

形状マトリックスを用いた骨組構造の幾何学的非線形解析

Geometrical Nonlinear Analysis of Framed Structures Using Shape Matrices

橋本淳也*、三池亮次**、小林一郎***、佐藤啓治****
Ryoji MIIKE, Junya HASHIMOTO, Ichiro KOBAYASHI, Keiji SATO

* 工修 八代工業高等専門学校助手 土木建築工学科 (〒866-8501 八代市平山新町 2627)
** 工博 熊本工業大学教授 土木工学科 (〒860-0082 熊本市池田 4-22-1)
*** 工博 熊本大学教授 環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)
**** 工博 大分県立佐伯鶴岡高等学校教諭 土木工学科 (〒876-0012 佐伯市大字鶴望 2851-1)

In analyses of buckling and geometrical nonlinear buckling behavior of structures which deform largely, tangent stiffness matrix and geometric stiffness matrix play an important role. This paper shows that a general form of the geometric stiffness is derived from differentiating two shape matrices, the connection matrix and the equilibrium matrix, with respect to any joint displacement. When the general equation mentioned above is used, even the buckling analysis and the finite displacement analysis of frames constituting of arbitrary curved member and rigid joints such as arch structures can be possible.

Key Words : finite displacement, buckling, frames, curved member

1. はじめに

著者らは先に、up-dated Lagrange 流増分形有限変位仮想仕事の定理を導き、外力が有限の仮想増分大変位に対してなす仮想仕事は、第2 piola-Kirchhoff 応力が、Green ひずみ増分にある補正ひずみ項を加えたひずみに対してなす仮想仕事の和に等しいこと¹⁾、また、この仮想仕事の定理は有限変位の補仮想仕事の原理と等価であることを明らかにした^{2),3),4)}。

この有限変位仮想仕事の定理に基づき、Livesley⁵⁾ が定義した平衡マトリックスと接続マトリックスという骨組形状を表すマトリックス（以下形状マトリックスということにする）を用い、また、Kirchhoff 応力や Green ひずみを通常の物理的応力や物理的ひずみに変換して、骨組構造の有限変位解析の基礎式²⁾を導いた。

著者らはまた、上記の有限変位構造解析の基礎式を変位で微分することによって、軸力しか作用しないピン結骨組構造の幾何剛性マトリックスが、上記の接続マトリックスの微分形で表されることを述べた⁶⁾。ここでは、軸力以外に曲げモーメントやせん断力が生じる剛結骨組構造の幾何剛性マトリックスを同様に導く。最初に上記に従って誘導される幾何剛性マトリックスの信頼性を評価するため、簡単な直線部材の線形座屈解析を行い、従来の解と比較する。また、本法を用い、任意形状の曲線部材をもつ骨組構造の幾何剛性マトリックスを誘導する。

平衡マトリックスは部材という一つの構造系の中の局所的形状を与え、接続マトリックスはどちらかというと、構造系全体の形状によって決まるマトリックスであるが、結局のところ、幾何剛性マトリックスは、主として接続

マトリックスと平衡マトリックスの2つの形状マトリックスの変位による導関数に帰着し、それらの和により求められ、簡潔なマトリックス形式で表される。また、従来の梁柱理論では断面力として主に曲げモーメントのみによる変形に基づいて幾何剛性マトリックスが誘導されていることが多いが、本手法では、これらの他に、軸力による変形の影響が含まれ得るのも特徴である。

幾何剛性マトリックスの誘導や座屈解析については、すでに多くの研究が行われている。コンピューターが発達する以前は、有限変位構造解析の支配微分方程式^{7),8)}に基づいて座屈荷重の理論解が導かれた⁹⁾。近年、コンピューターを前提とした、上記の微分方程式と等価の Green ひずみ等で表されるポテンシャルエネルギーをある変位関数の下で停留とする有限要素法による座屈解析が、川井ら¹⁰⁾、福本¹¹⁾、Sakimoto¹²⁾ および Pilkey ら¹³⁾、阿井・西野¹⁴⁾らの著書に見られるように行われている。

一方、外力 $\mathbf{p}$ と部材ベクトル $\mathbf{p}_m$ の間には、接続マトリックス $\mathbf{C}$ を用い $\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{p}_m$ の関係がある。これより $\mathbf{p}$ の変分 $\delta\mathbf{p} = \mathbf{C}\delta\mathbf{p}_m + \delta\mathbf{C}\mathbf{p}_m$ である。有限変位の場合、この式の右辺第二項 $\delta\mathbf{C}\mathbf{p}_m$ として幾何剛性マトリックスを導くことができる。Spiller¹⁹⁾、後藤²⁰⁾、土木学会、鋼構造委員会²¹⁾等では接続マトリックス $\mathbf{C}$ の変位による微分形で幾何剛性マトリックスを導いている。

本研究においては接続マトリックスの微分以外に、骨組構造の部材の変形を表す平衡マトリックスの増分の変位による微分形を考慮した幾何剛性マトリックスを導く。これによって、単に曲線部材をもつ骨組構造の線形座屈解析が可能となるだけでなく、大変形構造解析の過程で、部材が曲線となることも厳密に計算できるので、その要素分割数を少なくすることが可能となる。

2. 有限変位構造解析基礎式の誘導^{1),2),3)}

この章では、本研究で用いる形状マトリックスの定義並びに、それを用い、先にわれわれが誘導した有限変位構造解析の基礎式²⁾に有限変位に伴う平衡マトリックスの変化の影響を加えた基礎式の誘導について述べる。

2.1 平衡マトリックス

Livesley に従って、骨組部材の方向を定め、その始端 i と終端 j の部材断面力をそれぞれ $\mathbf{p}_{mi}$ 、 $\mathbf{p}_{mj}$ とし両者の間に

$$\mathbf{p}_{mi} + \mathbf{H}_{ij} \mathbf{p}_{mj} = 0 \quad (1)$$

の関係が成立するときの係数マトリックス $\mathbf{H}_{ij}$ を平衡マトリックスという。⁵⁾ このとき、部材は、図-1 のように、直線ではなく一般に曲線であるものとする。

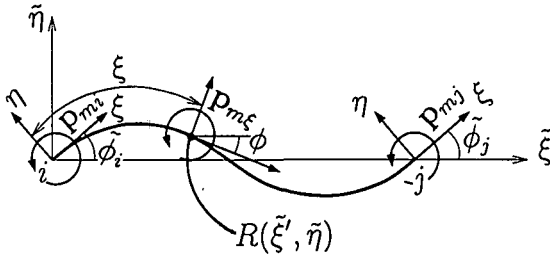


図-1 骨組構造第 I 曲線部材に作用する断面力

この部材に作用する断面力を以下の 2 組の移動座標系で定める。1 つは、部材の始端と終端を直線で結んだ $\tilde{\xi}$ 軸とそれに直交する $\tilde{\eta}$ 軸からなる部材座標系で、これを $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標系とする。次は、断面の部材の図心を通る ξ 軸とそれに直交する η 軸からなる座標系で、これを (ξ, η) 座標系とする。これらは移動座標系である。

部材の始端 i から部材軸に沿った距離が ξ となる点を R とする。この点で仮想切断したときの i 端側部材の断面に作用する (ξ, η) 座標系の成分を持つ部材断面力を $\mathbf{p}_{m\xi} = [N \ Q \ M]^T$ (N :軸力、 Q :せん断力、 M :曲げモーメント) とする。同様に j 端における断面力 $\mathbf{p}_{mj}$ と定義すると、 R から終端までの部材 (Rj) の部材断面力に関するつり合い式は、部材平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ を用い

$$\mathbf{p}_{m\xi} + \mathbf{H}_{\xi j} \mathbf{p}_{mj} = 0 \quad (2)$$

となる。なお (Rj) 部材の始端 R における部材断面力は $-\mathbf{p}_{m\xi}$ である。部材座標系である $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標軸方向の成分をもつ部材断面力 $\tilde{\mathbf{p}}_{m\xi}$ と $\tilde{\mathbf{p}}_{mj}$ の間の平衡マトリックスは

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

であるから、この $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標系に対する (ξ, η) 座標系の座標変換マトリックスを R および終端の j 端において $\tilde{\mathbf{L}}_{\xi}$ 、 $\tilde{\mathbf{L}}_j$ とすると、式 (2) における平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ は

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \tilde{\mathbf{L}}_{\xi}^T \tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} \tilde{\mathbf{L}}_j \quad (4)$$

と表される。ここに $\tilde{\phi}$ 、 $\tilde{\phi}_j$ を $\tilde{\xi}$ 座標軸に対する R および j 端における部材軸の傾角とすると

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\xi} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\phi} & -\sin \tilde{\phi} & 0 \\ \sin \tilde{\phi} & \cos \tilde{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{L}}_j = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\phi}_j & -\sin \tilde{\phi}_j & 0 \\ \sin \tilde{\phi}_j & \cos \tilde{\phi}_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。式 (4) に、式 (3) および式 (5) を代入すると、平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ を式 (6) として得る。

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -\cos(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) & -\sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) & -\tilde{\eta} \cos \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \sin \tilde{\phi}_j \\ \sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) & 0 \\ -\tilde{\eta} \sin \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \cos \tilde{\phi}_j & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 接続マトリックス

接続マトリックス $\mathbf{C}$ は全体座標系における節点外力ベクトル $\mathbf{p}$ と、部材座標系における部材終端の断面力で表される部材断面力ベクトル $\mathbf{p}_m$ を関係づける次式で表される係数マトリックスと Livesley に従って定義する。すなわち、

$$\mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{p}_m \quad (7)$$

図-2 のように、第 I 部材の i 端および j 端に外力 $\mathbf{p}_i$ 、 $\mathbf{p}_j$ が作用する例題における I 部材の接続マトリックスは、次のように求めることができる。⁵⁾ 第 I 部材の始端 i と終端 j における部材断面力 $\mathbf{p}_{mi}^T = [N_i \ Q_i \ M_i]$ 、 $\mathbf{p}_{mj}^T = [N_j \ Q_j \ M_j]$ の間のつり合い式は、式 (1) で与えられる。ここに、 $\mathbf{H}_{ij}$ は、第 I 部材の平衡マトリックスとする。

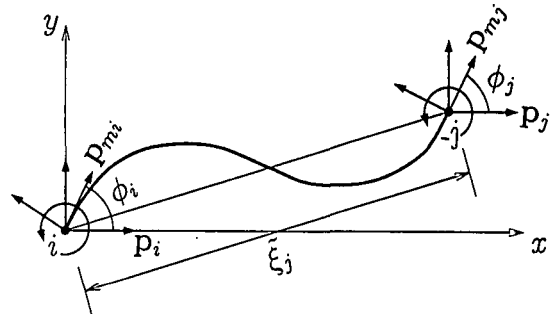


図-2 I 部材の外力と内力

また、 $\mathbf{p}_i$ 、 $\mathbf{p}_j$ は全体座標系である (x, y) 座標系における成分をもつ力のベクトルとする。これと座標変換マトリックス $\mathbf{L}$ で表される傾きをもつ (ξ, η) 座標系で表した部材の i および j 点における断面力ベクトル $\mathbf{p}_{mi}$ と $\mathbf{p}_{mj}$ との間には、式 (1) を用い

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \mathbf{L}_i \mathbf{p}_{mi} = -\mathbf{L}_i \mathbf{H}_{ij} \mathbf{p}_{mj} \\ \mathbf{p}_j &= \mathbf{L}_j \mathbf{p}_{mj} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

のような関係が成り立つ。なお、既述のように部材断面

力は終端における断面力 $\mathbf{p}_{mj}$ で代表させる。このつり合い式をマトリックスで示すと

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_i \mathbf{H}_{ij} \\ \mathbf{L}_j \end{bmatrix} \mathbf{p}_{mj} \quad (9)$$

となる。したがって、この場合の接続マトリックスは

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_i \mathbf{H}_{ij} \\ \mathbf{L}_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。

その結果、節点が部材の始端であれば接続マトリックスの要素は $-\mathbf{L}_i \mathbf{H}_{ij}$ 、終端であれば $\mathbf{L}_j$ で表される。このように、接続マトリックス $\mathbf{C}$ は、平衡マトリックス $\mathbf{H}$ と座標変換マトリックス $\mathbf{L}$ から成るということが分かる。図-1に示すような曲線部材の接続マトリックス $\mathbf{C}$ の要素はそれぞれ式(11),(12)となる。 $\mathbf{H}_{ij}$ は式(4)において ξ を i にかえて求められる。

$$-\mathbf{L}_i \mathbf{H}_{ij} = - \begin{bmatrix} \cos \phi_j & -\sin \phi_j & 0 \\ \sin \phi_j & \cos \phi_j & 0 \\ \tilde{\xi}_j \sin \phi_j & \tilde{\xi}_j \cos \phi_j & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} \cos \phi_j & -\sin \phi_j & 0 \\ \sin \phi_j & \cos \phi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

一般には、上記の組み合わせとして、各節点におけるつり合い方程式より $\mathbf{C}$ が導かれる。

2.3 有限変位構造解析の基礎式

図-3のように、部材が一般に曲線である平面骨組部材が、外力を受け変形するものとする。その変形過程における部材の状態を、(1)変形前の状態、(2)変形の中間状態、(3)変形後の状態の3段階に分けるものとする。図-3は、部材が変形の中間状態である (i', j') から変形後の状態である (i, j) に変形する様子を示したものである。

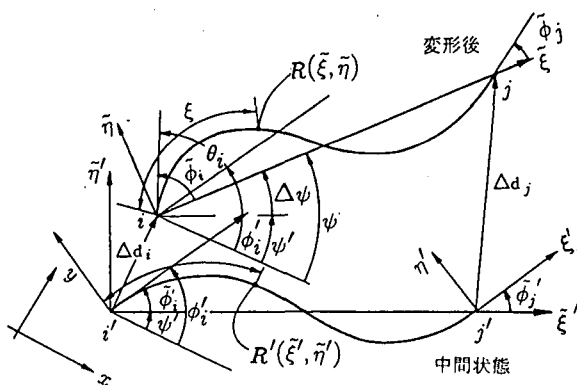


図-3 骨組構造第 I 曲線部材の変形

図-3において、 ϕ_i は、変形後の部材軸が基準となる x 軸に対してなす角を、 $\tilde{\phi}_i$ は部材座標軸 $\tilde{\xi}$ に対して、部材軸が、 i 端においてなす角を示す。 θ_i は、変形の中間状態より変形後までの、 i 端における部材のたわみ角、 ψ は x 軸に対する変形後の部材角を、 $\Delta\psi$ は中間状態から

変形後の状態までの ψ の増分を示す。また、これらより

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \theta_i + \phi'_i - (\psi' + \Delta\psi) \\ &= \theta_i + \tilde{\phi}'_i - \Delta\psi \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。中間状態において、部材始端 i' から部材軸に沿った距離が ξ' となる点を R' とし、その断面に作用する部材断面力を $\mathbf{p}'_{m\xi}$ とすると、 $(R'j')$ 部材における部材断面力に関するつり合い式は、式(1)と同様に部材平衡マトリックス $\mathbf{H}'_{\xi j}$ を用い

$$\mathbf{p}'_{m\xi} + \mathbf{H}'_{\xi j} \mathbf{p}'_{mj} = 0 \quad (14)$$

となる。プライムは中間状態における値とする。

図-3に示されるような中間状態からの部材断面力増分を $\Delta\mathbf{p}_{m\xi}$ 、 $\Delta\mathbf{p}_{mj}$ とすると、部材の変形後のつり合い式は、 $\mathbf{p}_{m\xi} = \mathbf{p}'_{m\xi} + \Delta\mathbf{p}_{m\xi}$ 、 $\mathbf{p}_{mj} = \mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}$ として、

$$\mathbf{p}'_{m\xi} + \Delta\mathbf{p}_{m\xi} + \mathbf{H}_{\xi j} (\mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}) = 0$$

となるので

$$\Delta\mathbf{p}_{m\xi} = -\mathbf{H}_{\xi j} (\mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}) + \mathbf{H}'_{\xi j} \mathbf{p}'_{mj} \quad (15)$$

となる。したがって、第 I 部材における有限変位内部仮想仕事 $\Delta U_I^{(2)}$ は、部材長 l にわたる積分として

$$\begin{aligned} \Delta U_I &= \int_I \mathbf{p}_{m\xi, I}^T \Delta \mathbf{e}_{m\xi, I} d\xi \\ &= - \int_I \mathbf{p}_{m\xi, I}^T (\mathbf{F}_{e, I} \Delta \mathbf{p}_{m\xi, I} + \Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi, I}) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

と表される。ここに、 $\Delta \mathbf{e}_{m\xi, I}$ は部材の R 点におけるひずみベクトルで、真のひずみベクトル $\Delta \mathbf{e}_{m\xi, I}^0$ と見かけのひずみベクトル $\Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi, I}$ の和として

$$\Delta \mathbf{e}_{m\xi, I} = \Delta \mathbf{e}_{m\xi, I}^0 + \Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi, I}$$

と表される。ここで、 $\Delta \mathbf{e}_{m\xi, I}^0 = \mathbf{F}_{e, I} \Delta \mathbf{p}_{m\xi, I}$ とみなす。添字 I は第 I 部材を意味する。また、 $\mathbf{F}_{e, I}$ の成分は

$$\mathbf{F}_{e, I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \quad (17)$$

で E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 I は断面2次モーメントを表す。式(16)に式(2),(15),(17)を用いると

$$\Delta U_I = \mathbf{p}_{mj, I}^T (\mathbf{F}_{m, I} \Delta \mathbf{p}_{mj, I} + \Delta \mathbf{F}_{m, I} \mathbf{p}'_{mj, I} + \Delta \mathbf{e}_{\theta, I}) \quad (18)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{m, I} &= \int_I \mathbf{H}_{\xi j, I}^T \mathbf{F}_{e, I} \mathbf{H}_{\xi j, I} d\xi \\ \Delta \mathbf{F}_{m, I} &= \int_I \mathbf{H}_{\xi j, I}^T \mathbf{F}_{e, I} (\mathbf{H}_{\xi j, I} - \mathbf{H}'_{\xi j, I}) d\xi \\ \Delta \mathbf{e}_{\theta, I} &= - \int_I \mathbf{H}_{\xi j, I}^T \Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi, I} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

とする。また、 $\Delta \mathbf{H}_{\xi j, I} = \mathbf{H}_{\xi j, I} - \mathbf{H}'_{\xi j, I}$ とし、部材長 l の変化は後述のように微小とする。

第 I 部材における内部仮想仕事 ΔU_I を全部材につい

て集めた全内部仮想仕事は

$$\Delta U = \mathbf{p}_m^T (\mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_\theta) \quad (20)$$

となる。ここに

$$\mathbf{p}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{mj,1} \\ \mathbf{p}_{mj,2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{mj,n} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{e}_\theta = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{\theta,1} \\ \mathbf{e}_{\theta,2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{\theta,n} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{m,1} & & 0 \\ & \mathbf{F}_{m,2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \mathbf{F}_{m,n} \end{bmatrix}$$

である。

一方、接続マトリックス $\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}$ を用いて、外力 $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p}$ と部材端（終端）の部材断面力 $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m$ の間には、次式

$$\mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})(\mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m) \quad (22)$$

が成り立つ。

式(20),(22)を有限変位仮想仕事の定理 $\mathbf{p}^T \Delta \mathbf{d} = \Delta U$ に代入すれば²⁾

$$\mathbf{p}_m^T (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \Delta \mathbf{d} = \mathbf{p}_m^T (\mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_\theta) \quad (23)$$

となる。したがって

$$(\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \Delta \mathbf{d} = \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_\theta$$

となり、これより、部材断面力の増分 $\Delta \mathbf{p}_m$ は

$$\Delta \mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m \{ (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m - \Delta \mathbf{e}_\theta \} \quad (24)$$

として得られる。ここに

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1} \quad (25)$$

である。上式(24)を式(22)に代入し $\Delta \mathbf{p}$ について解くと、有限変位構造解析の基礎式

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (26)$$

が得られる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &\equiv (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &\equiv \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m \\ &\quad - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

とする。

2.4 部材剛性マトリックス

式(27)における部材剛性マトリックス $\mathbf{K}_m$ は式(25)のように、たわみ性マトリックス $\mathbf{F}_m$ の逆行列として求められる。平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ は式(6)で与えられるが、この各成分を

$$\left. \begin{aligned} f_a &\equiv \cos(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) \\ f_b &\equiv \sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}) \\ f_c &\equiv -\tilde{\eta} \cos \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \sin \tilde{\phi}_j \\ f_d &\equiv \tilde{\eta} \sin \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \cos \tilde{\phi}_j \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とすると

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -f_a & f_b & 0 \\ -f_b & -f_a & 0 \\ f_c & f_d & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

である。したがって、式(17),(29)を式(19)の第一式に用い、たわみ性マトリックス

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{EA} \int_l \begin{bmatrix} f_a^2 & -f_a f_b & 0 \\ sym & f_b^2 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} d\xi + \frac{1}{EI} \int_l \begin{bmatrix} f_c^2 & f_c f_d & -f_c \\ sym & f_d^2 & -f_d \\ & & 1 \end{bmatrix} d\xi \quad (30)$$

を得る。たわみ性マトリックス $\mathbf{F}_m$ の成分については補遺-1に示す。

初期部材形状が直線で微小変位の場合 $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_j = 0$ 、 $\tilde{\eta} = 0$ であるから

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \quad (31)$$

となり部材剛性マトリックス $\mathbf{K}_m$ として周知の次式

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (32)$$

に一致する。

3. 幾何剛性マトリックス

3.1 幾何剛性マトリックスの誘導

図-3の中間状態からの荷重増分 $\Delta \mathbf{p}$ に伴って、大変形変位 $\Delta \mathbf{d}$ が生じたとする。この中間状態における式(26)の $\Delta \mathbf{p}$ の変分 $\delta \Delta \mathbf{p}$ は

$$\begin{aligned} \delta \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{K}'_E \delta \Delta \mathbf{d} + \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \delta \Delta \mathbf{d} \\ &\quad - \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \delta \Delta \mathbf{d} \\ &\quad + \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{e}_\theta}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right)_0 \delta \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。ここに、 $\mathbf{K}'_E$ は弾性剛性マトリックスで $\mathbf{K}_E = \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \mathbf{C}'^T$ である。また、添字 0 は $\Delta \mathbf{d} = 0$ すなわち、中間状態における値を示す。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta d_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta d_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta d_n} \end{bmatrix}$$

は立体マトリックスであり

$$\left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right] \mathbf{p}'_m \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta d_1} \mathbf{p}'_m & \cdots & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta d_n} \mathbf{p}'_m \end{bmatrix}$$

と定義する。また、見かけのひずみベクトル $\Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi}$ は、 $\Delta \theta_\xi$ を部材回転角として

$$\Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi} = \begin{bmatrix} 1 - \cos \Delta \theta_\xi \\ \Delta \gamma \Delta e_m \\ 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1 - \cos \Delta \theta_\xi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表される。²⁾ $\Delta \gamma$ はせん断ひずみ、 Δe_m は軸ひずみで

ある。 $\Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi}$ の変位に関する微分は

$$\left(\frac{\partial(1 - \cos \Delta \theta_\xi)}{\partial \Delta d_i} \right)_0 = \left(\frac{\partial(1 - \cos \Delta \theta_\xi)}{\partial \Delta \theta_\xi} \frac{\partial \Delta \theta_\xi}{\partial \Delta d_i} \right)_0 = 0 \quad (34)$$

であるから $\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{e}_{m\theta\xi}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right)_0 = 0$ とみなしてよい。
式 (33) をまとめると、

$$\begin{aligned} \delta \Delta \mathbf{p} &= \{ \mathbf{K}'_E + \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \\ &\quad - \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \} \delta \Delta \mathbf{d} \quad (35) \\ &\equiv (\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G) \delta \Delta \mathbf{d} = \mathbf{K}'_T \delta \Delta \mathbf{d} \end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{K}'_G$ は幾何剛性マトリックスで

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m - \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \quad (36)$$

として与えられる。 $\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックスである。

3.2 接続マトリックス $\mathbf{C}$ の微分

この節では、式 (36) の幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ の右辺第 1 項である接続マトリックスの変位による微分を求める。

接続マトリックス $\mathbf{C}$ は式 (10) の要領で与えられるから、接続マトリックスの変位による微分は、式 (11), (12) でプライムをとった変形後における接続マトリックスの各ブロック要素の変位による微分を求めることに帰着する。式 (11), (12) の各成分の x, y 軸方向変位成分 u, v および回転角 θ による微分値を表-1 に示す。

表-1 接続マトリックスの成分の
微分の中間状態における値

	$\cos \phi_j$	$\sin \phi_j$	$\bar{\xi}_j \cos \phi_j$	$\bar{\xi}_j \sin \phi_j$
u_i	0	0	$-\cos \phi_j$	$-\sin \phi_j$
u_j	0	0	$\cos \phi_j$	$\sin \phi_j$
v_i	0	0	$-\sin \phi_j$	$-\cos \phi_j$
v_j	0	0	$\sin \phi_j$	$\cos \phi_j$
θ_i	0	0	0	0
θ_j	$-\sin \phi_j$	$\cos \phi_j$	$-\bar{\xi}_j \sin \phi_j$	$\bar{\xi}_j \cos \phi_j$

3.3 たわみ性マトリックス $\Delta \mathbf{F}_m$ の微分

式 (6) で与えられる平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ を使い、式 (36) の幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ の右辺第 2 項の $\left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0$ を求める。変位ベクトル $\Delta \mathbf{d}$ の i 成分による微分は

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{m,i}}{\partial \Delta d_i} \right)_0 = \left\{ \int_l \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \frac{\partial \Delta \mathbf{H}_{\xi j}}{\partial \Delta d_i} d\xi \right\}_0 \quad (37)$$

となり、上式に式 (17), (29) を使い、次式を得る。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{m,i}}{\partial \Delta d_i} \right)_0 &= \left\{ \frac{1}{EA} \int_l \begin{bmatrix} f_a \dot{f}_a & -f_a \dot{f}_b & 0 \\ -f_a \dot{f}_b & f_b \dot{f}_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{EI} \int_l \begin{bmatrix} f_c \dot{f}_c & f_c \dot{f}_d & 0 \\ f_c \dot{f}_d & f_d \dot{f}_d & 0 \\ -f_c & -f_d & 0 \end{bmatrix} d\xi \right\}_0 \end{aligned}$$

上式で添字・は変位 Δd_i による微分を表す。なお、せん断変形 GA の影響は小さいものとして無視している。

たわみ性マトリックス $\Delta \mathbf{F}_m$ の微分については補遺-2 に示す。図-3 の R 点の座標 $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ と、この部材座標系に対する部材軸の勾配 $\tan \bar{\phi}$ を

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_1 \xi \\ \bar{\eta} &= b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 \\ \tan \bar{\phi} &= c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 \end{aligned} \quad (38)$$

と表す。すなわち変形後の部材図心軸を三次曲線と仮定すると、部材の弦長 $\bar{\xi}_j$ 、部材端の勾配 $\tan \bar{\phi}_i, \tan \bar{\phi}_j$ の関数として式 (39) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\bar{\xi}_j}{l} \\ b_1 &= \frac{1}{l} \bar{\xi}_j \tan \bar{\phi}_i \\ b_2 &= -\frac{1}{l^2} \bar{\xi}_j (2 \tan \bar{\phi}_i + \tan \bar{\phi}_j) \\ b_3 &= \frac{1}{l^3} \bar{\xi}_j (\tan \bar{\phi}_i + \tan \bar{\phi}_j) \\ c_1 &= \tan \bar{\phi}_i \\ c_2 &= -\frac{2}{l} (2 \tan \bar{\phi}_i + \tan \bar{\phi}_j) \\ c_3 &= \frac{3}{l^2} (\tan \bar{\phi}_i + \tan \bar{\phi}_j) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ここに l は部材長で、ひずみは微小で回転は有限であるものとして取り扱い、部材長 l は変形後にも変化しないものと仮定する。また、 $\bar{\xi}_j$ は変形後の部材両端間の距離で、

$$\bar{\xi}_j = \sqrt{\{(x'_j + u_j) - (x'_i + u_i)\}^2 + \{(y'_j + v_j) - (y'_i + v_i)\}^2}$$

で表される。式 (38) の変位に関する微分は

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= \dot{a}_1 \xi \\ \dot{\bar{\eta}} &= \dot{b}_1 \xi + \dot{b}_2 \xi^2 + \dot{b}_3 \xi^3 \\ \tan \dot{\bar{\phi}} &= \dot{c}_1 + \dot{c}_2 \xi + \dot{c}_3 \xi^2 \end{aligned}$$

となる。すなわち係数 a_1, b_1, b_2, b_3 の微分で求められる。この係数は式 (39) で与えられるので、結局、式 (39) の微分は、 $\bar{\xi}_j, \tan \bar{\phi}_i, \tan \bar{\phi}_j$ の微分に帰着する。これらの微分を表-2 に示す。これを用い、 $\left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{m,i}}{\partial \Delta d_i} \right]_{\Delta \mathbf{d}=0}$ の値が得られる。

表-2 部材形状係数の微分

	$\tan \bar{\phi}_i$	$\tan \bar{\phi}_j$	$\bar{\xi}_j$
u_i	$-\frac{\sin \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_i}$	$-\frac{\sin \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_j}$	$-\cos \psi$
u_j	$\frac{\sin \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_i}$	$\frac{\sin \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_j}$	$\cos \psi$
v_i	$\frac{\cos \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_i}$	$\frac{\cos \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_j}$	$-\sin \psi$
v_j	$-\frac{\cos \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_i}$	$-\frac{\cos \psi}{\bar{\xi}_j \cos^2 \bar{\phi}_j}$	$\sin \psi$
θ_i	$\frac{1}{\cos^2 \bar{\phi}_i}$	0	0
θ_j	0	$\frac{1}{\cos^2 \bar{\phi}_j}$	0

3.4 線形座屈荷重解析

変形の間状態に至る変位が小さい場合の線形座屈解析の場合、変形の間状態における接続マトリックス $\mathbf{C}'$

の代わりに変形前の接続マトリックス C^0 で近似し、節点変位を d' とすると、節点外力 p' は

$$\begin{aligned} p' &= C^0 K_m C^{0T} d' \\ &= K_E d' \end{aligned} \tag{40}$$

とすることができる。ここに

$$K_E = C^0 K_m C^{0T} \tag{41}$$

である。また、式 (36) における p'_m は

$$\begin{aligned} p'_m &= K_m C^{0T} d' \\ &= K_m C^{0T} K_E^{-1} p' \\ &= D p' \end{aligned} \tag{42}$$

となる。⁵⁾ ここに、 K_m は部材剛性マトリックスで式 (30),(25) で与えられる。

$$D = K_m C^{0T} K_E^{-1} \tag{43}$$

である。上式を式 (36) に代入すると、幾何剛性マトリックスは

$$K'_G = \left\{ \left[\frac{\partial C}{\partial \Delta d} \right]_0 - C' K'_m \left[\frac{\partial \Delta F_m}{\partial \Delta d} \right]_0 \right\} D p' \tag{44}$$

であり、式 (35) は

$$\Delta p = (K'_E + K'_G) \Delta d = K_T \Delta d \tag{45}$$

となる。式 (44) の $p' = \lambda p_0$ とおけば式 (45) は

$$\delta \Delta p = (K'_E + \lambda K'^0_G) \delta \Delta d \tag{46}$$

で表される。ここに、 λ は荷重パラメータで

$$K'^0_G = \left\{ \left[\frac{\partial C}{\partial \Delta d} \right]_0 - C' K'_m \left[\frac{\partial \Delta F_m}{\partial \Delta d} \right]_0 \right\} D p_0 \tag{47}$$

である。よって、式 (46) の $\delta \Delta p = 0$ の場合の固有値として λ を得、線形座屈荷重 p' を求めることができる。

4. 平面剛結骨組構造の解析

4.1 直線部材からなる剛結骨組構造の座屈解析

(1) 柱の座屈の数値計算例

ピン結合トラス構造物においては式 (36) の右辺第一項すなわち接線剛性マトリックスの変位による微分のみを用いて解析を行い線形座屈の十分な結果が得られる¹⁶⁾。しかしながら、剛結骨組構造物に対してはそれだけでは十分でなく、式 (36) の右辺第二項平衡マトリックスの微分をも考慮する必要がある。

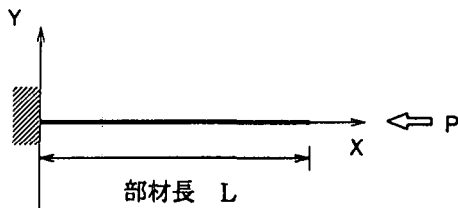


図-4 一端固定一端自由の柱

長さ L の直線で一端固定一端自由の弾性の柱が、図-4 に示すように軸方向の外力 $-P$ を受ける場合は、限界

荷重に達するまでせん断力と曲げモーメントは存在しない。式 (36) における断面力は $p'_m = [-P \ 0 \ 0]^T$ で軸力のみから構成される。式 (36) の右辺第 1 項、第 2 項はそれぞれ次のようになる。

$$\left[\frac{\partial C}{\partial \Delta d} \right]_0 p'_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P \tag{48}$$

$$-C^0 K_m^0 \left[\frac{\partial \Delta F_m}{\partial \Delta d} \right]_0 p'_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{11}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix} P \tag{49}$$

幾何剛性マトリックスは式 (48),(49) の和として次のようになる。

$$K'_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{11}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} L \end{bmatrix} P \tag{50}$$

上の幾何剛性マトリックスは、川井⁸⁾、Pilkey¹³⁾ らの著書によって示された結果と完全に一致する。その特性方程式は式 (41),(50) を式 (35) に用い、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta P_{x2} \\ \delta P_{y2} \\ \delta M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6}{5} \frac{P}{L} & -\left(\frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10} P \right) \\ 0 & -\left(\frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10} \right) P & \frac{4EI}{L} - \frac{2}{15} LP \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

$\delta P_{y2} = \delta M_2 = 0, \delta v_2 \neq 0, \delta \theta_2 \neq 0$ が座屈条件であるから、固有値として座屈荷重 $P = 2.486EI/L^2$ となり、Timoshenko²²⁾ の解 $(\pi^2/4)EI/L^2 = 2.467EI/L^2$ に近似している。

(2) 2部材剛結骨組構造の座屈解析

図-5 に示すような 2 部材対称剛結トラスを各部材は分割することなく解析を行い、式 (36) の右辺第一項のみを用いた場合の Case-1 と平衡マトリックスの増分を含む右辺第二項まで考慮した場合の Case-2 との比較を行った。

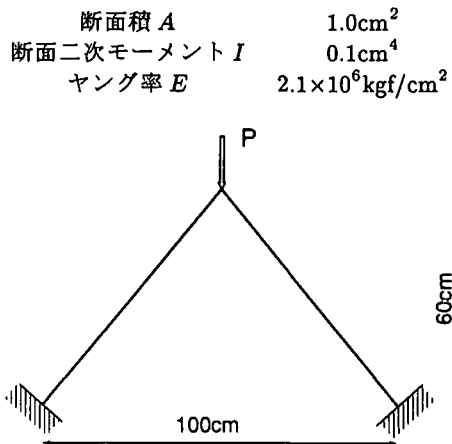


図-5 2部材剛結骨組モデル

解析結果を表-3 に示す。各部材断面力は座屈荷重における 1 部材の終端（節点 2）における値である。この部

材には実際には軸力・せん断力・曲げモーメントが作用しているがせん断力・曲げモーメントは、計算によれば非常に小さく、主に軸力が働いている。この Case-2 の座屈時の軸力の係数 30.0 は図-6 に示す座屈係数と比較すると両者の中間の値となる。部材端の自由度から見て、Case-2 はかなり正確な座屈荷重といえる。

Case-1 が Case-2 に比べ非常に大きい座屈荷重を示すのはどちらも各部材を細かく分割してなく、部材の形状の変化を考慮できないためであり、このように分割数が少ないとき、幾何剛性マトリックスとして平衡マトリックスの増分の変位に関する微分なくして部材の座屈を的確に表すことができないことが示される。

表-3 2部材剛結骨組の解析結果 $(\times \frac{EI}{L^2})$

	Case-1	Case-2
座屈荷重	65090.02	46.10
軸力	42360.59	30.00
せん断力	6.51	0.00
曲げモーメント	273.40	0.19

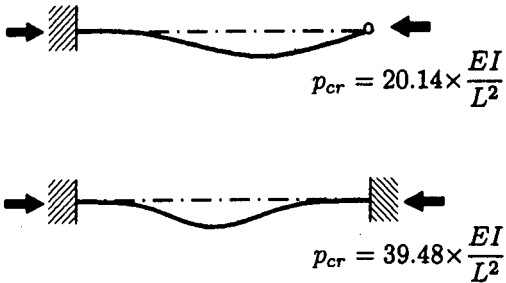


図-6 単柱の座屈荷重係数

4.2 曲線部材を有する剛結骨組構造の座屈解析

(1) 固定円弧アーチ

ここでは3.4節で得られた曲線部材の幾何剛性マトリックスを用いて、固定円弧アーチの曲線部材を有する剛結骨組構造の線形座屈解析を行う。

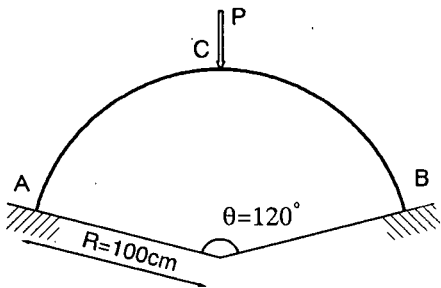


図-7 固定円弧アーチの解析モデル

図-7に示すようなアーチクラウン部に集中荷重が作用する固定円弧アーチのアーチの要素数を変化させて、部材を三次曲線とみなす場合と直線とみなす場合の座屈荷重 P_{cr} を解析し、比較を行う。

図-8において、アーチの半分の要素数が3以上で多い場合には各部材を直線とみなす場合にも曲線とみなす場合にも座屈荷重はほぼ 375kgf となり、これが正しい座

屈荷重と推定される。

また、曲線部材とする場合にはアーチの半分の要素数が1、すなわち図-7の部材を分割しないで解析してもほぼ正しい座屈荷重を与えることがわかる。すなわち、曲線形状の平衡マトリックスを用いた場合は、要素分割数が少ない場合においても正解に近い値を示すことがわかった。なお、この場合の座屈モードは非対称であった。

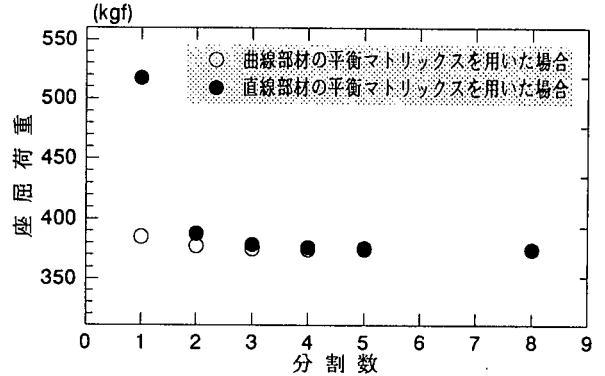


図-8 固定アーチの解析結果

(2) 多部材アーチ

近年、芸術性を考慮した構造に関心が持たれており、曲線部材を持つ骨組構造も盛んに用いられるようになってきている。その一例として、図-9に示す複数の曲線部材を有する剛結骨組構造の線形座屈解析を行った。

各部材の形状は節点Bを中心とした半円と節点A, 節点Cをそれぞれ中心とした円弧で、これらに直線部材を加えたものからこのモデルは構成されている。図中の●は解析の際に設けた節点である。各部材を2要素に分割したものとなっている。すなわち14部材12節点の構造物 (Case-1) として取り扱う。また、比較の対象としてCase-1の曲線部材をさらに3要素に分けたもの (Case-2) の解析も行った。

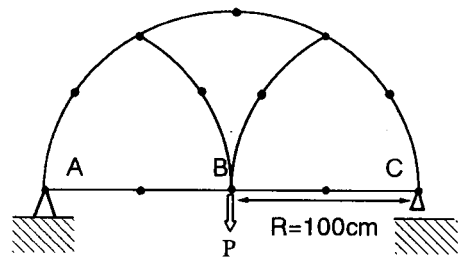


図-9 多部材アーチモデル

その結果、座屈荷重については、Case-1が945.6kgf、Case-2が938.7kgfとなり、約0.8%の誤差が生じた。座屈モードについては非対称となり、ほぼ一致した。これにより、本研究で誘導した幾何剛性マトリックスが複雑な構造にも適用できるものと思われる。

4.3 幾何学的非線形解析

(1) エラスティカ計算

ここでは、本研究で誘導した平衡マトリックスの変化 ΔH を考慮した基礎式を用いて大変形解析を行う。

図-10のような1部材剛結骨組モデルを要素分割数1の場合 (Case-1) と要素分割数2の場合 (Case-2) で解析し、ティモシェンコの楕円積分による解と比較した。

解析諸量を以下に示す。

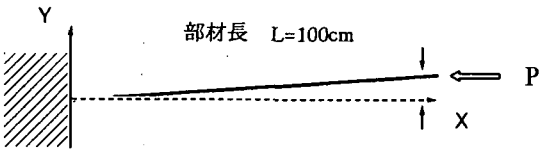


図-10 一端固定一端自由の柱

断面積 A	1cm^2
断面二次モーメント I	0.0833cm^4
ヤング率 E	$2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
収束条件 $\varepsilon_p, \varepsilon_d$	0.0001
最大反復回数 k_{max}	100
初期変位 $\delta_0 = L/1000$	0.1cm

図-11に Case-1 の変形過程、図-12にそれぞれの場合の荷重変位曲線を示した。図-11のA~Eそれぞれの变形形状における荷重と変位は、図-12のA~Eに対応している。

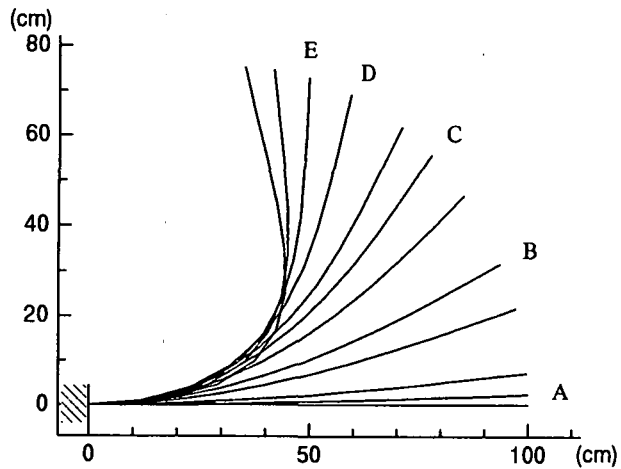


図-11 一端固定一端自由の柱の変形過程

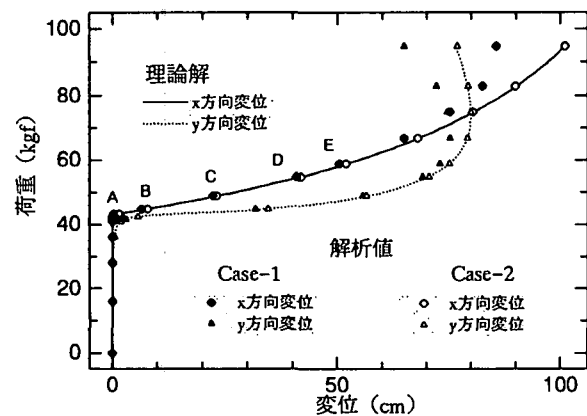


図-12 自由端の荷重変位曲線

Case-2 の時は理論解と十分一致した。また、Case-1 においても、ある程度の曲率まで対応できるといえる。こ

れより、要素数2で十分な精度の解が得られることがわかる。

(2) 多部材アーチ

図-9と同じ構造物に、荷重したときの変形形状を解析した。荷重荷重位置はAとBの中間で、大きさは600kgfである。図-13に最終形状を示す。

複数の曲線部材を有する剛結骨組構造の有限変位解析を行った。初期形状に関係なく一様に部材を取り扱うことができる。要素分割も少なく済むため、計算負荷をかなり軽減できたといえる。

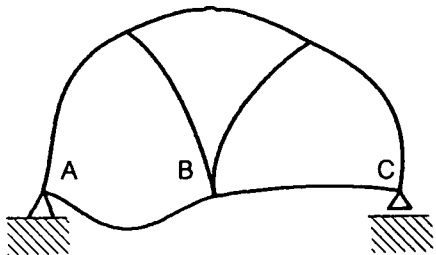


図-13 多部材アーチモデルの最終形状

5. 結論

1. 平面骨組構造の有限変位を、接続マトリックスの増分形を用いて表すことは、先の報告の通りである。ここでは、さらに平衡マトリックスの変化を考慮した、増分形有限変位骨組構造解析の基礎式を導いた。
2. 幾何剛性マトリックスは、構造系の局所的な部材形状で決まる平衡マトリックスの変位による導関数と、どちらかといえば、構造系全体の形状を示す接続マトリックスの変位による導関数に帰着し、その和として与えられることを示した。
3. ピン結合トラスの断面として軸力のみが作用する場合には、平衡マトリックスの導関数は用いなくても、接続マトリックスの変位による導関数のみで正しい座屈荷重を求めることができる。しかし、剛結骨組構造で軸力以外に曲げモーメントやせん断力が作用する構造において接続マトリックスのみで正しい座屈荷重を求めるためには、部材の分割数を多くする必要がある。平衡マトリックスの変化の導関数を考慮すれば、より少ない部材分割数で座屈解析が可能となることを、一端固定一端自由柱及び2部材剛結骨組構造の解析によって明らかにした。
4. 平衡マトリックスの変化を考慮する提案式によれば、より少ない部材分割数で任意の曲線形状をもつ部材の接線剛性マトリックスの誘導さえ可能にすることがわかる。
5. 有限変位解析において部材が大きく変形し、曲線となることがあり、直線近似できないことがある。このようにとき、提案した曲線部材の接線剛性マトリックスは有効に働くことを明らかにした。

補遺-1 たわみ性マトリックス ΔF_m の成分

$$\int_1 f_a^2 d\xi = \cos^2 \bar{\phi}_j \int_1 \cos^2 \bar{\phi} d\xi + 2 \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} d\xi + \sin^2 \bar{\phi}_j \int_1 \sin^2 \bar{\phi} d\xi$$

$$\int_1 f_c^2 d\xi = \cos^2 \bar{\phi}_j \int_1 \bar{\eta}^2 d\xi - 2 \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \bar{\eta}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) d\xi + \sin^2 \bar{\phi}_j \int_1 (\bar{\xi} - \bar{\xi}_j)^2 d\xi$$

これと同様に $f_b^2, f_a f_b, f_d^2, f_c f_d, f_c, f_d$ の積分も求められる。

補遺-2 たわみ性マトリックス ΔF_m の微分の成分

$$\begin{aligned} \int_1 f_a \dot{f}_a d\xi &= \cos \bar{\phi}_j \dot{\cos} \bar{\phi}_j \int_1 \cos^2 \bar{\phi} d\xi + (\cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j + \dot{\cos} \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j) \int_1 \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} d\xi + \sin \bar{\phi}_j \dot{\sin} \bar{\phi}_j \int_1 \sin^2 \bar{\phi} d\xi \\ &\quad + \cos^2 \bar{\phi}_j \int_1 \cos \bar{\phi} \dot{\cos} \bar{\phi} d\xi + \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \dot{\cos} \bar{\phi} \sin \bar{\phi} d\xi \\ &\quad + \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi} d\xi + \sin^2 \bar{\phi}_j \int_1 \sin \bar{\phi} \dot{\sin} \bar{\phi} d\xi \\ \int_1 f_c \dot{f}_c d\xi &= \cos \bar{\phi}_j \dot{\cos} \bar{\phi}_j \int_1 \bar{\eta}^2 d\xi - (\dot{\cos} \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j - \cos \bar{\phi}_j \dot{\sin} \bar{\phi}_j) \int_1 \bar{\eta}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) d\xi + \sin \bar{\phi}_j \dot{\sin} \bar{\phi}_j \int_1 (\bar{\xi} - \bar{\xi}_j)^2 d\xi \\ &\quad + \cos^2 \bar{\phi}_j \int_1 \bar{\eta} \dot{\bar{\eta}} d\xi - \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \dot{\bar{\eta}}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) d\xi \\ &\quad + \cos \bar{\phi}_j \sin \bar{\phi}_j \int_1 \bar{\eta}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) d\xi + \sin^2 \bar{\phi}_j \int_1 (\bar{\xi} - \bar{\xi}_j)(\dot{\bar{\xi}} - \dot{\bar{\xi}}_j) d\xi \end{aligned}$$

これと同様に $f_b \dot{f}_b, \dot{f}_a f_b, f_a \dot{f}_b, f_d \dot{f}_d, \dot{f}_c f_d, f_c \dot{f}_d, \dot{f}_c, \dot{f}_d$ の積分も求められる。

参考文献

- 1) 三池亮次: 有限変形における増分形エネルギー基礎理論, 土木学会論文報告集, 第309号, pp.41-50, 1981
- 2) Miike, R., Kobayashi, I., Yamada, Y.: Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, Vol.116, No.2, ASCE, pp.411-428, Feb.1990
- 3) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1975
- 4) Fung, Y.C.: Foundation of Solid Mechanics, (大橋義夫他訳), 培風館, 1970
- 5) Livesley, R.K. (山田嘉昭, 川井忠彦共訳): マトリックス構造解析入門, 培風館, 1968
- 6) 三池亮次, 小林一郎, 佐藤啓治, 橋本淳也: 対称骨組構造の分岐のメカニズムについて, 土木構造・材料論文集第11号, pp.127-134, 1995
- 7) Timoshenko, S.P and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill Inc., 1961
- 8) Dym, C.L. and Shames, I.H.: Solid Mechanics — a Variational Approach —, (砂川恵監訳), McGraw-Hill Inc., 1973
- 9) Goto, Y., Li, X. and Kasugai, T.: Buckling Analysis of Elastic Space Rods under Torsional Moment, Journal of EM., Vol.122, No.9, ASCE, pp.826-833, Sep., 1996
- 10) 川井忠彦, 藤谷義信: 座屈問題解析, 培風館, 1991
- 11) 福本啓士: 構造物の座屈・安定解析, 技報堂, 1982
- 12) Sakimoto, T.: Elasto-Plastic Finite Displacement Analysis of Three Dimensional Structures and Its Application to Design of Steel Arch Bridges, Doctor of Eng. Dissertation, Osaka Univ., 1978
- 13) Pilkey, W.D and Wunderlich, W.: Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods, CRC Press, 1994
- 14) 阿井正博, 西野文雄: 離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用, 土木学会論文報告集, 304号, pp.17-31, 1980
- 15) 西野文雄: 連続体の力学(II), 彰国社, 1984
- 16) Oran, C.: Tangent Stiffness in Plane Frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol.99, No.ST6, pp.973-985, June, 1973
- 17) Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Inc., 1968
- 18) 前田幸雄, 林正, 前田研一: 幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答計算法, 土木学会論文集, 249号, 1976
- 19) Spiller, W.R.: Geometric Stiffness Matrix for Space Frames, Computer & Structures, Vol.36, No.1, pp.29-37, 1990
- 20) 後藤茂夫, 羽根悟朗, 田中達朗: 接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, 238号, pp.31-42, 1975
- 21) 土木学会鋼構造委員会: 鋼構造物の終局強度と設計, 付録編第3編, 2. 有限変位解析と設計, 土木学会, pp.23, 1994
- 22) 長柱研究委員会: 弾性安定要覧改訂増補, コロナ社, 1961
- 23) 土木学会: 構造力学公式集, 土木学会, 1974

(1999年4月23日受付)