

衝撃荷重を受ける軸対称弾性体の解析に対する剛体ばねモデルの適用性

Applicability of a Rigid Body Spring Model to Impact Problems of Axi-symmetric Elastic Bodies

上林厚志*, 小林治俊**, 園田恵一郎**

Atsushi KAMBAYASHI, Harutoshi KOBAYASHI and Keiichiro SONODA

*正会員 工修 (株)竹中工務店 技術研究所 (〒270-1395 千葉県印西市大塚 1-5-1)

**正会員 工博 大阪市立大学 工学部土木工学科 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

Present paper describes a new development for axi-symmetric rigid body spring model(RBSM). Usual RBSM does not take into account an element strain. In order to analyze accurate stress wave propagation phenomenon, in this study, the concept of element strain has been introduced to estimate exact element properties. Numerical results obtained for axi-symmetric impact problems have a good agreement with the exact solutions based on the theory of elastodynamics.

Key Words : impact load, rigid body spring model, explicit time integration, axi-symmetric elastic body

1. はじめに

鉄筋コンクリート構造物への飛来物の衝突, すなわち落石防護工への巨石の落下, 航空機の原子力関連施設および LPG・LNGプラントへの衝突などは比較的発生確率は低いものの発生時には多大な被害を周辺に及ぼす恐れがあり, このような構造物の設計においては構造物の耐衝撃性能を考慮しなければならない. この問題に対し, 合理的な設計法を考える上で鉄筋コンクリート部材の耐衝撃性能を把握しておく必要がある. それゆえ, これらの問題を対象とした多くの実験的研究や解析的研究が行われている. しかしながら, 衝撃実験は特殊な載荷装置と高速の計測装置を用いなければならない事や実問題における衝撃荷重をシミュレートすることが難しいこと等, 問題が多く, 一般的な衝撃問題が十分明らかにされているとは言えない.

一方, 衝撃問題の理論解析は固体内の応力波伝播特性の究明に深く関係しており, 無限や半無限弾性体に対する動弾性理論に基づく研究は古くからあるが, 種々の境界条件を持つ場合の厳密な解析は非常に困難といわれている. また, 衝撃問題に対する有限要素法の適用は, 建築・土木の分野において重要なコンクリートの非線形ひびわれやせん断すべり, 鉄筋の付着特性, および破壊性状など表現しにくい.

そこで著者等は, 主として静的極限解析のために開発された剛体ばねモデル(RBSM)¹⁾を利用し, 時間積分法には陽的差分法を用いた解法を展開した衝撃解析手法を開発し, 平面応力問題およびコンクリートはりに対する適用性について報告した²⁾. 本文は一般の三次元解析を念頭において, この手法を衝撃荷重を受ける軸対称弾性体の波動伝播問題の解析手法に拡張し, その適用性について検討したものである.

剛体ばねモデルを用いた軸対称問題の定式化は静的極限解析に対して既に行われている³⁾. しかしながらこの定式化はポアソン比を含む変形に対して十分な精度を満たし

ておらず, 後述するように伝播速度が剛性に支配される応力波の解析には適用が難しい. また, 剛体ばねモデルを用いた軸対称問題の衝撃応答解析例は幾つかあり^{4) 5)}, それらは対称軸を含む面内で1次元の円錐台要素である. この場合, 一次元の梁要素と同様に剛体ばねモデルの曲げおよびせん断ばねの剛性を正しく評価できるため, これを衝撃解析に用いてもなんら不都合はない. しかしながらこの要素では板厚方向の応力波の伝播を表すことができない. コンクリートの裏面剥離などの板厚方向の応力波の伝播による破壊を対象とする場合これは必要であるため, 本論文では対称軸を含む断面で平面となる軸対称要素の定式化を新しく行った.

応力波の伝播を問題とする衝撃解析では応力波の波頭を正しく表わすことが必須である. このため, RBSMを衝撃問題に適用する場合にはばね剛性の選び方が非常に重要となる. この問題を解決するために要素のひずみエネルギーを連続体としてのひずみエネルギーと等価とする方法などの試みを行ったが, 四角形要素では可能であるがひびわれの影響を考慮するために三角形要素を用いようとするとはばね剛性の算定法が非常に複雑となり, 開発が困難となった.

この問題を回避するために要素ひずみの概念を導入した. すなわち, 要素周辺のばね評価位置における直方向およびせん断方向のひずみから一度要素重心におけるひずみを算出し, この要素ひずみを用いてばね評価位置における要素辺方向のひずみを算出した. これにより, 弾性論によって通常の軸対称問題を解析する場合に用いられる応力-ひずみ関係を直接用いる事が可能となり, 応力波の伝播性状を精度良く表すことが可能となった.

2. 解析手法

図-1に示すように3角形を回転軸の回りに360°回転してできるリング要素について説明する.

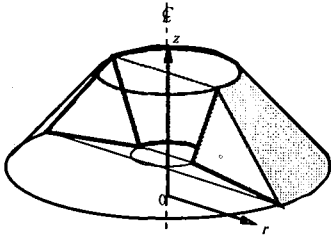


図-1 3角形リング要素

2.1 要素辺上の変位

図-2 (a) に示す三角形要素の1辺 AB の任意点 P (r_p, z_p) の変位 $U_p = \{u_p, v_p\}^T$ は要素重心 $G(r_G, z_G)$ の変位 $U_G = \{u_G, v_G, \omega_G\}^T$ を用いて次式のように表せる。ただし、 ω_G は微小であると仮定する。

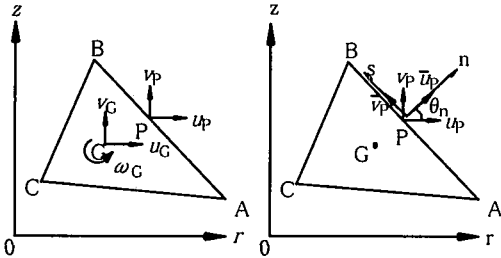
$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(z_p - z_G) \\ 0 & 1 & (r_p - r_G) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_G \\ v_G \\ \omega_G \end{Bmatrix} \quad (1)$$

2.2 要素辺上の直方向、せん断方向の変位

図-2 (b) に示すように辺 AB 上の点 P から垂直外向きに n 軸を取り、辺 AB に平行で、要素重心を基点 (中心点) として、反時計回りに s 軸を取る。これらの軸を座標軸とする点 P の変位 $\bar{U}_p = \{\bar{u}_p, \bar{v}_p\}^T$ は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{v}_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & \sin \theta_n \\ -\sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m \\ -m & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\ell = \cos \theta_n = (z_B - z_A) / \overline{AB}$ 、 $m = \sin \theta_n = (r_A - r_B) / \overline{AB}$ である。



(a) 要素辺上の変位 (b) 直方向、せん断方向の変位
図-2 要素辺上の直方向、せん断方向の変位

2.3 要素境界線上の相対変位

図-3 に示すように2要素の境界線上の垂直方向の相対変位を δ_n (開くほうを正)、接線方向の相対変位を δ_s (各要素重心が反時計回りに回転したときに生じる変位を正) とすれば

$$\begin{aligned} \delta_n &= -(\bar{u}_{p1} + \bar{u}_{p2}) \\ \delta_s &= -(\bar{v}_{p1} + \bar{v}_{p2}) \end{aligned} \quad (3)$$

と表せる。

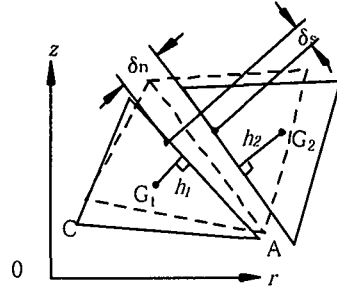


図-3 要素境界上の相対変位

2.4 円周方向のひずみ

円周方向のひずみ ϵ_θ は評価点 P の半径方向 (r 方向) の変位 u_p を用いて

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} u_p \quad (4)$$

と表せる。ここで r は対称軸から点 P までの距離、すなわち r_p であり、 u_p は2要素の評価点 P の半径方向の変位 u_{p1}, u_{p2} の平均をとり、

$$u_p = \frac{u_{p1} + u_{p2}}{2} \quad (5)$$

を用いる。この評価法は文献 3 と同じである。ただし、評価点が軸上にある場合は ϵ_θ は ϵ_r を用いる。

2.5 相対変位と直方向、せん断方向のひずみの関係

境界線上の垂直方向ひずみ ϵ_n とせん断ひずみ γ_s を

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{h_1 + h_2} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (6)$$

として定義する。ここで h_1, h_2 は要素重心から境界線までの距離で $h = h_1 + h_2$ である (図-3)。

2.6 要素のひずみ

三角形要素の各境界辺のひずみ $\epsilon_n, \epsilon_s, \gamma_{ns}$ の内、 ϵ_n と γ_{ns} は隣り合う2要素重心の変位により求めることができるが、要素境界線に沿ったひずみ ϵ_s は求められない。そこで ϵ_s を求めるため、最初に三角形要素重心 G 点のひずみ $\epsilon_{rG}, \epsilon_{zG}, \gamma_{rzG}$ を求め、これらのひずみから ϵ_s を求める。要素ひずみの算出方法は文献 4 に述べられた要素応力を求める方法と同様に最小二乗法を用いる。以下にこれを説明する。

今、図-4 に示す要素重心 G 点における要素境界辺 AB, BC, CA に沿った n_i-s_i 軸方向 ($i=1,2,3$) のひずみは要素重心のひずみを用いて次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{n1G} \\ \epsilon_{n2G} \\ \epsilon_{n3G} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1^2 & m_1^2 & \ell_1 m_1 \\ m_1^2 & \ell_1^2 & -\ell_1 m_1 \\ -2\ell_1 m_1 & 2\ell_1 m_1 & \ell_1^2 - m_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rG} \\ \epsilon_{zG} \\ \gamma_{rzG} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rG} \\ \epsilon_{zG} \\ \gamma_{rzG} \end{Bmatrix}$$

ここに、 $\ell_i = \cos \theta_i, m_i = \sin \theta_i$ である。

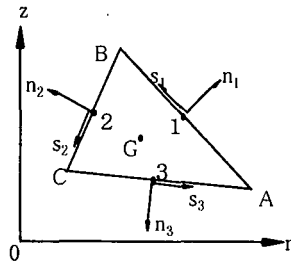


図-4 三角形要素の境界辺の中点と重心

ここで、各境界辺上のひずみとこれらを比較し、次の二乗和

$$f = \sum_{i=1}^3 [w_i \{ (\epsilon_{ni} - \epsilon_{niG})^2 + (\gamma_{nii} - \gamma_{niiG})^2 \}] \\ = \sum_{i=1}^3 [w_i \{ (\epsilon_{ni} - R_{11}\epsilon_{rG} - R_{12}\epsilon_{zG} - R_{13}\gamma_{rG})^2 \\ + (\gamma_{nii} - R_{31}\epsilon_{rG} - R_{32}\epsilon_{zG} - R_{33}\gamma_{rG})^2 \}] \quad (8)$$

を取り、三角形要素の重心 G 点のひずみ ϵ_{rG} , ϵ_{zG} , γ_{rG} を最小二乗法を用いて決定する。すなわち、その条件式は

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{rG}} = \sum_{i=1}^3 [w_i \{ -2R_{11}(\epsilon_{ni} - R_{11}\epsilon_{rG} - R_{12}\epsilon_{zG} - R_{13}\gamma_{rG}) \\ - 2R_{31}(\gamma_{nii} - R_{31}\epsilon_{rG} - R_{32}\epsilon_{zG} - R_{33}\gamma_{rG}) \}] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{zG}} = \sum_{i=1}^3 [w_i \{ -2R_{12}(\epsilon_{ni} - R_{11}\epsilon_{rG} - R_{12}\epsilon_{zG} - R_{13}\gamma_{rG}) \\ - 2R_{32}(\gamma_{nii} - R_{31}\epsilon_{rG} - R_{32}\epsilon_{zG} - R_{33}\gamma_{rG}) \}] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_{rG}} = \sum_{i=1}^3 [w_i \{ -2R_{13}(\epsilon_{ni} - R_{11}\epsilon_{rG} - R_{12}\epsilon_{zG} - R_{13}\gamma_{rG}) \\ - 2R_{33}(\gamma_{nii} - R_{31}\epsilon_{rG} - R_{32}\epsilon_{zG} - R_{33}\gamma_{rG}) \}] = 0 \quad (9)$$

と表され、これらを整理すると、以下になる。

$$\sum_{i=1}^3 [w_i \{ (R_{11}^2 + R_{31}^2)\epsilon_{rG} + (R_{11}R_{12} + R_{31}R_{32})\epsilon_{zG} \\ + (R_{11}R_{13} + R_{31}R_{33})\gamma_{rG} - R_{11}\epsilon_{ni} - R_{31}\gamma_{nii} \}] = 0 \\ \sum_{i=1}^3 [w_i \{ (R_{12}R_{11} + R_{32}R_{31})\epsilon_{rG} + (R_{12}^2 + R_{32}^2)\epsilon_{zG} \\ + (R_{12}R_{13} + R_{32}R_{33})\gamma_{rG} - R_{12}\epsilon_{ni} - R_{32}\gamma_{nii} \}] = 0 \\ \sum_{i=1}^3 [w_i \{ (R_{13}R_{11} + R_{33}R_{31})\epsilon_{rG} + (R_{13}R_{12} + R_{33}R_{32})\epsilon_{zG} \\ + (R_{13}^2 + R_{33}^2)\gamma_{rG} - R_{13}\epsilon_{ni} - R_{33}\gamma_{nii} \}] = 0 \quad (10)$$

これを以下のようにまとめる。

$$A_{11}\epsilon_{rG} + A_{12}\epsilon_{zG} + A_{13}\gamma_{rG} + A_{14} = 0 \\ A_{21}\epsilon_{rG} + A_{22}\epsilon_{zG} + A_{23}\gamma_{rG} + A_{24} = 0 \\ A_{31}\epsilon_{rG} + A_{32}\epsilon_{zG} + A_{33}\gamma_{rG} + A_{34} = 0 \quad (11)$$

この連立一次方程式を解けば三角形要素重心点のひずみ ϵ_{rG} , ϵ_{zG} , γ_{rG} が求められるので、式(7)を用いて三角形要素重心点のひずみ ϵ_{rG} , ϵ_{zG} , γ_{rG} を各要素の各辺上の座標に変換し、合い隣り合う 2 要素重心点の要素境界方向の ϵ_s の平均値として要素境界辺の ϵ_s を決定する。

2.7 応力ひずみ関係

軸対称弾性体の応力-ひずみ関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

2.8 要素境界辺に作用する直方向とせん断方向の作用力

要素境界辺上の応力から境界辺に作用する作用力 (図-5) は、直応力およびせん断応力と境界辺の面積 $A_{AB} = \pi AB(r_A + r_B)$ の積として求める。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} F_n \\ F_s \end{Bmatrix} = A_{AB} \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

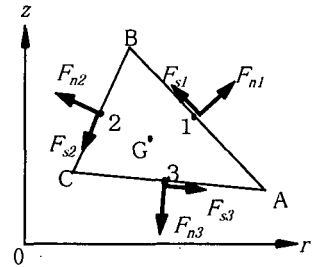


図-5 要素境界辺に作用する作用力

2.9 円周方向の作用力 (フープ力)

境界辺上の円周方向の作用力 (フープ力) は、図-6 に示すように境界辺と要素重心を結ぶ 3 角形部分の面積を境界辺上の円周方向の作用力 (フープ応力) σ_θ にかけて求め、各要素重心へ作用する作用力は下記の式を用いて求める。

$$F_{rG} = -2\pi F_{\theta p} \\ M_G = 2\pi(z_p - z_G)F_{\theta p} \quad (14)$$

ここに、 $F_{\theta p} = A_{ABG}\sigma_\theta$ である。

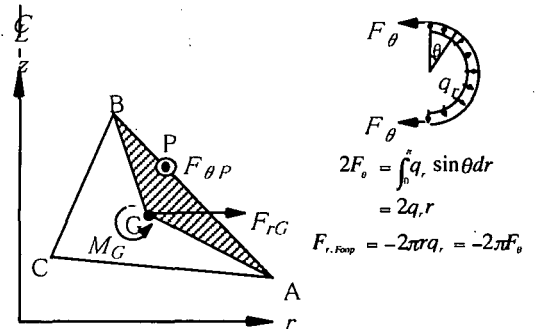


図-6 フープ応力の作用面積と作用力

2.10 要素辺上の作用力を半径方向と対称軸方向に変換

境界辺上の作用力を半径方向 (r 方向) と対称軸方向 (z 方向) に分解する。

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & -m \\ m & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_n \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (15)$$

2.11 要素重心に作用する作用力と作用モーメント

図-7を参照して、要素边上の作用力から要素重心の作用力と作用モーメントを求める。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} F_{rG} \\ F_{zG} \\ M_G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(z_p - z_G) & (r_p - r_G) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{rp} \\ F_{zp} \\ F_{\theta p} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

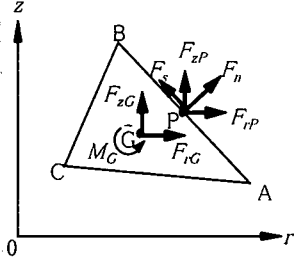


図-7 要素边上の作用力と要素重心の作用力

2.12 境界要素の処理

要素のひずみを計算した後に自由辺の境界要素に応力が発生することがある。そのため、ばね位置の応力を計算する前に下記の自由境界条件を満たすように配置する。

$$\sigma_n = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\epsilon_n + \nu\epsilon_\theta + \nu\epsilon_s \} = 0 \quad (17)$$

$$\tau_s = \frac{E}{2(1-\nu)} \gamma_s = 0$$

すなわち、

$$\begin{aligned} (1-\nu)\epsilon_n + \nu\epsilon_\theta + \nu\epsilon_s &= 0 \\ \gamma_s &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

また、境界要素は要素の変位を計算した後も、この境界条件を満たすように再配置する。

上式の $\epsilon_n, \epsilon_\theta, \gamma_s$ を式(1)と式(2)および式(4)を用いて隣り合う要素重心の変位に変換し、要素2の変位 u_2, v_2, ω_2 を境界要素の変位 u_b, v_b, ω_b と置き換え(図-8), u_b, v_b を求めれば次式を得る。

$$\begin{aligned} u_b &= H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}\omega_1 + H_{14}\epsilon_s \\ v_b &= H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}\omega_1 + H_{24}\epsilon_s \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、境界要素の回転変位 ω_b は境界要素が接する要素の回転変位と等しい($\omega_b = \omega_1$)ものとする。

ここに

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{2(1-\nu)r + \nu\ell_2 h_1}{2(1-\nu)r - \nu\ell_2 h_1} \\ H_{12} &= 0 \\ H_{13} &= -(z_{p1} - z_{G1})H_{11} \\ H_{14} &= \frac{2\nu\ell_2 h_1 r}{2(1-\nu)r - \nu\ell_2 h_1} \\ H_{21} &= \frac{2\nu m_2 h_1}{2(1-\nu)r - \nu\ell_2 h_1} \\ H_{22} &= 1 \\ H_{23} &= -(z_{p1} - z_{G1})H_{21} + (r_{p1} - r_{G1}) \\ H_{24} &= \frac{2\nu m_2 h_1 r}{2(1-\nu)r - \nu\ell_2 h_1} \end{aligned} \quad (20)$$

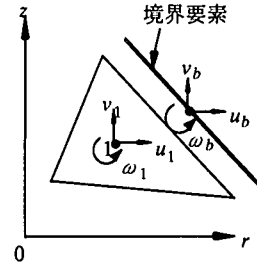


図-8 境界要素と境界要素が接する要素

2.13 解析のフロー

図-9に解析全体のフローを示す。時間積分は要素作用力から、要素加速度を求め、速度と加速度を次式を用いて求める。

$$\ddot{u}_{i,j} = \sum F_{ri} / m_i, \quad \ddot{v}_{i,j} = \sum F_{zi} / m_i, \quad \ddot{\theta}_{i,j} = \sum M_{\theta i} / I_i \quad (21)$$

ここに $\sum F_{ri}, \sum F_{zi}, \sum M_{\theta i}$ は、要素 i に作用する各変位方向に働く力の和であり、 m_i, I_i は要素 i の質量および慣性モーメントである。

時刻 $t + \Delta t$ における変位速度および変位は、式(21)を時間増分 Δt に関する積分を用いて

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j+\Delta t/2} &= \dot{u}_{i,j} + \ddot{u}_{i,j} \cdot \Delta t \\ \dot{v}_{i,j+\Delta t/2} &= \dot{v}_{i,j} + \ddot{v}_{i,j} \cdot \Delta t \\ \dot{\theta}_{i,j+\Delta t/2} &= \dot{\theta}_{i,j} + \ddot{\theta}_{i,j} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (22)$$

および

$$\begin{aligned} u_{i,j+\Delta t} &= u_{i,j} + \dot{u}_{i,j+\Delta t/2} \cdot \Delta t \\ v_{i,j+\Delta t} &= v_{i,j} + \dot{v}_{i,j+\Delta t/2} \cdot \Delta t \\ \theta_{i,j+\Delta t} &= \theta_{i,j} + \dot{\theta}_{i,j+\Delta t/2} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (23)$$

として求める。ここで速度は時間増分点の midpoint の速度を用いるため、 $t + \Delta t/2$ と表記している。

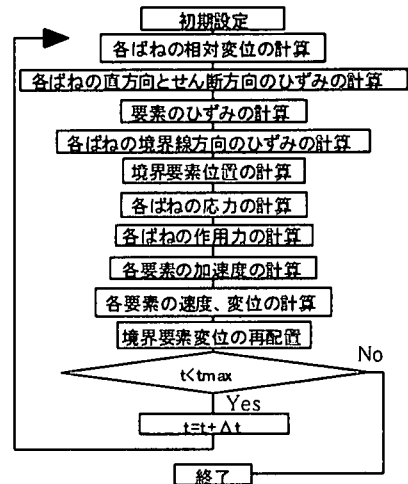


図-9 解析全体のフロー

3. 軸対称弾性体の衝撃応答解析

ここでは、前節で定式化した軸対称解析手法を用いて、時間に関してステップ状の荷重を受ける円板と台形荷重を受けるロックシェッド敷砂層の解析結果を示し、3次元動弾性論による厳密解⁷⁾との比較を通じて本解析手法の適用性について述べる。

3.1 衝撃荷重が作用する円板の解析

図-10 に示すような上面に空間的に全面等分布で、時間に関してステップ状の衝撃荷重が作用する円板を解析対象とする。図-11 に $20 \times 12 \times 4$ 分割とした場合の要素分割と境界条件を示す。境界条件は中央断面の要素では r 方向の変位と回転を拘束し、端辺では z 方向の変位を拘束している。端辺での条件は弾性理論解と比較するためである。

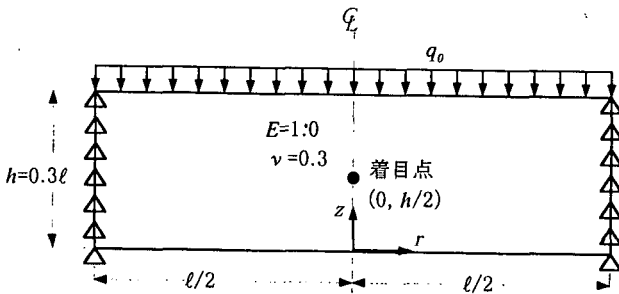


図-10 ステップ荷重が作用する円板

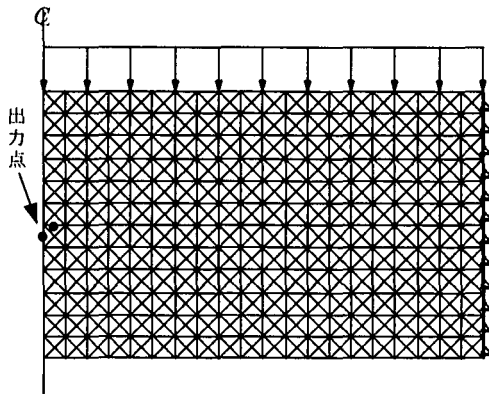


図-11 要素分割(分割数 $20 \times 12 \times 4$ の例)

本解析の解析結果と3次元動弾性論に基づいた固有関数展開法による理論解とを比較する。図-12 に円板の中央点($r=0, z=h/2$)を着目点とした場合の応力 σ_z の時間変化を示す。図の横軸は縦波が円板の厚さ h を伝播するのに要する時間 T_0 で無次元化した時間であり、縦軸は荷重強度 q_0 で無次元化した応力である。理論解では初期状態から $1.5T_0$ において裏面で反射した縦波が到達するまでは、ステップ荷重を受ける1次元棒の応答と類似した応力状態である。この応力波の通過以降に理論解を中心にわずかな

な振動が見られるが解は安定している。理論解と比較して本解析法による結果は後半の高周波のパルス状の応答をのぞいてほぼ一致している。

図-13 に同じ着目点の応力 σ_r の応答を示す。縦波が到達する時間 $0.5T_0$ で円板厚さ方向のひずみと拘束効果による応力が立ち上がるが、この大きさとその後の挙動も本手法による解析値は応答をうまく表せていることが分かる。ただし、 $2.5T_0$ より後半の本解析値は理論解と比較して少し異なった応答を示している。この原因は理論解における端辺の境界条件(上下方向の変位 w と応力 σ_r が 0 で τ_{rz} は 0 ではない)と本解析の境界条件($\sigma_r=0, \tau_{rz}=0$ で算出した境界要素の w を強制的に 0 としている)との違いによるものと考えられる。

図-14 に変形図を示す。端辺の要素が多少不連続に回転しているが、中央部では連続的な変形を示している。

図-15 に円板中央点における変位 w の応答を示す。先に述べた境界条件の違いにより理論解と比べて本解析値の振動周期は長くなり、 w の最大値も大きくなっている。長期応答においては解析後半(時間 $35T_0$ 以降)において応答値はわずかに振動している。この傾向は時間増分を細かくしても境界条件を変えても生じた。この原因は現段階ではつかめていない。しかしながら、衝撃問題では衝撃を受けた後のごく短時間内の応答が必要かつ重要であるから、この長期応答を問題にすることはない。

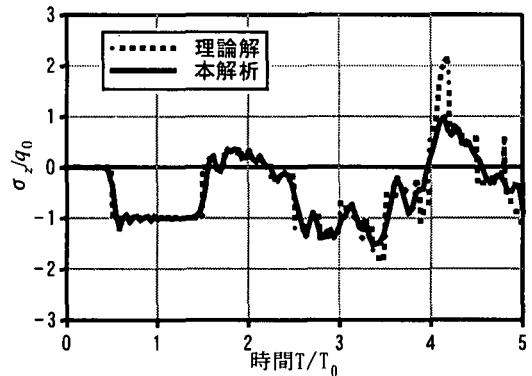


図-12 円板中央点の応力 σ_z の応答曲線

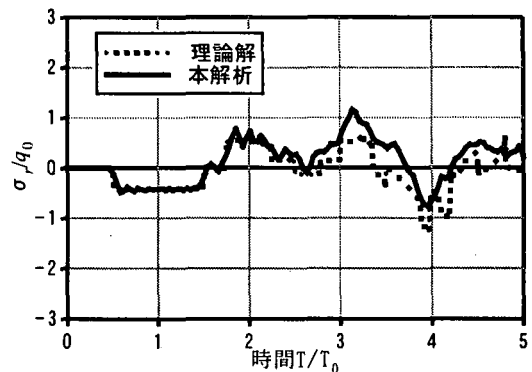
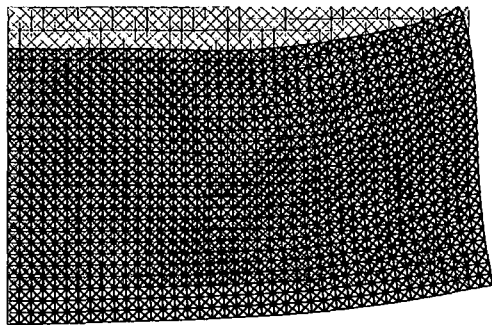
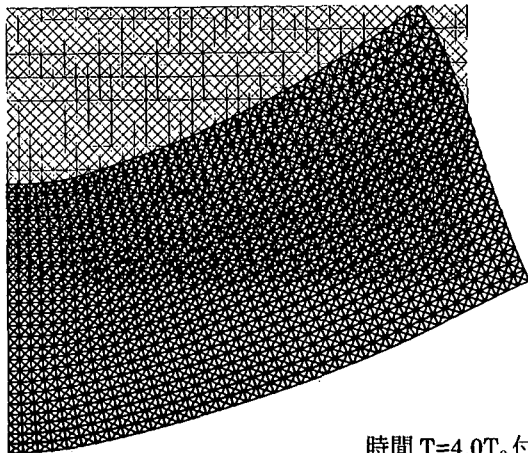


図-13 円板中央点の応力 σ_r の応答曲線



時間 $T=2.0T_0$ 付近



時間 $T=4.0T_0$ 付近

図-14 ステップ荷重を受ける円板の変形図

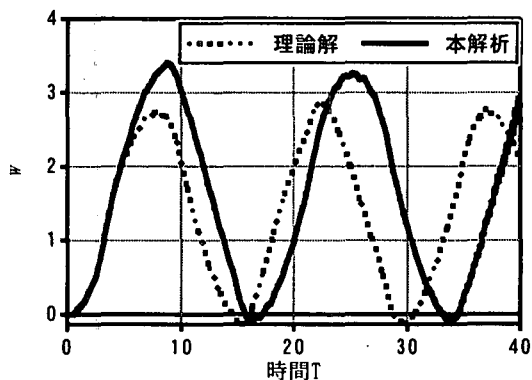


図-15 円板中央点の変位 w の応答曲線

3.2 衝撃荷重が作用する敷砂層の弾性解析

次に応用例として、ロックシェッド上の敷砂緩衝層³⁾を対象に、時間に関して台形荷重が作用する場合の数値解析例を示す。すなわち、解析の対象は図-16 に示す高さ1m 横幅10m の底面が摩擦のない剛体で支持された敷砂層で上面中央に図-17 のような時間に関して台形状の衝撃荷重が作用するものである。実際の敷砂のめり込み、飛散などを無視した弾性解析を行う。なお対象の単位体積重量は 17.7kN/m^3 、ポアソン比 ν は 0.45、ラメの定数 λ が 9.8MPa および 98.0MPa である。解析では図-18 に示す要素分割を用いている。

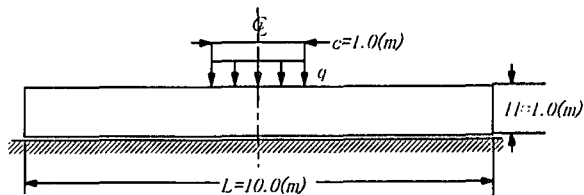


図-16 等分布荷重が作用する底面を支持した敷砂緩衝層

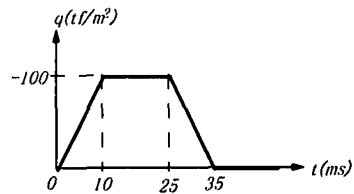


図-17 台形状の衝撃荷重

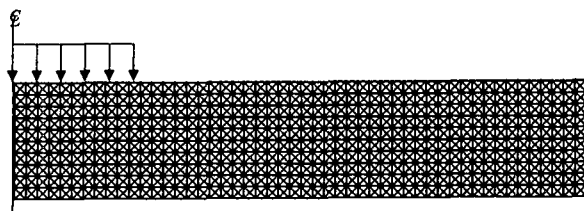


図-18 要素分割 (要素数 $50 \times 10 \times 4$)

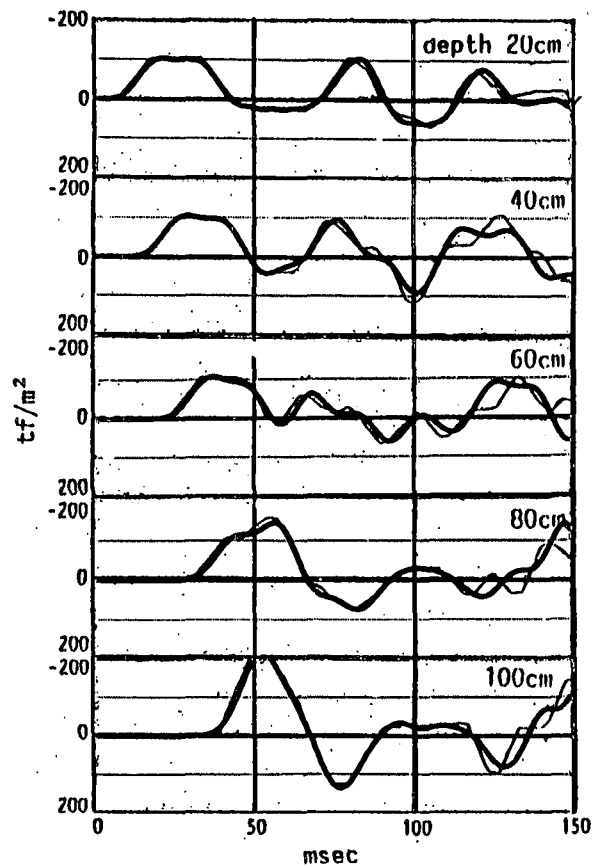


図-19 中央断面における応力 σ_z の応答波形
($\lambda=9.8\text{MPa}$, 太線:本解析, 細線:理論解)

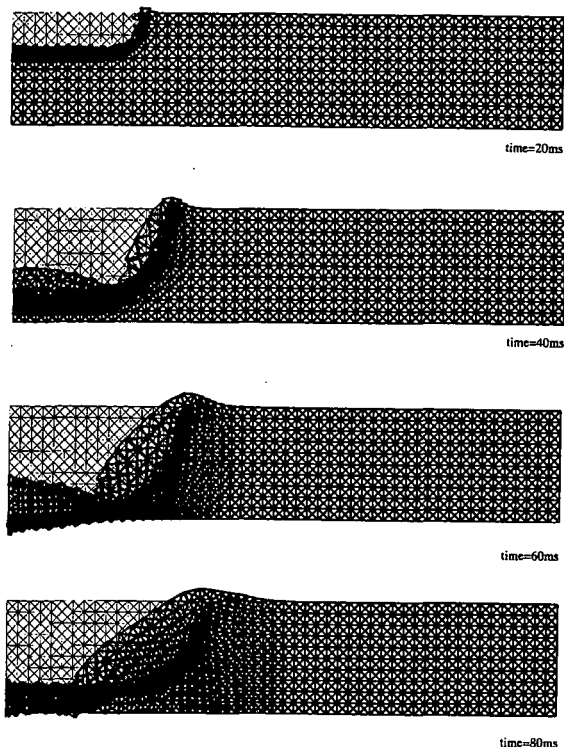


図-20 変形の時間変化 ($\lambda=9.8\text{MPa}$, 変位は等倍)

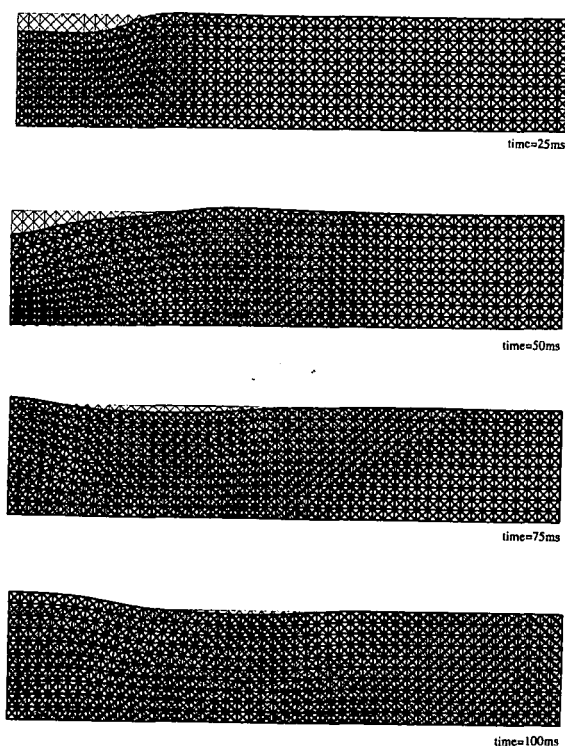


図-22 変形の時間変化 ($\lambda=98.0\text{MPa}$, 変位は等倍)

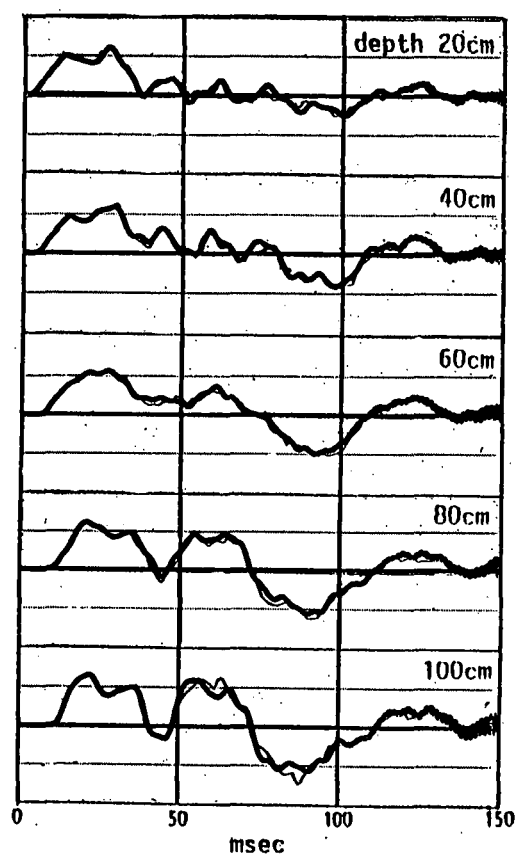


図-21 中央断面における応力 σ_z の応答波形
($\lambda=98.0\text{MPa}$, 太線:本解析, 細線:理論解)

図-19に $\lambda=9.8\text{MPa}$ の場合の中央断面の上面から20cm, 60cm, 80cm, 100cmの位置における応力 σ_z の応答を示す。理論解と比較して本解析値が衝撃応力の伝播をよく表していることがわかる。また、図-20に変形の時間変化を示す。荷重の載荷面からひずみが底面に広がりながら伝播している様子が表されている。用いたラメの定数値は非常に小さなものであり、したがってこの図から分かるようにこの解析は微小変形の範囲を超えており、現実の敷砂層の解析としては適当でないと思われる。しかし、ここでは応力波の伝播特性を理論解と比較することが目的であり、弾性を仮定する限り、解析法の良否を判定することに支障はないと考えている。また、本研究のねらいとしているコンクリート板の裏面剥離現象は裏面から応力波が反射する時点で破壊が始まると考えられ、この時の板全体の変形は小さいので微小変位理論により解析できると考えている。図-21に $\lambda=98.0\text{MPa}$ の場合の応力 σ_z の応答を示す。今度はラメ定数が10倍とより固体的性格の敷砂層を考えたため $\lambda=9.8\text{MPa}$ の場合と比較してより理論解と一致しているが先の円板の長期応答と同様に100msecを超えた辺りから細かい振動が現れている。図-22は $\lambda=98.0\text{MPa}$ の場合の変形の時間変化を示している。図-20の $\lambda=9.8\text{MPa}$ の場合と比較すると、変形は小さいが、応力波の伝播速度が速いため右端部では水平方向の変位も生じている。

4 まとめ

本文では、2次元衝撃弾性解析手法として既に開発された剛体ばねモデルを用いた衝撃解析手法を3次元軸対称問題の解析手法に拡張し、衝撃荷重が作用する周辺を単純支持された弾性円板および台形荷重が作用するロックシェッドの敷砂層の弾性衝撃問題を解析し、固有関数展開法を用いた動弾性論に基づく理論解と比較した。本手法による解析結果は長期応答において要素が振動し、発散する傾向がある。しかしながら、本研究のねらいとしているコンクリート板の裏面剥離等の解析では板厚方向に波頭が数回反射する時間内に破壊が決定されと考えられ、この範囲において本解析は安定しているのでこのような衝撃解析に限定すれば本解析は適用可能と思われる。また、理論解と比較して本解析法による解析結果は圧縮波の伝播によるはり高さ方向応力の応力波到達時間、荷重辺端部からのせん断波の影響をうまく表せる等、弾性範囲において本解析法が衝撃による応力波伝播特性を十分に表すことができることを確認した。

参考文献

- 1) Kawai. T. :New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号, pp.174-180, 1977.5.
- 2) 園田恵一郎, 上林厚志: 衝撃荷重を受ける弾性体の解析に対する剛体バネモデルの適用性, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.147-155, 1992.1.
- 3) 竹内則雄, 上田真稔, 川井忠彦: 新しい離散化モデルによる軸対称問題の解析, 生産研究, Vol.32, No.6, pp.297-300, 1980.6.
- 4) 竹内則雄, 川井忠彦: 新離散化極限解析解の誤差評価に関する一方法について, 生産研究, Vol.33, No.2, pp.80-83, 1981.2.
- 5) 川井忠彦, 都井裕: はりおよび平板の横衝撃応答問題に対する新しい離散化解析法, 日本機械学会論文集, A編, Vol.45, No.389, pp.73-80, 1979.1.
- 6) 都井裕: 骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析, 日本造船学会論文集, No.147, pp.316-323, 1980.5.
- 7) 小林治俊, 園田恵一郎, 上林厚志: 落石覆工に作用する衝撃土圧の三次元動弾性論による一検討, 落石等による衝撃問題に関するシンポジウム講演論文集, 土木学会, pp.99-100, 1991, 3.

(1999年4月23日 受付)