行って

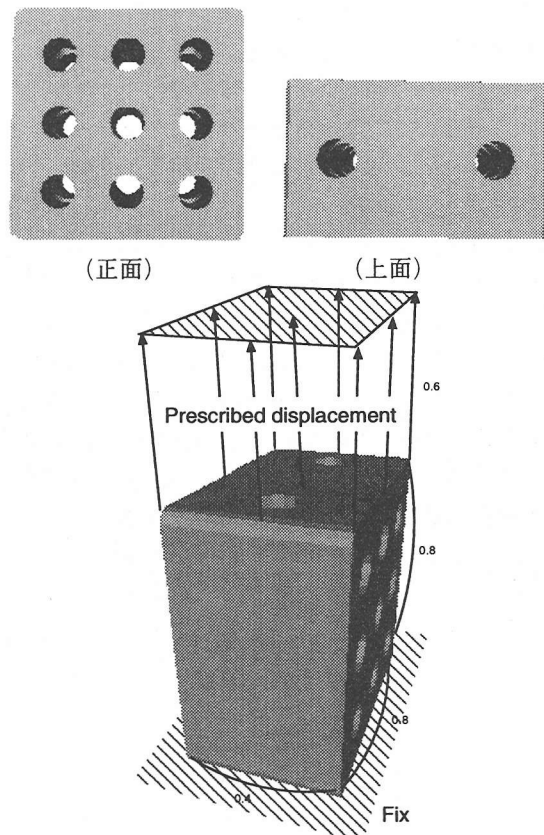


図-10 解析例 1

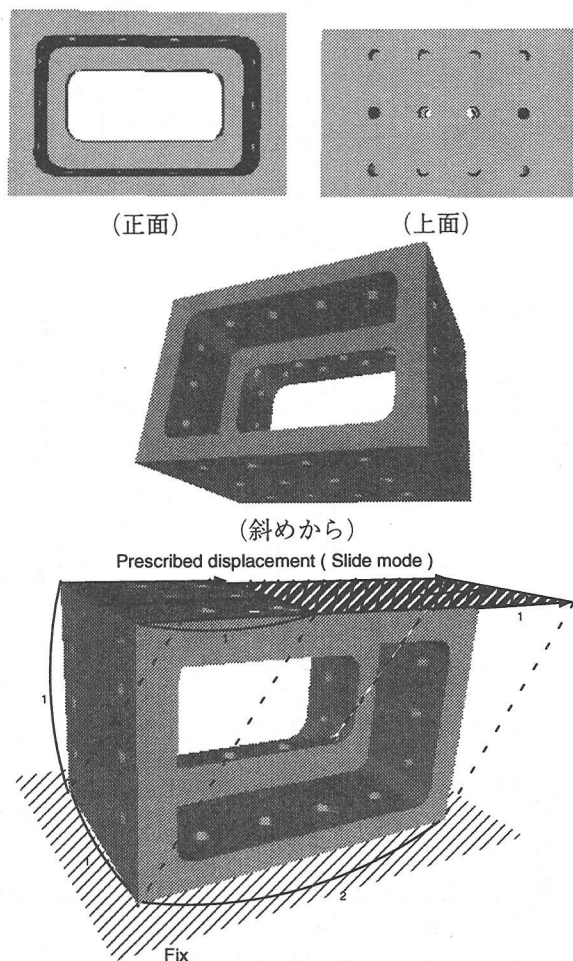


図-12 解析例 2

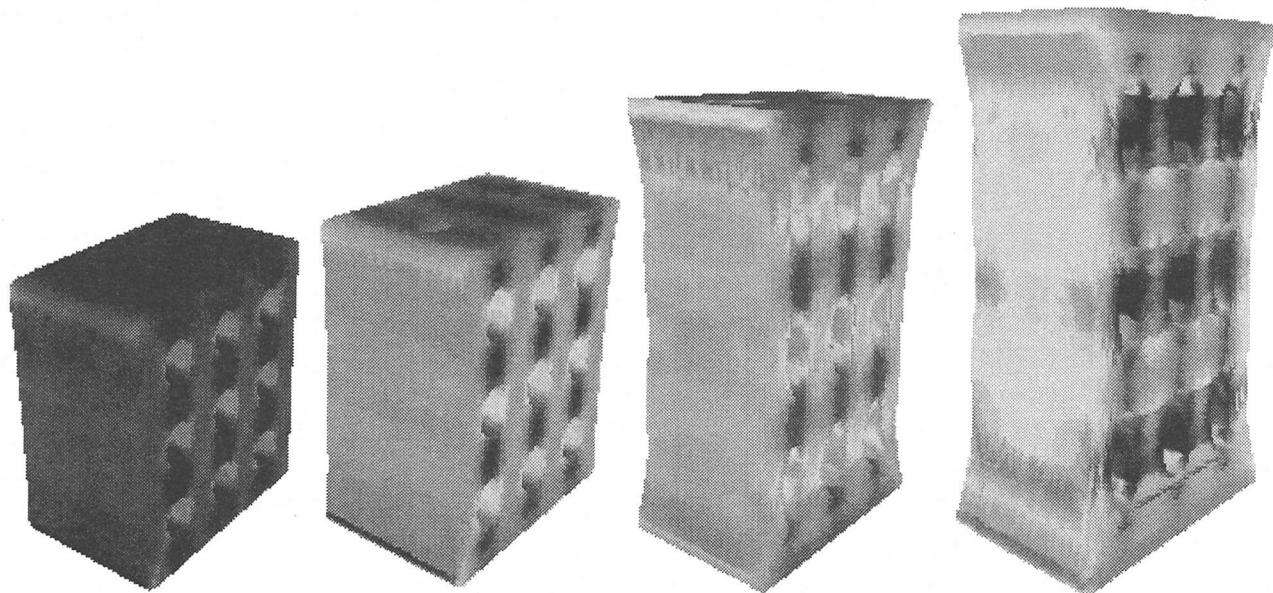
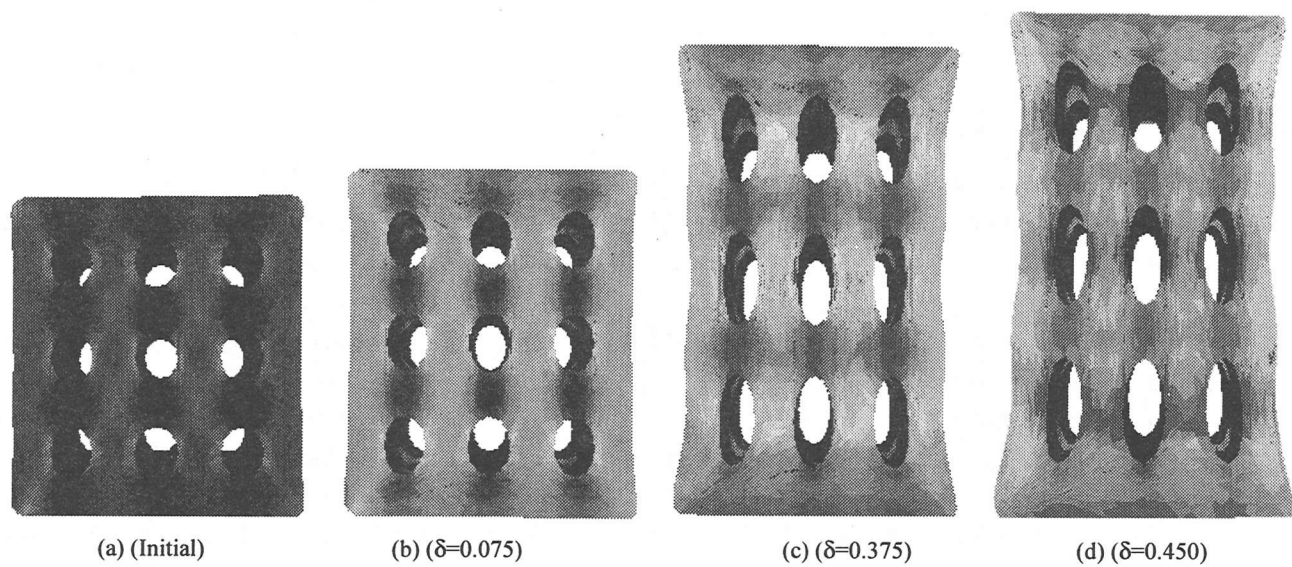


图-11 解析結果 (例題 1)

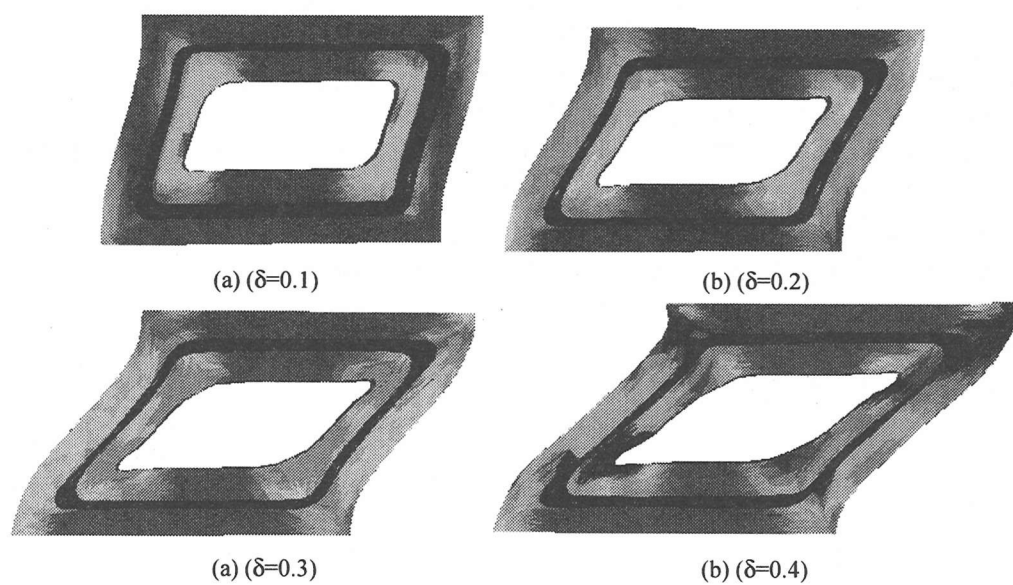


图-13 解析結果 (例題 2)

る。解析結果は増分ステップ毎の途中結果の幾つかを取り出して示してある。解析時間は Pentium II 400MHz の PC で約 6 時間であった。

次に、図-12 に示すような対象に対して下面を固定し、上面を横方向に強制変位を与えた例を考える。初期ボクセルは、解析ボクセル $20 \times 10 \times 20$ 、形状ボクセルは $4 \times 4 \times 4$ である。全 8 増分ステップのうち、偶数回目の 2、4、6 ステップの始めにそれぞれリメッシュを行っている。図-13 にそれぞれ 2、4、6、8 ステップでの解析結果を示す。解析時間は Pentium II 400MHz の PC で約 3 時間であった。

この 2 つの例で示したような大変形解析は、通常の Lagrange の定式化を用いた解析で行うのはおそらく不可能であり、また、対象の形状も非常に複雑であり、ALE 法やリメッシングによる解析を行うのも困難である。その意味で、有限被覆法の大変形問題での有効性を示すことができたと考える。

5 結論

現状の有限要素解析法およびメッシュレス解析法は複雑化する解析課題に容易に対応することができておらず、3次元化された CAD 技術や計算機環境の進歩を十分に活用できているとはいいがたい。一方メッシュレス解析法と呼ばれる一連の手法は、この有限要素法の問題を克服する目的で研究が進められているが、それぞれに問題を抱えており、現実的な問題に対応するに至っていない。

こうした状況に対し、有限被覆法はメッシュレス手法のメッシュを生成する必要がないというメリットと、有限要素法のような実用面での有効性を重ね持った手法であり、特に 3 次元ソリッド解析、大変形解析などに有効である。この論文では、3 次元ソリッドの大変形解析に有限被覆法を適用することによりその有効を示し、以下のような結論を得た。

- ・ 「被覆」の概念を導入し、任意形状の物体を定形のメッシュで解析する手法の枠組みを構築した。
- ・ 「被覆設定の任意性」を大変形解析のリメッシュに用いるための方法論を示した。
- ・ 多重ボクセルデータ構造を利用し、CAD データ入力から解析終了までを完全に自動化して行うシステムを構築した。
- ・ 解析対象の物体形状表現のためにポリゴンデータを利用し、境界条件をボクセルを介さずに物体形状から

直接解析モデルに反映させることで、解析メッシュを意識しないプリ・ポストプロセッシングの可能性を示した。

参考文献

- 1) Belytschko, T. et. al. : Meshless Methods: An Overview and Recent Developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- 2) Wilhelmy, V. et.al.: Rezoning for ABAQUS Using I-DEAS, ABAQUS Users' Conference 1992, pp. 545-556, 1992.
- 3) Belytschko, T. et. al.: Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid Structure Interaction, ASME J. Pressure Vessel Technology 102, pp 62-69, 1980.
- 4) Hughes, TJR et.al. :Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 29, pp. 329.-349, 1981.
- 5) Aizawa, T and Benson, DJ: Powder Compaction Simulation by the Advanced Eulerian Method, Proc. Computational Engineering Conference Vol 4 pp 1097-1100, 1999
- 6) Kikuchi, N. & Diaz, A. :第 14 回 Quint セミナーテキスト、(株)くいんと, 1998.
- 7) 鈴木克幸、他：ボクセル被覆による 3 次元ソリッドのメッシュレス解析、土木学会応用力学論文集 Vol 1 pp 215-222, 1998.
- 8) Shi, G. H. : Manifold Method of Material Analysis, Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report No. 92-1. U.S. Army Research Office, 1991.
- 9) 大西有三、他：マニフォールド法による不連続体の変形解析、第 48 回理論応用力学講演会講演論文集 pp 282-285, 1999.
- 10) Babuska, I and Melenk, J. M. :The Partition of Unity Finite Element Method, Int. J. Numerical Methods Engineering 40 pp 727-758, 1997.
- 11) 久田俊明 野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用、丸善, 1995.
- 12) 後藤學：実践 有限要素法—大変形弾塑性解析—、コロナ社, 1995.

(1999 年 4 月 23 日 受付)